Úloha V.5 ... Jáma a kyvadlo

7 bodů; průměr 5,92; řešilo 12 studentů

Malý Edgar si hrál s kuličkami různých hmotností. Našel jamku o hloubce $h = 15\,\mathrm{cm}$ *a umístil do ní kyvadélko s délkou závěsu* $l = 20\,\mathrm{cm}$*, které se v jamce může volně kývat tak, že se ve svém nejnižším bodě nachází těsně nad dnem jamky. Na kyvadélko připevnil kuličku o hmotnosti* $m = 10\,\mathrm{g}$*, vychýlil ho o úhel* $90\,^\circ$ *a nechal tuto kývající se kuličku narážet do kuliček, které položil na dno jamky.*

1. *Napřed pod kyvadélko umístil kuličku o stejné hmotnosti* m*, vychýlil kyvadélko o úhel* $90\,^\circ$ *a pustil kuličku. Tato kulička se pak v nejnižším bodě své trajektorie dokonale pružně srazila s kuličkou na zemi.*

   Jakou rychlostí se bude nepřipevněná kulička pohybovat v okamžiku těsně po srážce? Stačí jí tato rychlost na to, aby unikla z jamky?

2. *Poté Edgar pod kyvadélko umístil kuličku s dvakrát větší hmotností. Unikne z jamky tato kulička? Pokud ne, kam nejvýše se dostane?*

3. *Co se stane, pokud Edgar na kuličku z předchozí úlohy připevní nehmotnou plastelínu, která zajistí, že se kuličky při srážce k sobě dokonale přilepí? Jaká bude nyní rychlost kuliček po srážce?*

V celé úloze předpokládejte, že se po srážce kuličky pohybují stále po stejné přímce a zanedbejte všechny odporové síly.

1. Abychom správně popsali situaci v době pružné srážky, musíme uvážit jak zákon zachování energie (dále jen ZZE), tak i zákon zachování hybnosti (ZZH). Víme, že kulička na provázku má ve výšce l (ve vychýlené pozici na kyvadle) potenciální energii $E_\mathrm{p} = m_1 g l$, kde m_1 je její hmotnost, g tíhové zrychlení a l délka závěsu. Ve svém nejnižším bodě, tedy v době srážky, se veškerá její energie přemění na kinetickou energii.

   Nyní je dobré položit si otázku, jaká část této energie se předá volné kuličce. To zjistíme tak, že aplikujeme ZZE a zároveň i ZZH. Začněme zachováním energie. Celá srážka probíhá v nejnižším bodě, kde všechny kuličky mají nulovou potenciální energii. Zároveň je volná kulička v klidu, takže před srážkou je jediným nositelem mechanické energie kulička na provázku, která má pouze kinetickou energii $m_1 u^2/2$. Řekněme, že po srážce bude mít kulička na provázku rychlost v_1 a volná kulička rychlost v_2. Kinetická energie kuličky na provázku se během srážky rozdělí na kinetické energie obou kuliček.

   $$\frac{1}{2} m_1 u^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

   Pro obecnost jsme označili hmotnost druhé kuličky jako m_2 (obecný výsledek se nám bude hodit v dalších částech úlohy). Rovnici výše můžeme celou vynásobit dvěma.

   $$m_1 u^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

   V této chvíli se přesuneme k popisu zachování hybnosti. Podobně jako energie se i hybnost první kuličky během srážky rozdělí na hybnosti kuliček. Tento fakt můžeme zapsat takto:

   $$m_1 u = m_1 v_1 + m_2 v_2\,.$$

Abychom se dostali k výsledku, musíme vyřešit soustavu rovnic. Jako nejvhodnější metoda se jeví dosazovací, pokud si z druhé rovnice vyjádříme např. v_1

$$v_1 = u - \frac{m_2}{m_1} v_2$$

a dosadíme do první.

$$\begin{aligned}
m_1 u^2 &= m_1 \left(u - \frac{m_2}{m_1} v_2\right)^2 + m_2 v_2^2 \\
m_1 u^2 &= m_1 \left(u^2 - 2\frac{m_2}{m_1} u v_2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2^2\right) + m_2 v_2^2 \\
2 u v_2 &= \frac{m_2}{m_1} v_2^2 + v_2^2 \\
2 u v_2 &= \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) v_2^2
\end{aligned}$$

Již teď vidíme, že jedno z řešení této kvadratické rovnice je $v_2 = 0$. To odpovídá situaci, kdy by se kuličky minuly, což pro nás nemá smysl, protože víme, že se srazí, a druhá kulička se tedy rozpohybuje (naše rovnice totiž „neví“, že počítáme srážku, proto nám dají i řešení, kde se rychlost obou kuliček nezmění). Musíme tedy hledat druhé řešení.

$$\begin{aligned}
2u &= \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) v_2 \\
v_2 &= \frac{2u}{\frac{m_2}{m_1} + 1}
\end{aligned}$$

Ke zjištění v_1 lze využít vzorec pro v_1 uvedený výše a dosadit do něj spočtenou hodnotu v_2.

$$v_1 = u - \frac{m_2}{m_1} v_2 = u - \frac{m_2}{m_1} \frac{2u}{\frac{m_2}{m_1} + 1} = u - \frac{2u}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

Tímto jsme si odvodili obecné vztahy pro srážku kuličky s rychlostí u s kuličkou v klidu:

$$\begin{aligned}
v_1 &= u - \frac{2u}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\,, \\
v_2 &= \frac{2u}{\frac{m_2}{m_1} + 1}\,,
\end{aligned}$$

které budeme v řešení následujících úloh používat. V této podúloze máme zadáno, že kuličky jsou stejně hmotné, tedy $m_1 = m_2 = m$. Po dosazení těchto hmotností zjistíme, že $v_1 = 0$ a $v_2 = u$. Nastane tak zajímavá situace. Kulička na provázku se při srážce zastaví a druhá kulička vyrazí z místa srážky právě takovou rychlostí, se kterou do ní první kulička narazila. Ze ZZE víme, že kinetická energie, kterou druhá kulička převezme, bude rovna původní energii první kuličky, tj. její počáteční potenciální energii.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} m v_2^2 &= mgl \\
v_2 &= \sqrt{2gl}
\end{aligned}$$

A máme spočtenou rychlost, kterou se druhá kulička na dně jamky bude pohybovat. Po dosazení hodnot vychází $v_2 \doteq 1{,}98\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Dostane se tak kulička z jamky? Ano, kulička může vystoupat právě do výšky l, jelikož převzala všechnu potenciální energii první kuličky. Tato energie se promítne do potenciální enegie druhé kuličky v její maximální výšce a díky tomu, že mají kuličky stejnou hmotnost, bude i tato maximální výška rovna délce závěsu. Délka závěsu je větší než hloubka jamky, kulička se tedy z jamky hravě dostane.

2. V této podúloze máme podobnou situaci jako v první, nicméně s tou změnou, že hmotnost druhé kuličky je nyní dvojnásobná, $m_2 = 2m_1$. K našemu štěstí můžeme spočítat výslednou rychlost druhé kuličky z již výše odvozených vzorců. Stačí, abychom za m_2 dosadili $2m_1$, a získáme:

$$v_2 = \frac{2u}{\frac{m_2}{m_1} + 1} = \frac{2u}{\frac{2m_1}{m_1} + 1} = \frac{2u}{2+1} = \frac{2}{3}u\,.$$

Již víme, čemu je rovna rychlost nárazu první kuličky u.

$$u = \sqrt{2gl}$$

Po dosazení u do výsledků dostaneme

$$v_2 = \frac{2\sqrt{2gl}}{3} \doteq 1{,}32\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Je nám tedy jasné, že první kulička se odrazí opačným směrem než druhá kulička a „ukradne“ tak část energie 2. kuličce.

Při stoupání po stěně jamky se bude kinetická energie 2. kuličky přeměňovat na potenciální energii.

$$\frac{1}{2}m_2 v_2^2 = m_2 g h$$

$$\frac{m_2 v_2^2}{2m_2 g} = h$$

Za v_2 dosadíme náš výsledek, hmotnosti m_2 se nám pokrátí.

$$h = \frac{1}{2g}\frac{4\cdot 2gl}{9}$$

$$h = \frac{4}{9}l$$

$$h \doteq 0{,}09\,\mathrm{m} = 9\,\mathrm{cm}$$

Kulička se tedy z jamky nedostane.

3. V tomto příkladu nemůžeme použít zákon zachování mechanické energie, neboť nějaká část energie se při „připlácnutí“ kuliček ztratí. Využijeme proto pouze ZZH, který pro náš případ říká, že součin rychlosti první kuličky a její hmotnosti bude mít stejnou hodnotu

jako součin hmotnosti dvou kuliček spojených plastelínou $(m_1 + m_2)$ a jejich společné rychlosti v_{12}. Zapsáno rovnicí:

$$v_1 m_1 = v_{12}(m_1 + m_2)\,.$$

Jak už jsme zjistili výše, rychlost, kterou kulička na závěsu narazí do druhé, je

$$v_1 = \sqrt{2gl}\,.$$

Tuto rychlost již můžeme dosadit do rovnice ZZH a nalézt tak v_{12}.

$$m_1\sqrt{2gl} = v_{12}(m_1 + m_2)$$
$$v_{12} = \frac{m_1\sqrt{2gl}}{m_1 + m_2} = \frac{\sqrt{2gl}}{\frac{m_2}{m_1} + 1}$$

I v tomto případě platí $m_2 = 2m_1$, čili rychlost v_{12} lze zapsat ještě jednodušší formou.

$$v_{12} = \frac{\sqrt{2gl}}{\frac{m_2}{m_1} + 1} = \frac{\sqrt{2gl}}{\frac{2m_1}{m_1} + 1} = \frac{1}{3}\sqrt{2gl}$$

Dosazením zadaných hodnot pak dojdeme k výsledku, že rychlost spojených kuliček těsně po srážce bude $v_{12} = 0{,}66\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Na závěr by bylo dobré si povšimnout, že v celém řešení jsme vůbec nepotřebovali údaj o hmotnosti kuliček. Všechny naše výsledky budou platit pro všechny možné hmotnosti, které jsou v uvedeném poměru 1:1 nebo 2:1. Toto zjištění nám často může zjednodušit řešení… Pokud by vás problematika pružných srážek zajímala více, můžete si přečíst 3. Výfučtení tohoto ročníku Výfuku.

Jakub Savula
savula@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.