

výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

Organizátoři

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



Zadání I. série



Termín odeslání: 9. 10. 2023 20.00

Úloha I.1 ... Něco tu nehraje ⑥ ⑦

5 bodů

Soňa sedí ve vlaku, dívá se z okýnka a co nevidí: krajina ubíhá dozadu stálou rychlostí $160 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a na vedlejší koleji zdánlivě couvá vlak stálou rychlostí $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Soňa se zarazí a chvíli přemýšlí, kterým směrem a jak rychle druhý vlak ve skutečnosti jede. Spočítejte to také.

Úloha I.2 ... Těžké letáky ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Viktor se vydal vyzvednout na vrátnici letáčky Výfuku. Celkem jich přišlo $n = 20\,000$ vytištěných na papíru formátu A5 s gramáží $\rho = 120 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$. Letáky jsou zabalené po 800 kusech. Viktor má na výběr ze dvou možností: buď odnese letáky v batohu, nebo je odveze na vozíku. V batohu unese najednou nejvýše $m = 10 \text{ kg}$ letáků, přičemž letáky nakládá po celých balících, a cesta do kanceláře mu trvá $t_1 = 1 \text{ min}$. Na vozík zvládne naložit všechny letáky najednou, ale cesta do kanceláře mu trvá $t_2 = 6 \text{ min}$.

Jaký způsob přepravy letáků z vrátnice do kanceláře má Viktor zvolit, aby byl hotový co nejdříve? Nezapomeňte, že se musí vždy vrátit na vrátnici i s vozíkem, který si tam půjčil. Cesta zpět na vrátnici trvá stejně dlouho jako do kanceláře a čas strávený manipulací s letáky je již zahrnutý do uvedených časů.

Kolik by muselo být letáků, aby byly oba způsoby stejně časově náročné?



Úloha I.3 ... Au, to pálí! ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Filip sjíždí na kole kopec o výšce $h = 8$ m. Jelikož je kopec velmi prudký, musí intenzivně brzdit, aby si udržel po celou dobu konstantní rychlost. Jeho kolo je opatřeno kotoučovými brzdami. Samotný kotouč má hmotnost $m = 200$ g a je vyroben z materiálu o měrné tepelné kapacitě $c = 553 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Na jakou teplotu se kotouč zahřeje, váží-li Filip i s kolem $M = 80$ kg? Počítejte, že počáteční teplota kotouče je $t_0 = 20^\circ\text{C}$ a že veškerá energie ztracená brzděním kola se přemění na tepelnou energii kotouče. Filip brzdí pouze zadní brzdou. Vzhledem k tomu, že kopec není příliš vysoký, stihne jej sjet dříve, než kotouč předá nějaké výrazné množství tepla do okolí.

Úloha I.4 ... Vodní bitka ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Viktor si pořídil novou vodní pistoli. Ví, že při zmáčknutí spouště musí působit silou 10 N, přičemž se spoušť se stlačí o 2 cm. Jak daleko pistole dostříkne, pokud ji bude Viktor držet vodorovně ve výšce 120 cm? Tryska má průměr 3 mm a na jedno zmáčknutí z ní vystříkne 10 ml vody. Odporové síly zanedbejte.

Úloha I.5 ... LED pásky ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

7 bodů

Viktor má na koleji celkem 5 LED pásků, kterými si nasvěcuje interiér pokoje. Každý LED pásek sestává ze 120 paralelně zapojených segmentů (díky tomu lze LED pásy stříhat po jednotlivých segmentech), které se dále skládají vždy ze 3 sériově zapojených LED. Napětí zdroje pro každý LED pásek je $U = 12$ V, přičemž každou LED protéká proud $I = 20$ mA.

1. Jaký je celkový příkon Viktorových LED pásků?
2. Kolik Kč by Viktor za provoz LED osvětlení svého pokoje za rok zaplatil, pokud by jej měl zapnuté každý den v průměru $t = 1$ h? Viktor platí za 1 kWh elektřiny 12 Kč.

Úloha I.E ... Zrnko rýže ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Změřte co nejpřesněji průměrnou hmotnost jednoho zrnka (neuvařeného) rýže. Nezapomeňte uvést, o jaký druh rýže se jednalo.

Úloha I.V ... Ideální plyn ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

1. Viktor koupil na příští tábor Výfuku horkovzdušný balón. Hmotnost prázdného balónu je $m = 1000$ kg a vejde se do něj vzduch o objemu $V = 3000$ m³.

Na jakou teplotu musí ohřát vzduch uvnitř, aby se balón vznosl nad zem, jestliže má okolní vzduch teplotu 20°C ? Potřebné fyzikální vlastnosti vzduchu si dohledejte.

2. Uvažujme následující cyklus ideálního plynu. Na začátku má objem V , teplotu T a tlak p , přičemž jej nejdříve necháme izotermicky expandovat na objem $3V$. Poté jej budeme izochoricky zahřívat, následně jej izotermicky stlačíme na objem $2V$ a poté budeme izobaricky stlačovat do původního stavu. Na jaké teplotě musí probíhat druhá izoterma? Jaká je hodnota tlaku před izotermickým stlačováním? Celý cyklus zakreslete do p - V diagramu.

3. Jak bylo zmíněno ve Výfučtení, je vnitřní energie součtem kinetických energií všech částic v plynu. Odhadněte pomocí tohoto tvrzení průměrnou rychlost jednotlivých částic plyněného vodíku a dusíku za teploty $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ a porovnejte ji s rychlostmi předmětů, které se běžně pohybují okolo vás. Pro oba plyny určete, kolik částic se nachází v objemu 1 l při této teplotě a tlaku 1 bar . Z předchozích výpočtů odhadněte (nepokoušejte se to spočítat přesně, k určení některých číselných koeficientů v přesném výsledku jsou potřeba velmi pokročilé znalosti), kolik částic okolního vzduchu vám za sekundu narazí do oka.



Výfučtení: Ideální plyn

Vítejte u prvního Výfučtení 13. ročníku Výfuku! První letošní díl budeme věnovat něčemu, co se nachází všude kolem nás, ať se hnebe kamkoli. Řeč bude o plynech. Dozvíme se, jakými fyzikálními zákony se řídí a co všechno můžeme pomocí několika málo předpokladů spočítat.

Plyn je skupenství látky, ve kterém jsou jednotlivé atomy nebo molekuly (jedním slovem částice) tak daleko od sebe, že na sebe působí silami pouze velmi slabě. Netvoří proto společně žádnou strukturu. Plyny mohou prakticky libovolně měnit svůj tvar, jsou stlačitelné a vyplňují všechnen prostor, ve kterém se nachází.

Jak je ve fyzice běžné, budeme chování plynu studovat pomocí zjednodušeného modelu založeného na několika předpokladech. Nejjednodušší popis plynu, který za běžné teploty a tlaku dobře vystihuje vlastnosti plynů okolo nás, se nazývá *ideální plyn*. Model je zajímavý i proto, že spojuje poznatky z několika základních odvětví fyziky – z *mechaniky*, *termodynamiky* a *statistické fyziky*.

Ideální plyn musí splňovat několik kritérií. Skládá se z velmi velkého množství částic, které mezi sebou a okolním prostředím interagují pouze během vzájemných srážek, veškeré další silové působení je zanedbatelné. Objem částic je výrazně menší oproti objemu, ve kterém je pozorujeme. Částice se pohybují chaoticky všemi směry.

Pouze z těchto (v zásadě intuitivních) kritérií můžeme pomocí aparátu statistické fyziky nalézt rovnice, které popisují chování ideálního plynu. Tento postup si ovšem necháme na nějaké jiné čtení a půjdeme se podívat na výsledky, které přineslo už experimentální zkoumání plynů před stovkami let.

Popis plynu

Uvažujme, že máme nějakou láhev, ve které je uzavřený plyn. Na láhvi je několik měřicích přístrojů, které zobrazují údaje o plynu uvnitř, například o tlaku a teplotě. Těmto veličinám říkáme *stavové veličiny*, protože je pomocí nich určen *stav* daného systému. Slovo stav zde má naprosto klasický význam. V našem případě popisují stav ideálního plynu v láhvi, ale jedná se o zcela obecný pojem, který se může používat u libovolného fyzikálního systému.

Vraťme se zpátky k našemu plynu v láhvi. Asi nejjednodušší veličinou, která stav plynu popisuje, je vnitřní *objem* láhve. Dalším intuitivním parametrem je množství plynu v nádobě. To bychom mohli určovat například pomocí hmotnosti plynu v kilogramech, častěji se ovšem setkáme s určováním pomocí počtu částic N . Protože se ale v makroskopických škálách toto číslo pohybuje v řádu 10^{23} částic v objemu několika litrů, což je nepředstavitelně moc (ale pořád mnohonásobně méně než v pevných látkách), používáme vyjádření v *látkovém množství*.

Jeho jednotkou je mol, což je mimochodem jedna ze sedmi základních jednotek soustavy SI. Převodní vztah mezi počtem částic a látkovým množstvím n je jednoduchý

$$n = \frac{N}{N_A},$$

kde $N_A \doteq 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ je Avogadrova konstanta, která udává počet částic v jednom molu. Její velikost je určena právě tak, abychom látková množství při řešení běžných problémů mohli uřčovat v jednotkách, desítkách apod.

Již výše jsme zmínili, že jednou z nejdůležitějších veličin je *teplota*. Všichni máme intuitivní představu, co je to teplota – něco je při doteku horké, něco naopak studené apod. Jedna z interpretací teploty pochází z představ o plynu. Zde je založena na rychlosti pohybu jednotlivých částic, ze kterých se plyn skládá (čím větší je pohybová energie částic, tím větší je teplota plynu). V České republice jsme zvyklí teplotu standardně uvádět v jednotce $^{\circ}\text{C}$, přičemž Celsiovu stupnici všichni dobře známe. Při popisu dějů v plynu je ovšem potřeba zavést termodynamickou teplotu, jejíž jednotkou je kelvin (K) a která má počátek v hodnotě absolutní nuly (tj. nejmenší možné teplotě, na kterou lze látku ochladit). Pro převod mezi kelviny a stupni Celsia platí vztah

$$t[^{\circ}\text{C}] = T[\text{K}] - 273,15 \text{ K}.$$

Jedná se tedy pouze o posunutý počátek, protože velikost jednoho kelvinu je stejná jako velikost jednoho stupně Celsia.

Poslední veličinou, kterou zde zavedeme, je *tlak*. Jedná se o přímé silové působení částic na stěny nádoby. Přilétající částice se od vnitřní stěny odrazí, takže změní svou hybnost¹. Za jednu sekundu takto přiletí hodně částic a jejich celková změna hybnosti za tento časový interval je rovna síle, kterou dohromady působí na stěnu nádoby. Pokud tuto sílu vydělíme uvažovanou plochou stěny, dostáváme tlak. Základní jednotkou tlaku je pascal (Pa), v mnoha aplikacích se ale setkáváme s jednotkou bar, což je přibližně hodnota atmosférického tlaku na zemském povrchu. Platí $1 \text{ bar} = 100\,000 \text{ Pa}$.

Ukázalo se, že mezi výše zmíněnými stavovými veličinami se v *rovnováze* (kdy se nemění hodnoty jednotlivých stavových veličin) objevují matematické vztahy – *stavové rovnice*. Veličiny tak na sobě nejsou nezávislé a ze znalosti ostatních jsme schopni vyjádřit neznámou veličinu.

Stavová rovnice

V průběhu novověku byly postupně objeveny zákony, které popisují chování plynů okolo nás. Fyzici našli, jak vypadá závislost tlaku na teplotě za konstantního objemu, závislost objemu na tlaku za konstantní teploty a podobně. Byly ověřeny tři známé zákony – Boyleův-Mariottův, Charlesův a Gay-Lussacův, které však všechny vychází z jednoho jediného vztahu – *stavové rovnice ideálního plynu*. Uvedeme ji ve tvaru

$$pV = nRT,$$

kde $R \doteq 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ je *molární plynová konstanta*. Rovnice platí pro uzavřený prostor o objemu V za tlaku p , pro látkové množství n ideálního plynu za termodynamické teploty T (teplotu tedy musíme do vztahu dosazovat v jednotkách kelvin).

¹Hybnost je definována jako součin hmotnosti a rychlosti částice. Druhý Newtonův zákon nám pak říká, že hybnost částice mění působící síla, což je v tomto případě ekvivalentní se známým vzorcem $F = ma$.

Tvar rovnice je poměrně intuitivní. Pokud za stálé teploty zmáčkne napuštěný balónek vzduchu, zmenší se objem a zvýší tlak uvnitř (na malé zmáčknutí stačí menší síla, postupně je potřeba čím dál větší). V této situaci pravá strana zůstává konstantní, takže musí i levá, zmenšení objemu tedy opravdu vede k růstu tlaku.

Nemusíme se ovšem omezovat pouze na uzavřený prostor. Vydělíme-li celou rovnici objemem V a vynásobíme *molární hmotností* M_m , což je hmotnost jednoho molu částic (tedy atomů nebo molekul), dostáváme

$$pM_m = \frac{nM_m}{V}RT = \frac{m}{V}RT = \rho RT \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho} = \frac{R}{M_m}T,$$

kde m je hmotnost plynu v objemu V a ρ je jeho hustota. Nalezli jsme tedy, jak jsou spolu spojeny teplota, tlak, druh plynu (skrz M_m) a jeho hustota! Nyní už bychom se mohli podívat na to, jak funguje horkovzdušný balón. To si však necháme do jedné z úloh.

Máme-li směs několika různých plynů, je jejich celkový tlak dán součtem parciálních tlaků, tedy tlaku od každé složky zvlášť. Tento fakt je znám jako Daltonův zákon a je v souladu se stavovou rovnicí. Také můžeme pro základní výpočty používat molární hmotnost vzduchu, ačkoli to není čistá chemická látka. Její hodnota je $28,96 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ a je určena jako průměr molárních hmotností jednotlivých druhů plynu zastoupených v atmosféře vážený přes jejich podíl ve vzduchu, tedy převážně dusík (78 %) a kyslík (21 %).

Již na začátku jsme deklarovali, že popis přírody pomocí jednoduchých modelů má své meze. Plyny, se kterými se setkáme za běžných podmínek, jsou poměrně přesně popsatelné pomocí modelu ideálního plynu. Ve skutečnosti jsou to ale *reálné* plyny a při jejich popisu v jiných podmínkách musíme uvažovat odchylky od nejjednoduššího modelu. Vylepšeným popisem je Van der Waalsův plyn, který zohledňuje nenulové rozměry částic a bere v potaz přitažlivé (kohezní) síly mezi nimi. Poskytuje také vhled do přechodů mezi jednotlivými fázemi (skupenstvími). Dále se jím však zabývat nebudeme.

Stavová rovnice nám dává restriktce na možné stavy ideálního plynu v uzavřeném prostoru. Představme si, že nějakou proměnnou zafixujeme konstantní hodnotou (např. objem v uzavřeném válci), zatímco nějakou jinou veličinu, třeba teplotu, začneme měnit. Pak se patřičně začne měnit tlak v láhvi. Hovoříme o *ději v ideálním plynu*, přičemž předpokládáme, že se množství plynu ve válci nemění.

Děje v ideálním plynu

Mějme vertikálně postavený válec s ideálním plynem. Jeho horní podstavu nechť tvoří píst, kterým můžeme pohybovat. Zároveň předpokládejme, že píst dokonale těsní a pohybuje se ve válci bez tření. Napřed píst držíme v konstantní poloze a plyn takto za konstantního objemu ohřejeme, čímž vzroste tlak. Píst poté uvolníme a postavíme na něj závaží (pytlík s pískem), které vyrovná tlak plynu působící na píst zevnitř válce. Nyní začneme válec ochlazovat. Uvnitř válce se ochlazením sníží tlak, takže píst se závažím se proboří o kousek níže. Tím ovšem tlak uvnitř vzroste a vyrovná hmotnost závaží. Píst je zatížen stále stejnou hmotností, takže plyn ve válci je pod stále stejným tlakem. Snižováním teploty se ale snižuje objem.

Toto provádějme až do doby, kdy teplota plynu uvnitř klesne na původní hodnotu před ohříváním. Nyní začneme odebírat jedno zrníčko písku z pytlíku za druhým. Odebráním zrníčka se sníží tlak, píst se zbytkem závaží se trochu posune nahoru, dokud se síly nevyrovnají. Postupně odebíráme všechna zrníčka, až se dostaneme do situace, kdy na pístu žádné nezbyde. Nyní jsou ovšem hodnoty všech veličin stejné, jako před začátkem ohřívání, jsou stejné jako

úplně na začátku. Uvědomme si ale, že stav plynu byl stejný jenom na začátku a na konci, jinak byl vždy rozdílný. Provedli jsme *cyklus s ideálním plynem*.

Náš cyklus se skládal ze tří částí. První z nich byla *izochorické ohřívání*. Předpona *izochor* pochází z řečtiny a znamená „stejný“, zbytek slova je odvozený od řeckého slova pro „prostor“. Označení *izochorický* tak znamená, že se jedná o děj při konstantním objemu.

Následovalo *izobarické ochlazování*, kdy jsme snižovali teplotu za konstantního tlaku. Nakonec jsme provedli *izotermickou expanzi*, tedy zvyšování objemu za konstantní teploty.

Děj bychom samozřejmě mohli provést i v opačném směru. Místo expanze bychom pak hovořili o kompresi. Základním grafickým znázorněním dějů je jejich vyobrazení v *p-V* diagramu. Na vodorovné ose vynášíme objem plynu, na svislé jeho tlak. Jeden bod v tomto grafu znamená jeden fyzikální stav systému o určitém tlaku, objemu a díky stavové rovnici i o určité teplotě. Ta sice přímo znázorněna není, ale dokážeme ji kdykoli při znalosti *p* a *V* dopočítat. Protože se počet částic plynu v uzavřeném prostoru nemění, můžeme stavovou rovnici psát ve tvaru

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B},$$

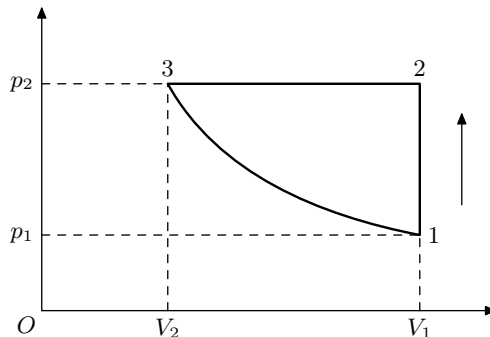
kde indexy *A* a *B* značí dva stavy plynu ve válci. Součin objemu plynu a jeho tlaku vydělený termodynamickou teplotou plynu je tak v každém okamžiku všech dějů konstantní. Díky tomuto můžeme určit tvar křivek v *p-V* diagramu.

Začneme křivkou, která se nazývá *izobara*. Popisuje izobarický děj a tlak je tak nezávislý na objemu. V grafu se jedná o vodorovnou úsečku. Naopak *izochora* je úsečka, která je svislá. Objem zůstává konstantní a mění se tlak s teplotou. Poslední je *izoterma*, která reprezentuje izotermický děj. Teplota zůstává konstantní, takže i součin obou veličin na osách grafu *pV* je konstantní. Abychom tuto křivku dokázali zakreslit, použijeme vyjádření závislosti tlaku na objemu

$$pV = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad p(V) = \frac{\text{konst.}}{V},$$

hledanou křivkou je tedy hyperbola.

Cyklus, který jsme s plynem provedli na začátku této kapitoly, je zakreslený v *p-V* diagramu na obrázku 1. Směr šipky ukazuje, v jakém pořadí jsme jednotlivými body procházeli. Začínali jsme v bodě 1, pokračovali izochoricky do 2, odtud izobaricky do 3 a izotermicky jsme se vrátili do 1.



Obr. 1: Uvažovaný cyklus a jeho *p-V* diagram.

Uvažování o kruhových dějích v plynech nejsou jen nějaké teoretické hrátky. Jsou základem pro popis spalovacích motorů, které umožnily průmyslovou revoluci a staly se nepostradatelnou součástí světa, ve kterém dnes žijeme. Výfučení bohužel není nafukovací (ani letní horka nepomáhají ke zvýšení jeho objemu), ale na další informace se můžete těšit již v příštím díle.

Energie plynu

Přeci jenom se ale ještě trochu vrátíme k tématu, které jsme právě nakousli. Ve spalovacích motorech přeměňujeme chemickou energii na mechanickou, dodáváme teplo a konáme práci. A když je řeč o energii, tak i ideální plyn má svou vlastní energii.

Když plyn (i jakoukoli jinou látku) ohříváme, dodáváme jí energii ve formě tepla. Uvažujme ohřev za stálého objemu (tedy izo. . . -choricky!). Teplo, které plynu dodáváme, se přemění na formu energie, které říkáme *vnitřní energie*. V případě ideálního plynu je vnitřní energie U daná součtem kinetické energie všech částic v plynu, přičemž je tak velmi přímočaře spojena s teplotou jako

$$U = \frac{f}{2}nRT.$$

Vnitřní energie roste lineárně s teplotou a navíc nezávisí na objemu ani tlaku. Druh plynu se zde započítá ve formě koeficientu f , který značí počet *stupňů volnosti jedné molekuly*. Pokud je plyn tvořen jednoatomovými molekulami (nevázanými atomy, jako je tomu u vzácných plynů helia He, neonu Ne, argonu Ar atd.), je $f = 3$. U dvouatomových plynů (kyslík O₂, dusík N₂, vodík H₂, ...) platí, že $f = 5$. Pokud má molekula tři a více atomů, které neleží na jedné přímce (např. H₂O), tak $f = 6$. Uvedené hodnoty f platí velmi dobře za normálních podmínek pro běžné plyny.

Počet stupňů volnosti souvisí s tím, kolik souřadnic je potřeba zadat, aby byla poloha a orientace molekuly v prostoru jednoznačně zadána. Pro jeden atom jsou to vždy souřadnice x, y, z , pro dva atomy jsou to 3 souřadnice těžiště a dva úhly natočení spojnice mezi atomy vůči osám prostoru, pro víceatomové molekuly jsou to už tři úhly. Více si o stupních volnosti povíme zase někdy jindy, pro počítání s ideálním plynem již více není potřeba.

Dodejme ještě, že jednotlivé molekuly se nepohybují všechny stejnou rychlostí, ale rychlost každé z nich může být prakticky libovolná. V jedné z úloh ovšem budete uvažovat o jakési jejich průměrné rychlosti, která přímo souvisí s teplotou a hmotností částic. Při řešení se zkuste zamyslet, jakou hodnotu f budete uvažovat, neboť s rychlostí a translační kinetickou energií molekuly souvisí vždy pouze 3 stupně volnosti.

Z tohoto krátkého výkladu možná není úplně zřejmé, že vnitřní energie je jedním z nejdůležitějších pojmů termodynamiky, což je odvětví fyziky, které doslova prostupuje vším, co je kolem nás. Mimořádně síla formalismu termodynamiky je také v tom, že dokáže odvodit vztah, který spojuje stavovou rovnici ideálního plynu s uvedenou rovnicí pro vnitřní energii. Důležitost vnitřní energie nám možná bude jasnější už v příštím Výfučení, kde si navíc řekneme i něco o práci a teple jako formách energie a podíváme se i na tepelné výměny. Pokuste se dostat pod kůži děje v ideálním plynu, bude se vám to hodit! Všem, kteří jste se při čtení tohoto dílu dostali až sem, přežeme hodně zdaru a bystrou mysl při řešení úloh první série.

Jaroslav Herman

herman@vyfuk.mff.cuni.cz



*Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <https://vyfuk.mff.cuni.cz>
e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

 /ksvyfuk  @ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.