Úloha VI.5 ... Kulička na provázku

7 bodů; průměr 4,69; řešilo 13 studentů

Jirka doma našel kuličku o hmotnosti $m = 50\,\mathrm{g}$ zavěšenou na tenkém nehmotném provázku délky $l = 50\,\mathrm{cm}$ a začal s ní provádět pokusy.

1. *Napřed kuličku roztočil takovým způsobem, že obíhala po kružnici v horizontální rovině s frekvencí $f_1 = 1\,\mathrm{Hz}$. O jaký úhel byl provázek vychýlený oproti svislému směru?*
2. *Nyní by chtěl kuličku roztočit tak, aby po kruhové dráze obíhala 2krát pomaleji, tedy s frekvencí $f_2 = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$. Podaří se mu to? Pokud ano, tak o jaký úhel bude nyní provázek vychýlený? Pokud ne, vysvětlete, proč se mu to nepodaří a co se bude s kuličkou dít? (tj. nemusíte nic počítat).*

Jirka kuličku roztáčí tak, že ji vždy vychýlí o vhodný úhel a poté jí udělí vhodnou rychlost kolmou na směr odchýlení. V úloze zanedbejte odporové síly.

1. Úhel, o který se kulička odchýlila od svislého směru, budeme označovat α. Na kuličku budou následně působit dvě síly.

   První z nich bude tíhová síla, která bude působit svislým směrem a bude mít velikost:

   $$F_\mathrm{t} = mg\,,$$

   kde $m = 0{,}05\,\mathrm{kg}$ je hmotnost kuličky a g je tíhové zrychlení.

   Další bude odstředivá síla, která bude působit ven z kruhu, po kterém se kulička pohybuje. Její velikost bude:

   $$F_\mathrm{o} = m\omega^2 r\,,$$

   kde ω je úhlová rychlost, která je spjata s frekvencí vztahem $\omega = 2\pi f_1$, z čehož $f_1 = 1\,\mathrm{Hz}$ je zadaná frekvence a r je poloměr kruhové trajektorie, po které se kulička pohybuje. Velikost poloměru r zvládneme spočítat pomocí délky provázku l, neboť r a l jsou délky stran v pravoúhlém trojúhelníku na obrázku 1.

   Ve zmíněném pravoúhlém trojúhelníku platí:

   $$\sin\alpha = \frac{r}{l}\,,$$

   odkud můžeme vyjádřit r. Pokud tedy do vztahu pro F_o dosadíme zmíněné vztahy za ω a za r, dostaneme:

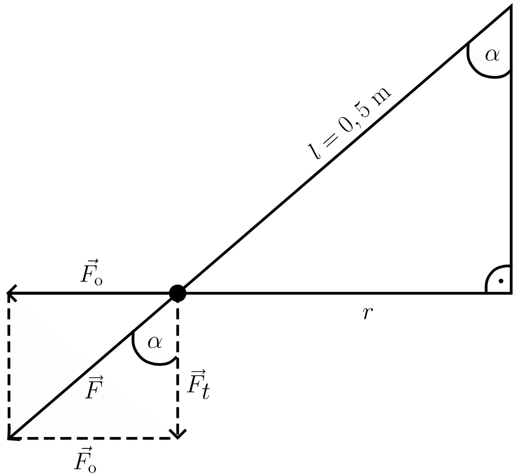
   $$F_\mathrm{o} = m(2\pi f)^2 l\sin\alpha\,.$$

   Z obrázku 1 vidíme, že tangens úhlu α spočítáme pomocí velikostí působících sil jako:

   $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{t}}\,.$$

   Dosazením za síly dostaneme:

   $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m(2\pi f)^2 l\sin\alpha}{mg}\,.$$



Obr. 1: Kulička na provázku spolu s působícími silami

Tangens následně můžeme přepsat jako podíl sinu a kosinu:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{m(2\pi f)^2 l \sin\alpha}{mg}\,.$$

Teď můžeme pokrátit hmotnosti m a $\sin\alpha$ a dostaneme:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{(2\pi f)^2 l}{g}\,,$$
$$\cos\alpha = \frac{g}{(2\pi f)^2 l}\,.$$

Dosazením $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $f = 1\,\mathrm{Hz}$ a $l = 0{,}5\,\mathrm{m}$ získáme hodnotu $\alpha = 60{,}2\,°$. Kulička tedy bude vychýlena od svislého směru o úhel o velikosti $60{,}2\,°$.

2. Pokud by frekvence byla $f_2 = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$, pak bychom pro poslední uvedenou rovnici získali dosazením

$$\cos\alpha = 1{,}99\,.$$

Funkce kosinus však může nabývat pouze hodnot od -1 do 1, tedy tato rovnice nemá řešení. Co to však znamená pro pohyb kuličky? Víme, že pro frekvenci $f_1 = 1\,\mathrm{Hz}$ řešení existuje, zamysleme se proto, co se bude dít, když budeme frekvenci pohybu po kruhové dráze zmenšovat.

V předchozí části jsme získali rovnici:

$$\cos\alpha = \frac{g}{(2\pi f)^2 l}\,.$$

Vidíme, že pro čím dál menší frekvenci se $\cos\alpha$ zvětšuje, úhel α se proto zmenšuje, až je v určitý okamžik $\alpha = 0$. Pak je ale i $r = 0$. To by v tento okamžik však znamenalo, že se kulička vůbec nepohybuje! Hraniční frekvence oběhu po kružnici tedy je:

$$\cos\alpha = 1 = \frac{g}{(2\pi f_{\min})^2 l}\,,$$

$$f_{\min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Pro naše hodnoty máme $f_{\min} \doteq 0{,}7\,\mathrm{Hz}$. Pro menší frekvence už se nám tedy nepodaří kuličku roztočit tak, aby obíhala po kruhové dráze.

Mohli bychom si ještě položit otázku, zda je vůbec možné, aby frekvence oběhu kuličky byla $f = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$ v případě, kdy pohyb nemusí být po kružnici.

Budeme postupovat podobně jako před chvíli. Uvažujme, že chceme kuličku roztočit po kruhové dráze pro známou frekvenci $f_1 = 1\,\mathrm{Hz}$, tedy ji vychýlíme o příslušný úhel α (viz část 1) a udělíme jí potřebnou rychlost ve směru kolmém na výchylku. Pak bude kulička obíhat po kružnici, přesně jako jsme spočítali v části 1.

Co když jí nyní udělíme o něco menší rychlost (při stejné počáteční výchylce)? Pak již oběh nebude po kružnici, ale po nějaké podivné trojrozměrné křivce, která při pohledu shora bude pravděpodobně připomínat elipsu.

Co se stane s frekvencí? Intuitivně dává smysl, že by se měla zmenšit, měli bychom to však doložit nějakým argumentem. Zmenšujme tedy počáteční rychlost dále, až se nakonec dostaneme na 0. Tím nám z kuličky na provázku prakticky vznikne obyčejné kyvadlo. Frekvenci kmitů známe pro *malé výchylky* jako:

$$f_{\text{malé}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

tedy stejná frekvence jako $f_{\min}$ pro pohyb po kružnici! Frekvence se tedy skutečně pro menší rychlosti zmenšuje, a navíc vidíme, že ani v případě malých výchylek se nám frekvenci pohybu nepodaří zmenšit více, než na $f_{\min}$.

Zbývá vyřešit otázku velkých výchylek, kdy již nemůžeme využít aproximace použité u matematického kyvadla. Pro matematické kyvadlo předpokládáme, že síla, která se snaží dostat kyvadlo do rovnovážné polohy, je přímo úměrná výchylce. Obecně je však úměrná $\sin x$, kde x je výchylka a pro sinus platí

$$\sin x < x$$

pro kladné x. Skutečná síla je tedy obecně menší než síla, kterou předpokládá matematické kyvadlo, proto perioda skutečného kyvadla je vždy větší. Vypočítat frekvenci skutečného kyvadla je velmi těžké, pro naše konkrétní hodnoty vyjde, že při počáteční výchylce $90\,^\circ$ je frekvence o něco menší než $0{,}6\,\mathrm{Hz}$. S naším kyvadlem se nám tedy dosáhnout pohybu s frekvencí $0{,}5\,\mathrm{Hz}$ nikdy nepodaří.

Jakub Savula
savula@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.