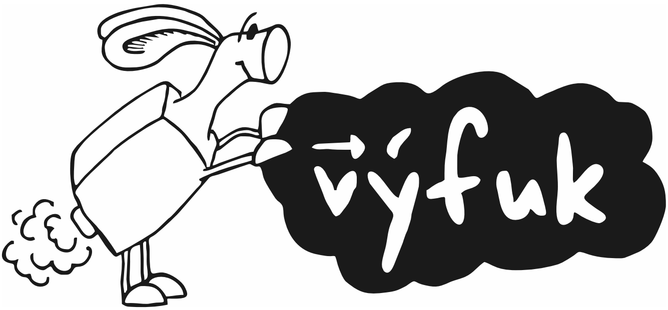


výpočty
fyzikálních
úkolů

Milí kamarádi,

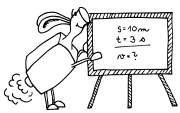
školní rok se pomalu chýlí ke konci a s ním přichází i letošní poslední sada úloh Výfuku. Těšit se můžete například na zalévání záhonu, upgrade airsoftové zbraně nebo na úlohu o spotřebě materiálu při háčkování. Nesmí chybět ani Výfučtení, které se tentokrát týká magnetů.

V brožurce také naleznete vzorová řešení 5. série a průběžné pořadí po 4. sérii. Do konce školního roku se ještě můžete těšit na poslední brožurku, ve které budou vzorová řešení šesté společně s konečným pořadím v rámci letošního ročníku Výfuku.

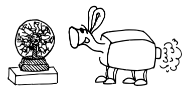
S poslední sérií máte také poslední příležitost ke získání odměn ve Výfučím bingu, tak si je nenechte ujít.

Aby se vám po nás přes prázdniny nestýskalo, chystáme opět dvě prázdninové série a již tradiční letní tábor, na kterém máme ještě stále volná místa, takže pokud vy nebo vaši kamarádi chcete jet, tak se nám určitě ozvěte.

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.org`



Zadání VI. série

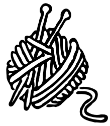


Termín odeslání: 8. 5. 2023 20.00

Úloha VI.1 ... Drbárna ❻ ❼ — 5 bodů

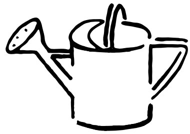
Ester si v pondělí naplánovala na víkend tajný výlet do Frýdku-Místku a rozhodla se podělit o své tajemství se svými třemi kamarádkami. Následující den každá z těchto kamarádek ono tajemství vyzradila dalším třem kamarádkám. Tímto stylem to pokračovalo i další dny, přičemž ani Ester, ani kamarádky, které tajemství již jednou rozšířily, jej znovu nikomu neřekly. Kolik lidí bude tajemství znát v pátek?

Úloha VI.2 ... (Ne)malé klubíčko ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů



Soňa si háčkuje trojúhelníkový šátek mušličkovým vzorem. Začala řadou o šedesáti mušličkách a každou další řadu háčkuje vždy o mušličku kratší do mezer (jako když se staví pyramida z kostek). Vystačí jí klubíčko na celý šátek, jestliže po osmnácti řadách spotřebovala polovinu klubíčka?

Úloha VI.3 ... Plníme ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů



Lukáš dostal za úkol zalít záhon, k čemuž používá konev o objemu $V = 10\,\mathrm{l}$. Obklopen přírodou se u plnění zamyslel, a když se probral, bylo v konvi již $9\,\mathrm{l}$ vody. Začal tedy zatahovat kohoutek tak, že změna průtoku za čas byla $q = 30\,\mathrm{l{\cdot}min^{-2}}$. Rozhodněte, zda Lukášovi voda přetekla, nebo ne. Maximální průtok vody z kohoutku byl $Q = 10\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$. Jak dlouho má trvat celé plnění, aby po zastavení proudu vody byla konev plná a žádná voda nepřišla nazmar? Na počátku je nulový průtok a Lukáš otevírá kohoutek stejně rychle, jako ho zatahuje.

Úloha VI.4 ... Upgrade zbraně ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Viktor nebyl spokojený s dostřelem a přesností své airsoftové zbraně, a tak začal přemýšlet nad tím, jak by mohl tyto parametry zlepšit. Napadlo ho vyměnit pružinu a zvýšit hmotnost použitých kuliček. Záhy si ale uvědomil, že to nevyhnutelně povede ke snížení počtu výstřelů na jedno nabití akumulátoru. O kolik kuliček méně bude Viktor nově schopen na jedno nabití akumulátoru vystřelit, pokud dosud používal kuličky vážící $m_1 = 0{,}25\,\mathrm{g}$, kterým pružina udělila úsťovou rychlost $v_1 = 130\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, a nově bude chtít používat kuličky vážící $m_2 = 0{,}32\,\mathrm{g}$, kterým nová pružina dodá úsťovou rychlost $v_2 = 160\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? Viktorův akumulátor má náboj $Q = 1\,500\,\mathrm{mAh}$ a napětí $U = 9{,}6\,\mathrm{V}$. Předpokládejte, že celková účinnost zbraně $\eta = 0{,}14$ (tj. účinnost, se kterou akumulátor mění elektrickou energii na mechanickou) se při výměně pružiny a přechodu na jiný typ střeliva nezměnila.

Úloha VI.5 ... Kulička na provázku ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Jirka doma našel kuličku o hmotnosti $m = 50\,\mathrm{g}$ zavěšenou na tenkém nehmotném provázku délky $l = 50\,\mathrm{cm}$ a začal s ní provádět pokusy.

1. Napřed kuličku roztočil takovým způsobem, že obíhala po kružnici v horizontální rovině s frekvencí $f_1 = 1\,\mathrm{Hz}$. O jaký úhel byl provázek vychýlený oproti svislému směru?

2. Nyní by chtěl kuličku roztočit tak, aby po kruhové dráze obíhala 2krát pomaleji, tedy s frekvencí $f_2 = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$. Podaří se mu to? Pokud ano, tak o jaký úhel bude nyní provázek vychýlený? Pokud ne, vysvětlete, proč se mu to nepodaří a co se bude s kuličkou dít? (tj. nemusíte nic počítat).

Jirka kuličku roztáčí tak, že ji vždy vychýlí o vhodný úhel a poté jí udělí vhodnou rychlost kolmou na směr odchýlení. V úloze zanedbejte odporové síly.

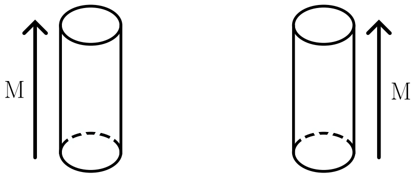
Úloha VI.E ... Izolace ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Změřte dobu tání kostky ledu položené na různých materiálech. Na základě měření srovnejte použité materiály podle toho, jak dobře vedou teplo. Správnost svého seřazení materiálů ověřte pomocí hodnot součinitele tepelné vodivosti (čím vyšší hodnota, tím lépe materiál vede teplo), které si dohledáte. U vyhledaných hodnot nezapomeňte uvést zdroje.

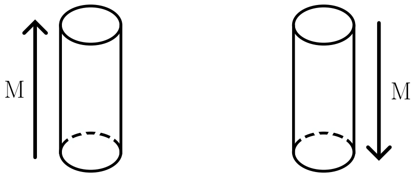
Úloha VI.V ... Matoucí magnety ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Hynek s Alešem si hráli s neodymovými magnety a uchvátilo je jejich podivuhodné až magické chování. Pomozte jim zodpovědět několik otázek, s nimiž si při svém okouzlení nevěděli rady.

1. Rozhodněte, zda se dvojice magnetů na obrázcích 1 a 2 budou přitahovat, nebo odpuzovat. Stručně své rozhodnutí zdůvodněte.



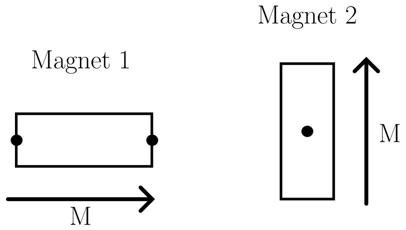
Obr. 1: Obrázek k první podúloze.



Obr. 2: Obrázek k první a třetí podúloze.

2. Představme si dva magnety, jež jsou na počátku umístěny jako na obrázku 3, přičemž magnet 1 je upevněn na obou koncích, magnet 2 je upevněn uprostřed a může se volně otáčet. Slovně popište, jak se bude magnet 2 pohybovat.

3. Vypočítejte, jaká síla bude působit mezi tyčovými magnety na obrázku 2. Uvažujte, že oba magnety jsou stejné. Jejich poloměr je $r = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ a délka $l = 2\,\mathrm{cm}$, jejich magnetizace je $M = 1{,}5\,\mathrm{T}/\mu_0$ a o jejich vzdálenosti $d = 10\,\mathrm{cm}$ předpokládejte, že je mnohem větší než rozměry magnetů.



Obr. 3: Obrázek k druhé podúloze.

Výfučtení: Magické magnety

Magnetická síla je snad nejzvláštnější silou v klasické fyzice. Závisí nejen na pozici elektrického náboje, ale i na rychlosti a směru, kterým se pohybuje. Pohyb náboje je totiž pro vznik magnetického pole klíčový. V tomto Výfučtení se budeme zabývat tím, co si ve spojitosti s magnetickým polem nejčastěji představíme – magnety.

Jak magnety magnetují?

Jak jsme již zmínili, magnetické pole vytvářejí pohybující se elektrické náboje. Se znatelným pohybem nábojů se nejčastěji setkáváme při průtoku elektrického proudu vodičem. Ve vodiči se kvůli přítomnosti elektrického napětí dávají do pohybu volné elektrony, které tvoří elektrický proud. A právě i kolem vodičů s proudem (tedy s pohybujícím se nábojem) se tvoří magnetické pole.

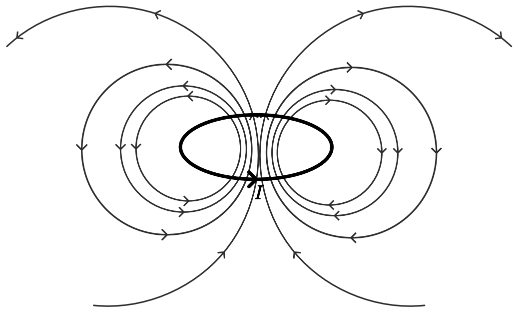
Co má ale toto společného s magnety? I když to tak na první pohled nevypadá, magnetické pole, které vytvářejí magnety, vzniká také díky pohybu elektrického náboje. Ten zde však není zdaleka tak zřejmý jako v případě elektrického proudu ve vodičích. Elektrický náboj se v magnetech totiž pohybuje pouze uvnitř atomů. Dobrou představu o vytváření magnetického pole v atomu získáme, když si atom představíme tak, jak byl popsán v minulém Výfučtení. V tomto modelu atomu obíhají elektrony po kruhových drahách v přesně určených vzdálenostech od jádra. A tento pohyb elektrického náboje je důvodem, proč atomy vytvářejí magnetické pole.

Obíhání elektronu kolem jádra můžeme přibližně popsat, jako by kolem jádra tekl v kruhové smyčce proud. Tato představa samozřejmě není v našem modelu zcela přesná. Elektron se vždy nachází pouze v jednom místě kružnice, zatímco takto budeme v podstatě uvažovat, že jeho náboj je rozmístěný po celé kružnici. Není ovšem ani příliš daleko od pravdy.[1] Kruhová smyčka, kterou teče proud, se často označuje jako *proudová smyčka*.

Siločáry magnetického pole [2], které vytváří proudová smyčka, obtékají drát jako na obrázku 4. Všechny tyto siločáry se zároveň vinou stejným směrem. Této konfiguraci se říká *magnetický dipól*, neboť siločáry mají stejný tvar jako elektrické siločáry soustavy dvou elektrických nábojů s opačným nábojem tzv. *elektrického dipólu*.

[1] Ukazuje se, že pro model atomu uvažující kvantovou mechaniku je toto až překvapivě dobrým přiblížením skutečnosti.

[2] Siločára magnetického pole je pomyslná čára udávající směr, kterým by působila magnetická síla na hypotetický "magnetický náboj" umístěný do daného místa. Více o magnetických nábojích se dozvíte dále v textu.



Obr. 4: Magnetické siločáry v okolí proudové smyčky.

Magnetické pole proudové smyčky bychom si tedy mohli představit jako pole vytvořené dvěma *magnetickými náboji* s opačným znaménkem, které jsou velmi blízko sebe. (Magnetické náboje jsme si zde tedy zavedli tak, že mají stejné vlastnosti jako náboje elektrické.) Tato představa nám umožňuje lépe si představit magnetické pole. Její drobná nevýhoda však spočívá v tom, že magnetické náboje ve skutečnosti (alespoň dle současných teorií) neexistují. To sice neznamená, že jimi při představách a výpočtech nemůžeme proudové smyčky nahrazovat (můžeme o tom přemýšlet jako o jakémsi matematickém triku), je však dobré mít na paměti, že ve skutečnosti tam nejsou.

Magnetický dipól je velmi podobný tomu, co si běžně představíme jako magnet. Má severní pól (v místě, kde si můžeme představit kladný magnetický náboj) a jižní pól (tam, kde by se nacházel záporný magnetický náboj). Náš magnetek je však velmi malý, jelikož jsou oba póly magnetu velmi blízko sebe. Elektron obíhající kolem jádra atomu si představujeme jako proudovou smyčku a tu si zase můžeme představit jako magnetický dipól ("malý magnetek"), proto můžeme i celý atom, kolem něhož vytvářejí obíhající elektrony magnetické pole, chápat jako "malý magnetek".

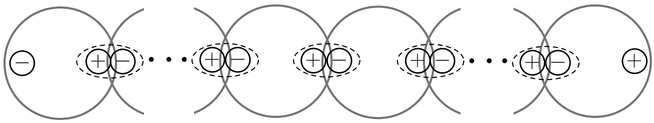
V obyčejném materiálu je atomů („malých magnetků“) spousta.[3] Jelikož jsou ovšem směry, kterými tyto magnetky míří, náhodné, jejich magnetická pole se navzájem téměř vyruší, nic zvláštního tak nepozorujeme. Existuje však speciální druh látek, jsou to tzv. *feromagnetické látky*. Jednotlivé dipóly[4] se v nich mohou volně otáčet a zároveň jsou schopné se navzájem hodně ovlivňovat. Pokud takovouto látku vložíme do vnějšího magnetického pole, dipóly se natočí tak, aby s ním byly rovnoběžné. V tomto tzv. *zmagnetovaném* stavu látka zůstane i po odstranění vnějšího magnetického pole. Nyní, když jsou všechny dipóly natočené stejným směrem, se již jejich pole nevyruší, ale naopak se zesílí, čímž právě vzniká magnet.

Jak ale zjistíme, jak bude výsledné pole vypadat? K tomu nám právě pomůže představa s magnetickými náboji. Představme si atom uvnitř látky. Tedy takový, který je ze všech stran obklopen dalšími atomy. Pokud je látka zmagnetovaná, jsou všechny dipóly natočené stejným směrem, řekněme doprava. To znamená, že když si je představíme jako dvojice kladného a záporného magnetického náboje, bude kladný náboj v atomu vždy více vpravo a záporný více vlevo. Představíme-li si nyní druhý atom látky, který je vpravo od prvního atomu (viz obrá-

[3] Existují i materiály, ve kterých se magnetické pole od obíhajících elektronů navzájem vyruší už uvnitř atomu, tyto materiály se nazývají *diamagnetické*.

[4] Ve feromagnetických látkách jsou dipóly tvořeny tzv. doménami, což jsou shluky atomů, jež jsou stejně orientovány.

zek 5), vidíme, že kladný magnetický náboj prvního atomu se vyruší se záporným nábojem toho druhého. Toto se stane u všech atomů uvnitř látky. Jediné magnetické náboje, které se nevyruší, zbudou na okraji zmagnetované látky. V našem příkladu úplně vpravo kladné a úplně vlevo záporné. Celkem je tak pole magnetu stejné jako pole, které by vzniklo, kdybychom na jeden okraj magnetu umístili jeden kladný bodový magnetický náboj a na druhý záporný bodový magnetický náboj.[5]



Obr. 5: Uspořádání magnetických dipólů v látce.

Jak popsat magnetické pole?

Jak jsme si zatím ukázali, magnety je obvykle možné poměrně dobře popsat jako soustavu dvou magnetických monopólů umístěných na okraji magnetu, neboli magnetický dipól. Otázkou, kterou se tedy budeme zabývat ve zbytku tohoto Výfučtení, je, jak lze tyto dipóly matematicky popsat a jak vyřešit základní fyzikální úlohy, v nichž figurují.

Zásadním poznatkem, který při výpočtech nezbytně potřebujeme, je tzv. *princip superpozice.* Tento princip nám v kontextu magnetického pole říká, že magnetické pole vzniklé působením několika monopólů je stejné jako, kdybychom pole od každého monopólu vypočetli zvlášť a následně je všechny sečetli. Nezapomínejme však, že magnetické monopóly dle žádné z ověřených teorií neexistují, počítat s nimi zvlášť je tak již velká abstrakce. (Vzhledem k tomu, že veličiny charakterizující magnetické pole mají směr, tak slovem "sečetli" zde myslíme vektorový součet. V následujícím textu jsou tyto vektorové veličiny značeny tlustým písmenem.)

Princip superpozice nám umožňuje zabývat se jen tím nejjednodušším případem – polem jednoho monopólu – a dává nám návod, jak využít řešení této jednoduché situace ke spočítání magnetického pole v libovolně složité situaci – stačí nám jen sečíst příspěvky od všech monopólů. [6] Pojďme si tedy ukázat, jak lze vůbec magnetické pole popsat a jak bude vypadat v okolí magnetického monopólu.

Magnetické pole má spoustu analogických vlastností jako pole elektrické, a tak zde narážíme na mnohé podobnosti. Stejně jako lze elektrické pole popsat elektrickou intenzitou $\mathbf{E}$, popisujeme magnetické pole vektorem magnetické indukce $\mathbf{B}$. Elektrická intenzita i magnetická indukce vyjadřují sílu, která působí na jednotkový náboj (elektrický nebo magnetický). (Jelikož je síla vektor, tak jsou vektory i tyto veličiny pole.) Pro elektrické pole platí poměrně známý vztah

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}Q\,,$$

kde Q je běžný elektrický náboj. Analogicky pro magnetické pole získáme

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}\varphi\,, \tag{1}$$

[5] Toto ale platí pouze, pokud se zabýváme polem magnetu v dostatečné vzdálenosti na to, abychom mohli jeho okraje s magnetickým nábojem považovat za body.

[6] Ač to zní velmi jednoduše, při velkém počtu magnetických monopólů (či jejich spojitém rozložení) může začít být situace poměrně rychle početně velmi náročná.

kde jsme tzv. magnetický náboj označili jako φ.

Důvodem, proč se se vztahem (1) téměř nepotkáme, je již mnohokrát zmiňovaný fakt, že magnetické náboje ve skutečnosti neexistují. Jediný způsob, jakým může podle současných teorií magnetické pole vzniknout, je pohybem elektrického náboje. To ovšem ještě neznamená, že tento vztah není užitečný. Jak jsme si ukázali, magnety lze často popsat jako dipól, soustavu dvou monopólů (magnetických nábojů). Zajímá-li nás například síla, která působí mezi dvěma magnety, můžeme ji vypočítat jako součet silových působení mezi dvojicemi magnetických nábojů – i přesto, že ve skutečnosti dává smysl tyto náboje uvažovat pouze jako součásti dipólu. A na tento výpočet právě potřebujeme vztah (1).

Nyní nám již pro to, abychom mohli začít počítat síly mezi magnety, stačí jen zjistit, jak vypadá vztah pro magnetickou indukci **B** vytvářenou magnetickým nábojem. Ten je opět velmi podobný jako pro elektrické pole. Elektrické pole tvořené elektrickým nábojem o velikosti Q můžeme vypočítat pomocí *Coulombova zákona*

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

kde r je vzdálenost od náboje a ε je konstanta nazývaná permitivita, která nás v tomto textu nemusí trápit. Magnetickou indukci **B** vytvořenou magnetickým nábojem φ ve vzdálenosti r od tohoto náboje můžeme analogicky vypočítat jako [7]

$$B = \mu \frac{\varphi}{4\pi r^2}\,. \tag{2}$$

Konstanta μ vyskytující se ve vztahu se nazývá *permeabilita* a udává, jak rychle slábne magnetické pole. Její hodnota pro vakuum se označuje μ_0 a je rovna $\mu_0 = 4\,\pi{\cdot}10^{-7}\mathrm{N{\cdot}A^{-2}}$. Pro jiné prostředí musíme za μ dosadit jinou konstantu. Aby byly tyto konstanty lépe představitelné, obvykle se pro jejich vyjádření používá tzv. relativní permeabilita, která udává, kolikrát má daný materiál vyšší permeabilitu než vakuum. Poté tedy platí, že permeabilitu materiálu μ lze pomocí jeho relativní permeability μ_r určit jako $\mu = \mu_r\mu_0$. Většinou ovšem budeme počítat, že magnety se nacházejí ve vzduchu, jehož relativní permeabilita je velmi blízká jedné, a tak můžeme výpočty provádět stejně jako pro vakuum.

Můžeme si všimnout, že vztahy pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukci jsou totožné až na typ náboje a polohu materiálové konstanty (μ_0 a ε_0). Toho, že se většinou tyto konstanty vyskytují v opačných polohách, si můžeme všimnout i na ostatních vztazích v elektromagnetismu. Je to dáno tím, že mezi μ_0 a ε_0 platí vztah $\mu_0 = 1/\varepsilon_0 \cdot c^2$, kde c je rychlost světla ve vakuu.

Jak se popisují magnety?

Ač nám již toto skutečně stačí k řešení úloh, stále narážíme na to, že se v zadání úloh obvykle nesetkáme s magnetickými náboji (což je opět způsobeno tím, že se jedná o velkou abstrakci, jelikož ve skutečnosti neexistují). Mnohem častěji se setkáme s tím, že je magnet popsán tzv. *dipólovým momentem.* Jak název napovídá, jedná se o veličinu, která dokáže dipól – dvojici magnetických nábojů – charakterizovat jako celek. Pomocí magnetických nábojů ji můžeme definovat jako

$$\mathbf{m} = \varphi\mathbf{l}\,,$$

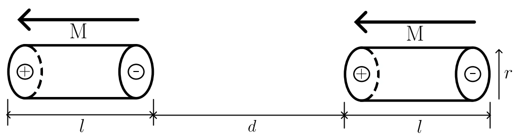
[7] Směr magnetické indukce je pro kladný magnetický náboj od náboje a pro záporný náboj k náboji.

kde $\mathbf{m}$ je právě dipólový moment, $\mathbf{l}$ je vektor délky směřující od záporného náboje ke kladnému a φ je velikost magnetického náboje. (Oba náboje mají stejnou velikost a opačné znaménko, aby byl celkový magnetický náboj nulový.) Všimněme si, že směr dipólového momentu nám říká, kam umístit kladný a kam záporný náboj. Dozvíme-li se ze zadání rozměry magnetu a jeho dipólový moment $\mathbf{m}$, dokážeme si odtud již jednoduše dopočítat velikost magnetických nábojů.

Při počítání přitažlivosti mezi magnety se můžeme také poměrně často setkat s objemovou hustotou dipólového momentu, neboli magnetizací $\mathbf{M}$, která odpovídá dipólovému momentu vztaženému na jednotku objemu. Její výhoda spočívá v tom, že je při daných podmínkách (magnetizace záleží na vnějším poli) charakteristikou materiálu. Známe-li hustotu dipólového momentu $\mathbf{M}$ a objem magnetu V, dipólový moment poté snadno určíme jako $\mathbf{m} = \mathbf{M}V$ (pokud je magnetizace v daném objemu konstantní).

Jak se vypořádat s úlohou?

Zkusme si na závěr vyřešit jednoduchou úlohu, abychom si ukázali, jak můžeme naše poznatky využít pro výpočty. Spočítejme sílu, která působí mezi dvěma stejnými tenkými tyčovými magnety o délce l, poloměru r a hustotou dipólového momentu $\mathbf{M}$, ve vzdálenosti d umístěnými ve vakuu jako na obrázku 6. (Na obrázku jsou již rovnou také zakresleny magnetické náboje.)



Obr. 6: Obrázek k úloze.

Nejprve vypočtěme velikost magnetických nábojů φ. Celkový dipólový moment můžeme vypočítat jako

$$m = MV = M\pi r^2 l\,,$$

velikost magnetických nábojů tedy je

$$\varphi = \frac{m}{l} = M\pi r^2\,.$$

Počítejme nyní, jakou silou působí magnet vlevo na ten vpravo. Síla působící na bližší náboj je součtem sil od obou pólů magnetu, přičemž ta od bližšího pólu je přitažlivá a ta od vzdálenějšího odpudivá. Kombinací vztahů 1 a 2 tedy pro celkovou sílu na tento náboj dostáváme

$$F_1 = \mu_0 \frac{\varphi^2}{4\pi d^2} - \mu_0 \frac{\varphi^2}{4\pi (d+l)^2} = \frac{\mu_0 M^2 \pi r^4}{4} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(d+l)^2} \right)\,.$$

Obdobně můžeme vypočítat sílu působící na vzdálenější magnetický náboj, čímž získáme

$$F_2 = \frac{\mu_0 M^2 \pi r^4}{4} \left(\frac{1}{(d+l)^2} - \frac{1}{(d+2l)^2} \right)\,.$$

Z toho, že náboje s rozdílným znaménkem se přitahují a ty se stejným se odpuzují, můžeme určit, že síla F_1 je přitažlivá a síla F_2 je odpudivá, výsledná působící síla je tedy $F_1 - F_2$. Také vidíme, že $F_1 > F_2$, což nám říká, že se ve výsledku magnety přitahují (to bychom přesně od dvou takto natočených magnetů ze zkušeností ze života čekali).

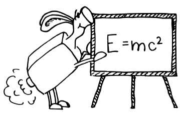
Jaké jsou problémy tohoto popisu?

To, že magnetické náboje ve skutečnosti neexistují, není jediný problém této představy. Již výše jsme zmiňovali, že naše výsledky pro pole vytvářené magnetem platí, pouze pokud pole počítáme v dostatečné vzdálenosti od magnetu. Tomu je tak proto, že pokud se nacházíme blízko u magnetu, tak stěny, na něž umisťujeme magnetické náboje, nemůžeme aproximovat jako body, ale musíme počítat s tím, že magnetické náboje by byly rozmístěné po celé stěně. Správně bychom tedy poté měli využít princip superpozice a sečíst příspěvky k magnetickému poli od každé části náboje, což je početně velmi náročné.

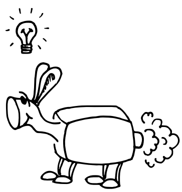
Teoretický popis magnetů je ve skutečnosti velmi náročný nakonec především kvůli tomu, že většina zvláštních jevů, které lze u magnetů pozorovat, je důsledkem částicové povahy látky, a tedy je popsána kvantovou mechanikou, a zároveň samotná existence magnetického pole je důsledkem teorie relativity. Obě dvě teorie jsou velmi složité, z čehož plyne i to, že pochopit chování obyčejného magnetu není vůbec jednoduché. Popis magnetů pomocí magnetických nábojů obchází tyto složitosti tím, že nezkoumá samotný způsob vzniku pole, ale pouze na základě jistých předpokladů vyvozuje, jak bude pole vypadat na makroskopické úrovni. Díky němu tedy nakonec získáváme jednoduchý model, který nám poskytuje poměrně přesné předpovědi pro spoustu situací a umožňuje nám vypořádat se s většinou úloh o magnetech, se kterými se můžeme potkat.

Aleš Opl
`ales@vyfuk.mff.cuni.cz`

Hynek Jakeš
`hynek@vyfuk.mff.cuni.cz`



Řešení IV. série



Úloha IV.1 ... Zaplavená kuchyňka

5 bodů; průměr 4,33; řešilo 15 studentů

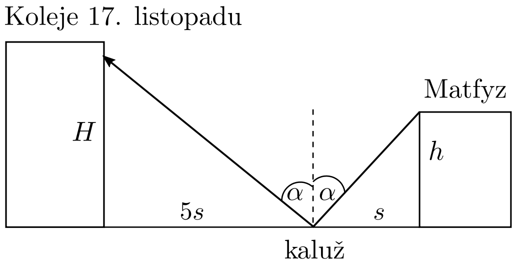
Lubor rád pozoruje Prahu ze svého pokoje. Po deštivém dnu zahlédl ve vzdálené kaluži odraz horního okraje budovy Matfyzu. Spočtěte výšku této budovy, pokud Lubor bydlí v 16. patře kolejí 17. listopadu, každé patro má výšku 3,5 m *a přízemí* 5,5 m*. Lubor měří asi* 2 m *a poměr vzdálenosti mezi kaluží a kolejemi ku vzdálenosti mezi kaluží a Matfyzem je* 5 : 1*. Předpokládejte, že kaluž a přízemí obou budov leží ve stejné nadmořské výšce. Budova má nejdříve přízemí, potom první patro.*

V této úloze vyjdeme ze zákona odrazu, tedy že úhel odrazu je roven úhlu dopadu. Úhlem dopadu rozumíme úhel mezi paprskem, který dopadá na kaluž, a kolmicí k jejímu povrchu (tzv. kolmice dopadu). Úhlem odrazu chápeme úhel mezi paprskem odraženým od kaluže a kolmicí dopadu.

Když tedy Lubor hledí do kaluže, do jeho očí dopadají paprsky, které se cestou od střechy Matfyzu odrazily od kaluže právě směrem k němu. Pokud si situaci zakreslíme (obrázek 7), tak zjistíme, že kaluž, přízemí koleje a Luborovy oči tvoří pravoúhlý trojúhelník. Totéž platí i pro kaluž, přízemí Matfyzu a jeho horní okraj. Tyto trojúhelníky jsou navíc podobné (neboť se zřejmě shodují ve všech úhlech), proto jsou si poměry délek všech tří dvojic odpovídajících si stran rovné, tedy obecně:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}\,,$$

kde a, b, c jsou délky stran jednoho trojúhelníka a A, B, C druhého.



Obr. 7: Odraz paprsků v kaluži

My již velikost tohoto poměru známe ze zadání a činí 5 : 1 (tento poměr odpovídá poměru vzdáleností mezi školou, kaluží a kolejemi). Dále si můžeme dopočítat délku jedné ze stran trojúhelníků, konkrétně výšku Luborových očí nad zemí:

$$H = 5{,}5\,\mathrm{m} + 15 \cdot 3{,}5\,\mathrm{m} + 2{,}0\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}\,.$$

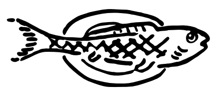
Porovnáme-li tedy výšku Lubora a výšku budovy Matfyzu pomocí podobnosti trojúhelníků, dostáváme:

$$\frac{H}{h} = \frac{5}{1}\,,$$
$$h = \frac{H}{5} = \frac{60\,\mathrm{m}}{5} = 12\,\mathrm{m}\,.$$

Výška budovy Matfyzu tedy činí 12 metrů.

Tomáš Patsch
`patscht@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.2 ... Pravděpodobnost potravy 5 bodů; průměr 4,59; řešilo 58 studentů



Soňa si chce dát k večeři rybu. Podívá se proto, jaké ryby plavou v rybníce. Spatří dlouhé ryby, konkrétně dva lososy, tři kapry, jednoho candáta a tři štiky, i ryby krátké, tedy čtyři pstruhy, dva cejny, tři karasy a jednoho okouna. Soňa však jí jen dlouhé ryby, které se nevejdou na talíř, protože jinak má pocit, že se na ni ryba (i bez hlavičky) stále kouká. Jaká je pravděpodobnost v procentech, že když si Soňa uloví jednu náhodnou rybu, bude si ji chtít dát k večeři?

Pravděpodobnost p nějakého jevu počítáme jako

$$p = \frac{\omega}{\Omega}\,,$$

kde ω je tzv. počet příznivých událostí, tedy těch událostí, jejichž pravděpodobnost počítáme (v našem případě počet dlouhých ryb, kterých je celkem 9) a Ω je počet všech možných událostí, které mohou nastat (počet všech ryb, které Soňa může potenciálně ulovit, tedy 19). Pravděpodobnost chycení dlouhé ryby tedy je:

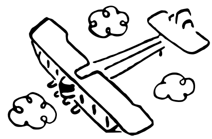
$$p = \frac{9}{19} \doteq 0{,}47\,.$$

Výsledek vyjádřen v procentech je tak přibližně 47 %.

David Chudožilov
chudozilov@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... Fyzici útočí

6 bodů; průměr 5,03; řešilo 39 studentů



V první světové válce kromě obyčejných vojáků bojovalo také velké množství fyziků. Jedním z nich byl například ruský kosmolog Alexander Friedmann, který byl letcem pod carským režimem. Uvažujme, že se Friedmann během Brusilovovy ofenzívy ve svém Murometu jal hrdinně bombardovat německou armádu. V jakém čase t od přeletu ruského zákopu musí vyhodit bomby, aby zasáhl nepřátelskou kavalérii o rychlosti $v_1 = 40\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, která vyrazila ve stejný moment, kdy Friedmann přeletěl zákop ve vzdálenosti $d = 5\,000\,\mathrm{m}$? Letadlo letí ve výšce $h = 3\,000\,\mathrm{m}$ rychlostí $v_2 = 110\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$?

Na počátku je Friedmann od nepřátelské kavalérie vzdálen $d = 5\,\mathrm{km}$. Letí přímo proti ní, proto se jejich vzájemná vzdálenost zmenšuje rychlostí $v_1 + v_2 = 150\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Stejnou rychlostí se budou ve vodorovném směru přibližovat i bomby, jakmile je vypustí. Bombám však potrvá nějaký čas τ, než spadnou na zem, proto je musí Friedmann vypustit ve správný okamžik, aby bomby kavalérii akorát zasáhly. Jelikož se bomby přibližují ke kavalérii rychlostí $v_1 + v_2$, musí pro vodorovnou vzdálenost Friedmanna a kavalérie v okamžiku vypuštění platit:

$$x = (v_1 + v_2) \cdot \tau\,.$$

Dobu τ zvládneme snadno spočítat. Bomby padají z výšky h a pohybují se rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením g (tzn. volný pád), pro nějž platí vztah

$$h = \frac{1}{2} g \tau^2\,.$$

Doba pádu je pak rovna:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Znalost této doby nám umožní spočítat vzájemnou vzdálenost Friedmanna a kavalérie, ve které má Friedmann bomby vypustit. Naše úloha tím však ještě nekončí, neboť máme za úkol spočítat, kdy tento okamžik nastane. Jelikož jsou nepřátelé od sebe na počátku vzdáleni d, tak doba vypuštění bomb musí být taková, aby se za ni Friedmann přiblížil ke kavalérii na vzdálenost x, tedy:

$$d - x = (v_1 + v_2)t\,,$$

$$d - (v_1 + v_2) \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = (v_1 + v_2)t\,,$$

$$t = \frac{d}{v_1 + v_2} - \sqrt{\frac{2h}{g}} = 95\,\mathrm{s}\,.$$

Friedmann tedy musí vypustit bomby přibližně minutu a půl po přeletu ruského zákopu.

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... Dobře vychlazená Kofola 6 bodů; průměr 4,63; řešilo 30 studentů

Viktor chtěl na schůzce organizátorů čepovat Kofolu, ale porouchalo se mu výčepní zařízení. Proto se rozhodl, že si vytvoří improvizované chladicí zařízení z kbelíku s vodou a ledem. Do vědra nalil 5 l ledové vody o teplotě $t_\mathrm{v} = 5\,^\circ\mathrm{C}$ *a* $5\,\mathrm{kg}$ *ledu o teplotě* $t_\mathrm{l} = -15^\circ\mathrm{C}$. *Následně do něj ponořil nápojové vedení a začal točit Kofolu. Kolik Kofoly zvládne natočit, než se obsah kbelíku příliš ohřeje? Uvažujme zjednodušený model, ve kterém zanedbáme všechny tepelné ztráty do okolí. Dále budeme předpokládat, že chlazení bude probíhat do té doby, dokud bude mít obsah kbelíku nižší teplotu než vychlazená Kofola (o teplotě rovněž* $t_\mathrm{v} = 5\,^\circ\mathrm{C}$). *Počítejte s tím, že led se bude průběžně rozpouštět. Počáteční teplota Kofoly je* $t_0 = 25\,^\circ\mathrm{C}$. *Předpokládejte, že Kofola má stejné tepelné vlastnosti jako voda a dohledejte si potřebné konstanty.*

Úlohu budeme řešit přes změny energie v podobě tepla – zamysleme se tedy, jak se energie uvolňuje, spotřebovává a mění. V kbelíku máme nějaké množství vody a ledu a chceme, aby nám tato soustava chladila Kofolu na teplotu, která je rovna teplotě vody v kbelíku. Je tedy zřejmé, že samotná voda v kbelíku se na chlazení vůbec nebude podílet. Budeme tedy chtít vypočítat, kolik energie je potřeba dodat ledu, aby se ohřál na teplotu tání, roztál a následně se ohřál na teplotu vody v kbelíku – toto teplo dodá Kofola, čímž se ochladí. Pro ohřev ledu na teplotu tání bude potřeba teplo

$$Q_1 = m_\mathrm{l} c_\mathrm{l} \Delta t = m c_\mathrm{l} (0\,^\circ\mathrm{C} - t_\mathrm{l})\,,$$

kde $m_\mathrm{l} = 5\,\mathrm{kg}$ je hmotnost ledu, $c_\mathrm{l} = 2\,100\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ je měrná tepelná kapacita ledu, kterou najdeme na internetu nebo v tabulkách, a Δt je změna teploty – v našem případě z původní teploty t_l na teplotu tání. Další část tepla se spotřebuje na roztání ledu. Tuto hodnotu vypočteme jako

$$Q_2 = m_\mathrm{l} \cdot l\,,$$

kde $l = 334\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$ je měrné skupenské teplo tání ledu. Tímto se z ledu stane voda o teplotě $0\,^\circ\mathrm{C}$ – to je stále nižší hodnota než t_v, tedy ještě může přijmout teplo a ochladit tím Kofolu. Teplo Q_3 vypočteme analogicky k teplu Q_1 jako

$$Q_3 = m_\mathrm{l} \cdot c_\mathrm{v} \cdot \Delta t = m_\mathrm{l} \cdot c_\mathrm{v} (t_\mathrm{v} - 0\,^\circ\mathrm{C})\,,$$

kde $c_\mathrm{v} = 4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ je měrná tepelná kapacita vody.

Aby docházelo ke chlazení na požadovanou teplotu, může led přijmout teplo

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = m_\mathrm{l}\left(c_\mathrm{l}(0\,^\circ\mathrm{C} - t_\mathrm{l}) + l + c_\mathrm{v}(t_\mathrm{v} - 0\,^\circ\mathrm{C})\right)\,,$$

které odebere z Kofoly. Teď už jen vypočteme, kolik Kofoly se ochladí na požadovanou teplotu, když jí toto množství tepla odebereme. Kofolu můžeme považovat přibližně za vodu, a tak platí

$$Q = m_\mathrm{K}\cdot c_\mathrm{v}\cdot(t_0 - t_\mathrm{v})\,,$$

čímž získáváme rovnici

$$m_\mathrm{l}\left(c_\mathrm{l}(0\,^\circ\mathrm{C} - t_\mathrm{l}) + l + c_\mathrm{v}(t_\mathrm{v} - 0\,^\circ\mathrm{C})\right) = m_\mathrm{K}\cdot c_\mathrm{v}\cdot(t_0 - t_\mathrm{v})\,.$$

Nyní již jen vyjádříme hledanou hmotnost m_K jako

$$m_\mathrm{K} = \frac{m_\mathrm{l}\left(c_\mathrm{l}(0\,^\circ\mathrm{C} - t_\mathrm{l}) + l + c_\mathrm{v}(t_\mathrm{v} - 0\,^\circ\mathrm{C})\right)}{c_\mathrm{v}\cdot(t_0 - t_\mathrm{v})}\,.$$

Když dosadíme všechny hodnoty, dojdeme k výsledku

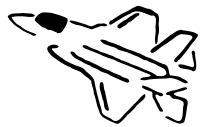
$$m_\mathrm{K} = \frac{5\,\mathrm{kg}\cdot\left(2\,100\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}\cdot 15\,^\circ\mathrm{C} + 334\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}} + 4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}\cdot 5\,^\circ\mathrm{C}\right)}{4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}\cdot 20\,^\circ\mathrm{C}} \doteq 23\,\mathrm{kg}\,.$$

Viktor tedy dovede s improvizovaným zařízením vychladit asi 23 kg Kofoly, což odpovídá přibližně 23 litrům.

Lukáš Linhart
`lukasl@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.5 ... Nebezpečný manévr

7 bodů; průměr 4,85; řešilo 13 studentů



Tom Cruise měl ve filmu Top Gun: Maverick za úkol připravit skupinu mladých vojáků na nebezpečnou misi. Součástí této mise bylo proletět ve stíhačce komplikovaným prostorem v omezeném čase. Let byl náročný i z důvodu velkých zrychlení, která Tom Cruise při letu pociťoval. Při jednom z manévrů napřed ve stíhačce stoupal pod úhlem 45° a poté provedl vertikální otočku o 90° tak, že na konci tohoto manévru klesal pod úhlem 45°. Předpokládejte, že se během otočky stíhačka pohybovala po části kružnice rychlostí $300\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a že celý manévr trval 8 sekund.

1. *Spočítejte velikost maximálního pocitového zrychlení, které Tom Cruise při tomto manévru pociťoval (manévrem rozumíme let stíhačky po zmíněné části kružnice za účelem změny směru letu).*

2. *Porovnejte ho s minimálním pocitovým zrychlením při manévru a určete poměr $a_\mathrm{max}/a_\mathrm{min}$.*

Bonus: Tom Cruise si následně uvědomil, že způsob, kterým otočku provádí (tedy let po části kružnice), není zdaleka optimální. Zkuste se zamyslet nad tím, jaké může být nejmenší možné maximální zrychlení letadla. Následně také určete, po jaké trajektorii se letadlo v takovém případě bude pohybovat. Je to zároveň i trajektorie s nejmenším maximálním pocitovým zrychlením?

Poznámka: Pocitovým zrychlením rozumíme tíhu, kterou naše tělo pociťuje. Tedy například pokud stojíme v klidu na zemi, tak cítíme zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, i když naše tělo nezrychluje. Naopak astronauti na Mezinárodní vesmírné stanici se zrychleným pohybem pohybují, ale cítí stav beztíže.

1. Při manévru opíše Tom Cruise oblouk o středovém úhlu $90\,^\circ$. Celková vzdálenost, kterou při tom urazí, je $s = vt$. Tedy pro poloměr kružnice R máme:

$$\frac{2\pi R}{4} = vt \Rightarrow R = \frac{2vt}{\pi}\,.$$

Dostředivé zrychlení tedy má velikost:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{\pi v}{2t}\,.$$

Nás však zajímá zrychlení, které Tom Cruise pocítí, což je celkové zrychlení v soustavě spojené s Tomem Cruisem. V té na něj působí tíhové zrychlení a odstředivé zrychlení, které má směr normálový ke kružnici. Z geometrie je zřejmé (viz obrázek 8), že vektorový součet těchto dvou bude největší v počátečním nebo koncovém bodě manévru. Jeho velikost můžeme spočítat tak, že si odstředivé zrychlení rozložíme na vertikální složku a_y a horizontální složku a_x. Ty vypočítáme jako [8]

$$a_x = a\cos(45\,^\circ)$$
$$a_y = a\sin(45\,^\circ)\,.$$

Celkové vertikální zrychlení je tedy $a_y - g$ a celkové horizontální a_x. Abychom získali celkovou velikost pocitového zrychlení, stačí nám jen pomocí Pythagorovy věty sečíst jeho vertikální a horizontální složku.[9]

$$a_{\max} = \sqrt{(a_y - g)^2 + a_x^2} = \sqrt{a^2\sin^2(45\,^\circ) - 2ag\sin(45\,^\circ) + g^2 + a^2\cos^2(45\,^\circ)}$$
$$a_{\max} = \sqrt{a^2 + g^2 - \sqrt{2}ag} = \sqrt{\left(\frac{\pi v}{2t}\right)^2 + g^2 - \frac{\sqrt{2}\pi v}{2t}g} = 52{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$

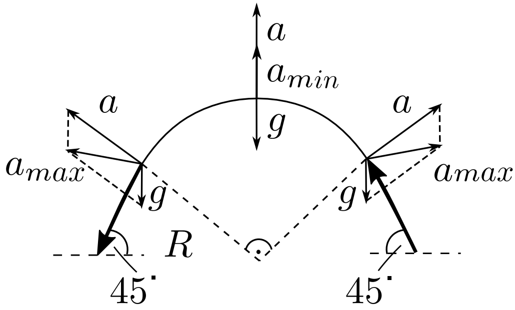
2. Nejmenší zrychlení bude v nejvyšším bodě trajektorie, neboť tam odstředivé zrychlení působí opačným směrem než tíhové (viz obrázek 8):

$$a_{\min} = a - g = \frac{\pi v}{2t} - g = 49{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,$$

a tedy

$$\frac{a_{\max}}{a_{\min}} = 1{,}07\,.$$

[8] Zde nezáleží na tom, u které složky bude $\sin 45\,^\circ$ a $\cos 45\,^\circ$, jelikož jsou stejné.
[9] Ke stejnému výsledku můžeme dospět i s využitím kosinové věty.



Obr. 8: Trajektorie stíhačky.

Bonus

Při tomto manévru se snažíme otočit letadlo ze stoupání pod úhlem 45 ° do klesání pod úhlem 45 ° za 8 sekund. Aby manévr byl co nejefektivnější, průměrné zrychlení musí mít směr změny rychlosti. (Při letu po kružnici se tento směr mění, a tak nemůže být optimální trajektorií.) Změna rychlosti má směr dolů a velikost

$$\Delta v = 2v_y = 2v\cos(45\,°) = \sqrt{2}v \ .$$

Minimální zrychlení je menší nebo rovno průměrnému a maximální zrychlení je větší nebo rovno průměrnému. Aby tedy maximální zrychlení bylo co nejmenší, musí být rovno průměrnému (pokud to situace umožňuje, což v našem případě platí) nebo-li:

$$a_{\max} = \frac{\Delta v}{t} = \frac{\sqrt{2}v}{t} = 53\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Když se letadlo pohybuje s konstantním zrychlením, které míří směrem dolů, je to analogické se šikmým vrhem v tíhovém poli Země. Trajektorií tedy bude parabola.

Pro pociťované zrychlení se opět musíme podívat do soustavy spojené s Tomem Cruisem. Působí na něj setrvačné zrychlení o velikosti $a_{\max}$ směrem nahoru a odečítá se tedy s tíhovým zrychlením, které působí směrem dolů.

Už jsme si ukázali, že na stíhačku při této trajektorii působí nejmenší možné zrychlení. Je tedy jasné, že i pocitové zrychlení bude nejmenší možné.

Hynek Jakeš
`hynek@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.E ... Husté sklo

7 bodů; průměr 4,76; řešilo 25 studentů

Určete hustotu skla pomocí Archimédova zákona. Prázdnou skleněnou nádobu vložte do vody a přilévejte vodu, dokud její hrdlo není na úrovni hladiny. Z objemů skla, sklenice a nalité vody určete hustotu skla.

Přesnost metody porovnejte s dalším způsobem měření hustoty.

Teorie

Hustota je fyzikální veličina udávající hmotnost jednotky objemu dané látky. Můžeme ji měřit přímo (pomocí hustoměru), častěji se však využívá měření nepřímé. Asi nejjednodušší a nejčastější je změření objemu V (pomocí např. odměrného válce) a hmotnosti m a spočítání hustoty pomocí vzorce $\rho = m/V$. My ji však máme měřit jinak – s využitím Archimédova zákona.

Na těleso plovoucí ve vodě (nebo jakékoliv jiné kapalině) působí dvě základní síly: tíhová síla F_G a vztlaková síla vody (kapaliny) F_vz. Tyto dvě síly jsou v případě, že je těleso v klidu, v rovnováze. (Pokud v rovnováze nejsou, těleso se ponoří/vystoupá na hladinu a dojde tak k jejich vyrovnání). My se budeme řídit zadáním. Dojde tak k situaci, kdy v měřené nádobě (v našem případě ve zkumavce) bude nějaké množství vody. Tato soustava pak bude celá plovat v jiné, větší nádobě. Tíhová síla působí na zkumavku i na vodu v ní a můžeme ji vyjádřit jako

$$F_\mathrm{G} = m_\mathrm{S} g + m_\mathrm{V} g\,,$$

kde m_S značí hmotnost prázdné sklenice, m_V hmotnost vody ve sklenici a g tíhové zrychlení (pokud bychom chtěli být přesní, museli bychom započítat i hmotnost vzduchu uvnitř sklenice, ta je však velmi malá, proto ji zanedbáváme). Vztlaková síla závisí na ponořeném objemu celého tělesa, tedy skla i vnitřního objemu zkumavky. Můžeme ji vyjádřit následovně:

$$F_\mathrm{vz} = V_\mathrm{C} \rho_V g\,,$$

kde ρ_V značí hustotu vody a V_C celkový ponořený objem zkumavky. Tyto dvě síly nyní můžeme dát do rovnosti a vztah upravit (za hmotnosti sklenice i vody v ní dosadíme dle vzorce $m = \rho V$):

$$\begin{aligned} m_\mathrm{S} g + m_\mathrm{V} g &= V_\mathrm{C} \rho_V g\,,\\ \rho_\mathrm{S} V_\mathrm{S} + \rho_\mathrm{V} V_\mathrm{V} &= V_\mathrm{C} \rho_V\,,\\ \rho_\mathrm{S} &= \rho_\mathrm{V} \cdot \frac{V_\mathrm{C} - V_\mathrm{V}}{V_\mathrm{S}}\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že ve finálním vzorci nám opravdu figurují jen hustota vody $\rho_V = 0{,}997\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ a tři neznámé objemy, o nichž se mluví v zadání: objem skla zkumavky V_S, objem vody přilité do zkumavky V_V a celkový objem zkumavky V_C (tedy součet V_S a vnitřního objemu zkumavky).

Postup a výsledky měření

Během měření se budeme řídit návodem uvedeným v zadání. Do odměrného válce nalijeme vodu a vložíme do něj malou skleněnou zkumavku. Do ní budeme pipetou postupně přilévat vodu, dokud se okraj zkumavky nedostane do stejné úrovně jako hladina vody ve válci. Hodnoty naměříme pro dvě zkumavky vyrobené ze stejného druhu skla, u každé provedeme 5 měření. Naměřené hodnoty i vypočítané hustoty naleznete v tabulce 1.

Bohužel, zvolené vybavení nebylo pro experiment dobrou volbou. Vnitřní objem zkumavky a množství vody do ní přidané bylo sice změřeno pomocí pipety velice přesně (nejistota 0,05 ml), ale odměrný válec měl stupnici s dílky po 1 ml a měření objemu zkumavky samotné má tak nejistotu desetkrát větší (0,5 ml). To je důvod, proč jsou v tabulce hodnoty, které byly měřeny pomocí odměrného válce (konkrétně V_S a V_C), zaokrouhleny na celé jednotky.

Nyní se podívejme na nejistotu měření. Prováděli jsme nepřímé měření, u něhož se skládají chyby jednotlivých kroků postupu. V našem případě je přesný výpočet chyb poměrně náročný, ale můžeme se pokusit chybu alespoň odhadnout. Představíme si, že při měření objemu se jeho

menší zkumavka				větší zkumavka			
$\frac{V_\mathrm{V}}{\mathrm{ml}}$	$\frac{V_\mathrm{S}}{\mathrm{ml}}$	$\frac{V_\mathrm{C}}{\mathrm{ml}}$	$\frac{\rho_\mathrm{S}}{\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}}$	$\frac{V_\mathrm{V}}{\mathrm{ml}}$	$\frac{V_\mathrm{S}}{\mathrm{ml}}$	$\frac{V_\mathrm{C}}{\mathrm{ml}}$	$\frac{\rho_\mathrm{S}}{\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}}$
1,8	5	15	2,63	2,6	6	19	2,73
1,7	5	15	2,65	2,7	6	19	2,70
1,8	5	15	2,63	2,7	6	19	2,70
1,9	5	15	2,61	2,6	6	19	2,73
1,7	5	15	2,65	2,8	6	19	2,69

Tab. 1: Naměřené hodnoty objemů a z nich vypočtené hustoty skla

skutečná hodnota nacházela v intervalu $[V - \sigma_V, V + \sigma_V]$, kde V je naměřená hodnota a σ_V je její nejistota. Chybu hustoty poté odhadneme tak, že vypočítáme nejmenší a největší možnou hodnotu, které by mohla nabývat, pokud se hodnoty objemů nachází ve zmíněných intervalech.[10]

Zjišťovali jsme tři různé objemy (zkumavky samotné, její vnitřní objem a množství přilité vody), pomocí nichž jsme následně vypočítali hustotu. Chyby způsobené při měření pomocí pipety jsou zanedbatelné oproti chybě, ke které došlo při použití odměrného válce, jejíž hodnota činí 0,5 ml, což je tedy chyba u veličin V_C a V_S. Pro menší zkumavku tedy budeme předpokládat, že V_C je v intervalu $[14{,}5\,\mathrm{ml}, 15{,}5\,\mathrm{ml}]$ a V_S v intervalu $[4{,}5\,\mathrm{ml}, 5{,}5\,\mathrm{ml}]$. Jak vidíme, hustota bude nejmenší při dosazení hodnot $V_\mathrm{C} = 14{,}5\,\mathrm{ml}$ a $V_\mathrm{S} = 5{,}5\,\mathrm{ml}$ (za V_V dosadíme průměrnou hodnotu), čímž získáme hodnotu $2{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$, a největší při dosazení hodnot $V_\mathrm{C} = 15{,}5\,\mathrm{ml}$ a $V_\mathrm{S} = 4{,}5\,\mathrm{ml}$, čímž získáme hodnotu $3{,}0\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Z toho tedy můžeme odhadnout, že nejistota hustoty je polovina rozdílu těchto hodnot, tedy $0{,}35\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Při zaokrouhlení nejistoty na jedno desetinné místo a použití průměru vypočtených hustot dostaneme výsledek

$$\rho_\mathrm{S} = (2{,}6 \pm 0{,}4)\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}\,.$$

Podobně můžeme postupovat i u větší zkumavky, čímž dospějeme k výsledku

$$\rho_\mathrm{S} = (2{,}7 \pm 0{,}3)\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}\,.$$

Všimněme si, že hustota skla u větší zkumavky nám vychází mírně vyšší, než je tomu u zkumavky menší. Mohlo by se zdát, že nejsou vyrobené ze stejného druhu skla, pravděpodobnější však je, že rozdílné výsledky jsou způsobeny nepřesností měření (koneckonců intervaly, které nám vymezují chyby, mají celkem velký průnik, proto můžeme říci, že se v rámci chyb obě hodnoty shodují). Pokud si zkusíme vyhledat hustotu skla na internetu, obvykle najdeme hodnotu $2{,}5\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. V tomto případě je pravděpodobně správně, že hodnoty nám vyšly o něco vyšší – objektem našeho zkoumání byly chemické zkumavky, které nejsou vyráběny z klasického skla. Vyšší hustotu v tomto případě tedy lze snadno odůvodnit.

Jiný způsob měření

Podle zadání bychom měli porovnat přesnost měření této metody s jiným postupem. Ke srovnání jsme zvolili postup zmíněný již v úvodu tohoto vzorového řešení – výpočet pomocí definičního

typ zkumavky	$\frac{m}{\mathrm{g}}$	$\frac{V}{\mathrm{ml}}$	$\frac{\rho}{\mathrm{g\cdot cm^{-3}}}$
menší	12,6	5	2,52
větší	15,4	6	2,57

Tab. 2: Naměřené hodnoty hustoty skla – měření pomocí hmotnosti

vzorce pro hustotu $\rho = m/V$. Obě zkumavky jsme zvážili malou kapesní váhou s přesností na desetiny gramu, objem skla jsme již změřený měli z předchozí části s přesností na mililitry.

A jaká bude nejistota měření v tomto případě? K jejímu spočítání využijeme vzorec pro zjištění celkové nejistoty při násobení/dělení:

$$\frac{u_\rho}{\rho} = \frac{u_m}{m} + \frac{u_V}{V}\,,$$

kde ρ, m, V jsou naměřené a spočítané hodnoty hustoty, hmotnosti a objemu a u_ρ, u_m, u_V jsou nejistoty jednotlivých veličin. Dosazením získáme celkovou nejistotu a můžeme zapsat výsledky pro zkumavku menší (index m) i větší (index v):

$$\rho_\mathrm{m} = (2{,}5 \pm 0{,}3)\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}\,,$$
$$\rho_\mathrm{v} = (2{,}6 \pm 0{,}2)\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}\,.$$

Závěr

Dvěma různými způsoby se nám povedlo změřit hustotu skla. Všechny výsledky se pohybují okolo hodnoty $2{,}6\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Relativní nejistota měření se pohybuje mezi 8 % a 16 %. Největší chyby byly způsobeny nevhodným vybavením (nedostatečně přesný odměrný válec) a lidskou chybou (odhadnutí momentu, kdy je okraj zkumavky na hladině vody).

Veronika Bartáková
vercab@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.V ... Pod drobnohledem

7 bodů; průměr 4,23; řešilo 13 studentů

Výfuček se jako nadšený astronom jednoho jasného dne rozhodl vytvořit si vlastní dalekohled. Rozhodl se pro Newtonův typ, jelikož mu čočkové dalekohledy přišly na konstrukci moc jednoduché. Při výrobě si však zapomněl poznamenat všechny parametry dalekohledu. Jediné, na co si vzpomněl, byl zorný úhel okuláru fov = 50 ° a světelnost $f/5$ (tedy $S = 1/5$). Výfuček však nechtěl odbíhat od pozorování pro pravítko, a proto se rozhodl chybějící údaje změřit pozorováním noční oblohy.

1. *Nejprve namířil dalekohled na nebeský rovník. Pozorované pole zcela zmizelo za* $\Delta t = 1\,\mathrm{min}$. *Jaké je zvětšení dalekohledu?*

[10] Vzhledem k tomu, že chyby ve skutečnosti pouze vymezují oblasti, ve kterých se hodnoty nachází s určitou pravděpodobností, tak tento přístup není zcela správný. Dává nám ovšem dobrý odhad velikosti chyby.

2. *Poté spatřil dvojhvězdu, která se v dalekohledu již téměř jevila jako jeden samostatný zdroj světla. Vyhledal si, že skutečná úhlová vzdálenost obou složek dvojhvězdy je* $\alpha = 0{,}35''$. *Z doposud známých údajů určete průměr a ohniskovou vzdálenost objektivu a ohniskovou vzdálenost okuláru.*
3. *Výfučka dvojhvězda natolik zaujala, že se ji rozhodl vyfotit. Jakou největší velikost může mít strana jednoho pixelu kamery (pixely mají tvar čtverce), aby bylo na fotografii možné rozpoznat jednotlivé složky dvojhvězdy? Kamera je nejcitlivější klasicky v části spektra odpovídající viditelnému světlu.*

1. Čas, za který nám obraz pozorovaný v dalekohledu zmizí z okuláru, úzce souvisí se zorným polem dalekohledu. To můžeme vyjádřit dvěma způsoby:

$$\mathrm{FOV} = \Delta t \cdot \omega = \frac{\mathrm{fov}}{\gamma}\,,$$

kde ω je úhlová rychlost rotace Země (tedy úhlová rychlost pohybu oblohy) a γ je hledané zvětšení dalekohledu. Vyjádříme si jej tedy:

$$\gamma = \frac{\mathrm{fov}}{\Delta t \omega}\,.$$

Úhlovou rychlost ω ještě musíme vyjádřit:

$$\gamma = \frac{\mathrm{fov}}{\Delta t}\frac{23\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{min}}{360\,^\circ} = \frac{50\,^\circ \cdot 1\,436\,\mathrm{min}}{360\,^\circ \cdot 1\,\mathrm{min}} \doteq 200\,.$$

Výfuček tedy pozoruje objekty 200krát zvětšené oproti pozorování pouhým okem.

2. Jestliže Výfuček ještě sotva rozliší oba objekty, můžeme jejich úhlovou vzdálenost považovat za rozlišovací schopnost. Kdyby si hvězdy byly byť jen o trochu blíž, Výfuček už by je od sebe nemohl rozeznat a splynuly by v jeden jediný světelný bod. Pro rozlišovací schopnost platí (pokud předpokládáme, že Výfuček je citlivý na viditelné světlo stejně jako my):

$$\Theta = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{180\,^\circ}{\pi} = \alpha\,,$$

z čehož získáme:

$$D = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{180\,^\circ}{\pi} = 1{,}22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \cdot 3\,600''}{0{,}35'' \cdot 1^\circ} \cdot \frac{180\,^\circ}{\pi} \doteq 0{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

Ze světelnosti dalekohledu si pak snadno odvodíme ohniskovou vzdálenost objektivu:

$$S = \frac{D}{f_1}$$

$$f_1 = \frac{D}{S} = 5 \cdot 0{,}4\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}\,.$$

Ze zvětšení následně získáme i ohniskovou vzdálenost okuláru

$$\gamma = \frac{f_1}{f_2}\,,$$

$$f_2 = \frac{f_1}{\gamma} = \frac{2\,\mathrm{m}}{200} = 10\,\mathrm{mm}\,.$$

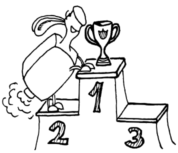
3. Úhel, který dopadá na jeden pixel, by měl odpovídat již zmíněné rozlišovací schopnosti, čili $\Theta = 0{,}35''$. Tento úhel můžeme také vyjádřit jako FOV jednoho pixelu, platí tedy vztah:

$$\Theta = \frac{x}{f_1} \cdot \frac{180\,^\circ}{\pi}$$

$$x = \Theta f_1 \cdot \frac{\pi}{180\,^\circ} = \frac{0{,}35\,^\circ}{3\,600} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot \frac{\pi}{180\,^\circ} \doteq 3{,}4\,\mu\mathrm{m}\,,$$

kde jsme využili toho, že $1''$ odpovídá $1\,^\circ/3600$. Náš výsledek přibližně odpovídá velikostem pixelů čipů dnešních klasických fotoaparátů. Dvojhvězdu bychom však v nejlepším případě mohli vyfotit jako dva jasné pixely vedle sebe. O menších pixelech a tím pádem větším rozlišení ale již v tomto případě nemá cenu uvažovat, jelikož výsledný obraz bude stále limitován rozlišovací schopností dalekohledu.

Tomáš Patsch
patscht@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
1.	*Vojtěch Reif*	ZŠ u sv. Štěpána Praha 2	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**51**
2.	*Jan Foldyna*	Anglofonní základní škola, z. ú.	5	5	6	–	–	–	–	**16**	**44**
3.	*Valentýna Sochorová*	G, Olomouc-Hejčín	5	0	5	–	–	–	–	**10**	**38**
4.	*Jakub Chum*	G Nad Štolou, Praha	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**35**
5.	*Agáta Húšťavová*	European School Luxembourg II	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**21**
6.	*Tomáš Rataj*	ZŠ Stupkova, Olomouc	2	–	–	–	–	–	–	**2**	**16**
7.	*Antonín Papoušek*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**11**
8.	*Filip Němec*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**3**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
1.	*Matěj Křivánek*	ZŠ T. G. M. Mor. Budějovice	4	5	6	6	–	5	–	**26**	**109**
2.	*Adam Houdek*	ZŠ a MŠ , Březová	5	3	6	4	7	6	2	**33**	**106**
3.	*Bartoloměj Stoklásek*	ZŠ Troubelice	4	5	6	6	–	–	–	**21**	**75**
4.	*Květa Bouchalová*	G, Olomouc-Hejčín	5	4	6	6	–	–	–	**21**	**73**
5.	*Antonín Střída*	ZŠ a MŠ Lutín	5	5	6	–	–	6	–	**22**	**67**
6.	*Matěj Ondrušek*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	4	3	0	–	–	–	–	**7**	**62**
7.	*Jáchym Turner*	G J. Vrchlického, Klatovy	5	5	4	0	–	–	–	**14**	**59**
8.	*Emma Burešová*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**39**
9.	*Eliška Knopfová*	ZŠ J. A. Komenského Hradec Králo	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**35**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
10.–11.	*Šimon Novák*	Nový PORG, Praha	5	5	5	–	–	–	–	**15**	**34**
10.–11.	*Daniel Strašil*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**34**
12.	*Hana Bayerová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	–	–	–	–	–	–	–	**33**
13.	*Jáchym Šleška*	ZŠ Haškova, Uničov	–	–	–	–	–	–	–	–	**32**
14.	*Klára Zíková*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	**31**
15.	*Klára Valentová*	ZŠ Hálkova, Olomouc	–	3	–	–	–	–	–	**3**	**29**
16.	*Dmitrij Petreckyj*	Fakultní ZŠŠ PedF UK Praha 5 - S	3	5	–	–	–	–	–	**8**	**26**
17.–19.	*Matyáš Churavý*	EKO G, Brno	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**20**
17.–19.	*Tereza Strašilová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
17.–19.	*Matylda Svobodová*	ZŠ Novoměstská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
20.	*Kateřina Zubálová*	ZŠ Stupkova, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
21.	*Sofie Desnicová*	G, Litovel	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
22.	*Martin Maláč*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
23.–26.	*Mikuláš Glozar*	ZŠ Masarova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
23.–26.	*Erik Hojgr*	ZŠ Hálkova, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
23.–26.	*Lukáš Lizúch*	Masarykovo G, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
23.–26.	*Alexandra Sochorová*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
27.	*Beáta Mudráková*	ZŠ a MŠ Husova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
28.	*Matěj Illner*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
29.–30.	*Sari Attar*	ZŠ a MŠ Praha 5 - Hlubočepy	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
29.–30.	*Ondřej Kulhánek*	FZŠ prof. O. Chlupa, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
31.	*Marek Šoltés*	ZŠ Svážná, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
32.	*Sofia Husáková*	Soukromá ZŠ UNIVERZUM s.r.o. Pra	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
33.	*Josef Povolný*	ZŠ Školní ul., Hrádek nad Nisou	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
1.–2.	*Jana Feldbabelová*	ZŠ Jemnice	–	5	–	6	–	6	–	**17**	**124**
1.–2.	*Max Menčík*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**124**
3.	*Sámo Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	6	6	4	**33**	**121**
4.–5.	*Petr Barták*	Slovanské G, Olomouc	–	5	–	–	–	2	–	**7**	**66**
4.–5.	*Dominik Kudr*	ZŠ a MŠ Studenec	–	5	6	5	–	–	–	**16**	**66**
6.	*Juraj Štefina*	ZŠ sv. Margity Púchov	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**58**
7.	*Filip Borkovec*	G, Křenová, Brno	–	5	5	–	–	3	–	**13**	**55**
8.	*Matěj Knop*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	6	6	–	3	–	**19**	**54**
9.	*Patrik Piňos*	ZŠ Gajdošova, Brno	–	5	3	–	–	3	–	**11**	**51**
10.	*Aneta Mičulková*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	–	5	–	–	–	**10**	**49**
11.	*Josef Eliáš Formánek*	G, Křenová, Brno	–	5	5	6	–	4	–	**20**	**41**
12.	*Ondřej Bohatý*	G Opatov, Praha	–	5	6	6	7	–	–	**24**	**40**
13.	*Josef Turek*	G, Šumperk	–	5	6	–	–	4	–	**15**	**39**
14.	*Julie Krčmařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	2	2	–	–	–	**9**	**36**
15.–16.	*Zuzana Kýrová*	ZŠ nám. Svornosti, Brno	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**27**
15.–16.	*Alžběta Sochorová*	G, Blovice	–	5	–	3	–	–	–	**8**	**27**
17.–19.	*Filip Andráši*	G, Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
17.–19.	*Tomáš Čanda*	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
17.–19.	*Kateřina Hujová*	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
20.–21.	*Karolína Kačalková*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**25**
20.–21.	*Magdaléna Křížová*	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	–	–	–	–	–	–	–	–	**25**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
22.–23.	*Aleš Antoň*	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
22.–23.	*Adam Jurtík*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
24.	*Štěpán Zajačik*	ZŠ Školní, Chomutov	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
25.–26.	*Matěj Purkert*	G, Písnická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
25.–26.	*Linda Rokosová*	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
27.–28.	*Michaela Chovancová*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
27.–28.	*Lucie Kohoutková*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
29.–30.	*Lukáš Hobza*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
29.–30.	*Renata Petlanová*	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
31.	*Filip Procházka*	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
32.–33.	*Vít Foltas*	ZŠ a MŠ Spálov	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**14**
32.–33.	*Patrik Hrebinec*	ZŠ Na Příkopech, Chomutov	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
34.–37.	*Marek Petlan*	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
34.–37.	*Erik Rössler*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
34.–37.	*Tereza Vargová*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
34.–37.	*Timotej Vašina*	ZŠ a MŠ Praha 6 - Dejvice	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
38.	*Šimon Václavík*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
39.	*Valerie Labuťová*	G, Nový Bydžov	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**10**
40.	*Jakub Brázda*	ZŠ Politických vězňů, Slaný	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
41.–44.	*Tomáš Dolanský*	G Týn nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
41.–44.	*Marína Kiliánová*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
41.–44.	*Eva Kundratová*	ZŠ Komenského II Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
41.–44.	*Jiří Zakuťanský*	G, Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
45.	*Lukáš Kulhánek*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	**2**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
1.	*Matej Karpáč*	ZŠ Jána Švermu	–	5	6	5	7	5	6	**34**	**131**
2.	*Kamilo Tomáš*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	5	7	5	7	**35**	**122**
3.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	4	–	4	**25**	**109**
4.	*Alena Mouchová*	G, Český Krumlov	–	3	5	2	1	4	0	**15**	**97**
5.	*Matěj Šebesta*	Masarykovo G, Vsetín	–	5	5	3	2	6	5	**26**	**93**
6.	*Ondřej Porod*	G Týn nad Vltavou	–	5	6	–	5	6	2	**24**	**89**
7.	*Martin Vagner*	G, Voděradská, Praha	–	5	6	5	–	–	5	**21**	**86**
8.–9.	*Monika Dlouhá*	G Matyáše Lercha, Brno	–	5	5	2	3	4	–	**19**	**82**
8.–9.	*Natálie Lászlóová*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	4	4	–	4	3	**20**	**82**
10.	*Martin Motyčka*	ZŠ Nad Vodovodem, Praha 10	–	5	6	5	4	6	5	**31**	**80**
11.	*Michaela Urbanová*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	5	3	–	–	–	**13**	**68**
12.	*Denis Peťka*	G J. Škody, Přerov	–	5	–	–	–	5	–	**10**	**62**
13.	*Marek Opluštil*	G, Litovel	–	5	6	6	3	–	–	**20**	**58**
14.	*David Laušman*	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**54**
15.	*Lucie Endlová*	G O. Havlové, Ostrava	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**52**
16.	*Filip Groh*	ZŠ Liberec 10	–	–	–	–	–	–	–	–	**50**
17.	*Petra Prknová*	ZŠ Jemnice	–	5	–	–	–	6	–	**11**	**49**
18.–19.	*Vít Kubal*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**46**
18.–19.	*Tereza Kubínová*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**46**
20.	*Filip Gašparín*	Wichterlovo G, Ostrava	–	4	6	–	–	4	–	**14**	**44**
21.–22.	*Vojtěch Černý*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**41**
21.–22.	*Jan Motlík*	G Opatov, Praha	–	5	5	6	–	–	–	**16**	**41**
23.	*Antonín Plašil*	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	**40**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
24.	*Klaudie Zemene*	G a ZUŠ, Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	–	**39**
25.	*Kristýna Otevřelová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	–	–	–	–	–	–	–	**37**
26.	*Ondřej Kočur*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**35**
27.	*Michael Ambros*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	**34**
28.–29.	*Jan Hrubec*	OPEN GATE Říčany	–	–	–	–	–	–	–	–	**33**
28.–29.	*Ondřej Zapletal*	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	4	5	–	–	–	–	**9**	**33**
30.–32.	*Mikuláš Hořenek*	Wichterlovo G, Ostrava	–	4	5	5	–	7	5	**26**	**32**
30.–32.	*Jana Pohořilská*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**32**
30.–32.	*Vlasta Suchá*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	**32**
33.	*Natálie Jochová*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**31**
34.–35.	*Anežka Krčmová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
34.–35.	*David Manhalter*	EKO G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
36.–39.	*Adam Cieślar*	ZŠ Divišov	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
36.–39.	*Jana Fišerová*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
36.–39.	*Ondřej Pavelka*	ZŠ a MŠ Pňovice, Litovel	–	5	2	3	–	2	–	**12**	**26**
36.–39.	*Pavel Zachariáš*	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
40.–41.	*Klára Hašová*	G, Křenová, Brno	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**25**
40.–41.	*Ondřej Rejman*	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	–	–	–	–	–	–	–	**25**
42.	*Leonard Lindvay*	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
43.–45.	*Max Denemarek*	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
43.–45.	*Pavlína Jurásková*	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
43.–45.	*Šimon Klousek*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
46.	*Martin Landík*	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
47.–50.	*Vojtěch Kužílek*	ZŠ Heyrovského, Olomouc	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**16**
47.–50.	*Nicol Plšková*	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
47.–50.	*Petra Šilerová*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
47.–50.	*Vítek Vácha*	ZŠ a MŠ Wolkerova, Havl. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
51.	*Natálie Manoušková*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
52.–56.	*Šimon Hanák*	Cyrilomet. G a SOŠ pg., Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
52.–56.	*Kevin Nguyen*	ZŠ Chomutovská, Kadaň	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**14**
52.–56.	*Jakub Štěpánek*	ZŠ Nad Vodovodem, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
52.–56.	*Petr Vaško*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
52.–56.	*Julie Vlčanová*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
57.	*Josef Hugo Holub*	ZŠ Gajdošova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
58.	*Jan Herzig*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
59.	*Julie Svobodová*	ZŠ Chomutovská, Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
60.	*Ema Vondráčková*	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
61.	*Barbora Barnatová*	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
62.–63.	*Lenka Hromádková*	G, Hlinsko	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
62.–63.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
64.	*Marek Hromada*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
65.–66.	*Marie Steinhauserová*	ZŠ Strmilov	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**
65.–66.	*Šimon Tureček*	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**
67.	*Štěpán Železný*	ZŠ Hamry, Brno	–	0	0	–	–	–	–	**0**	**1**
68.–69.	*Mikoláš Palouda*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**0**
68.–69.	*Štěpán Petr*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**0**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

/ksvyfuk ***@ksvyfuk***

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.