výpočty fyzikálních úkolů

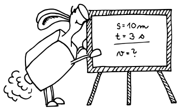
Milí kamarádi,

do rukou se vám dostala již pátá brožurka dvanáctého ročníku Výfuku. Najdete v ní vzorová řešení třetí série, pololetní výsledkovou listinu a samozřejmě i zadání předposlední, tedy páté série. Můžete se těšit například na nestabilní filodendron, který hrozí pádem na stůl nic netušícího organizátora. V jiné úloze budete počítat čas, který mají na záchranu k dispozici námořníci v ponorce zasažené torpédem, a ve Výfučtení se tentokrát dozvíte něco o Bohrově modelu atomu.

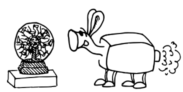
Přihlašování na tábor Výfuku je v plném proudu. Letos registrujeme větší zájem ze strany náhradníků, pokud jste tedy mezi garantovaně pozvanými, raději s přihlášením příliš neotálejte. Zatím však máme stále dostatek míst. Pokud byste věděli o nějakých kamarádech, kteří neřeší Výfuk, ale mohli by mít zájem jet, tak jim také můžete dát vědět. Uvidíme, jestli se pro ně najde místo.

Dále ještě připomínáme, že i letos probíhá výfučí bingo. Nezapomeňte se podívat, jestli náhodou nemáte nárok na nějakou odměnu, a případně nám pošlete poštou anebo na e-mail vyplněné tabulky. Pro více informací o výfučím bingu můžete navštívit náš web, který je nově na adrese `https://vyfuk.org/`.

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.org`



Zadání V. série



Termín odeslání: 3. 4. 2023 20.00

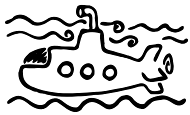
Úloha V.1 ... Ztráty a nálezy ❻ ❼ — 5 bodů

Vladi si na FYKOSí soustředění vozí čtyři propisky (červenou, zelenou, černou a modrou) a na každém soustředění ztratí tři z nich. Jaká je pravděpodobnost, že se s ní po čtyřech soustředěních vrátí domů tatáž červená propiska, se kterou vyrážela na první?

Úloha V.2 ... Zajímavý kvádřík ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Verča doma našla zajímavý kvádřík s celočíselnými délkami hran a objemem $294\,\mathrm{cm}^3$. Tento kvádřík však není obyčejný. Pokud by se prodloužila jedna jeho hrana, vznikla by krychle. Pomozte Verče určit rozměry kvádru.

Úloha V.3 ... Zásah, potopená! ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů



Po zásahu torpédem se ponorce porouchal motor a v trupu se objevila díra o obsahu $S = 90\,\mathrm{cm}^2$. Jak rychle musí námořníci díru ucpat, pokud mají v plánu následně opravit motor a s ponorkou se vynořit? Oprava motoru nebude možná, pokud do ponorky stihne natéct alespoň $V = 70\,\mathrm{m}^3$ vody. Předpokládejte, že ponorka bezprostředně po zásahu torpéda měkce dosedla na podmořský útes, který se nachází v hloubce $h = 120\,\mathrm{m}$. Zanedbejte efekty způsobené stlačováním vzduchu v ponorce.

Úloha V.4 ... (Ne)stabilní filodendron ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Viktor postavil na poličku nad Jardovým stolem filodendron v květináči, který se plazí po nehmotné tyči ze středu květináče. Ten má tvar válce o poloměru $r = 7\,\mathrm{cm}$ a hmotnosti $m = 350\,\mathrm{g}$. Tyč je nakloněna vůči vodorovné rovině pod úhlem $60\,^\circ$. Filodendron roste rychlostí $4\,\mathrm{mm}$ za den. V době posledního měření měl délku $l_0 = 30\,\mathrm{cm}$ a má délkovou hustotu (tedy hmotnost připadající na jednotku délky) $\lambda = 1{,}5\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-1}}$. Za jak dlouho se filodendron převáží a spadne Jardovi na stůl?

Úloha V.5 ... Jáma a kyvadlo ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Malý Edgar si hrál s kuličkami různých hmotností. Našel jamku o hloubce $h = 15\,\mathrm{cm}$ a umístil do ní kyvadélko s délkou závěsu $l = 20\,\mathrm{cm}$, které se v jamce může volně kývat tak, že se ve svém nejnižším bodě nachází těsně nad dnem jamky. Na kyvadélko připevnil kuličku o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{g}$, vychýlil ho o úhel $90\,^\circ$ a nechal tuto kývající se kuličku narážet do kuliček, které položil na dno jamky.

1. Napřed pod kyvadélko umístil kuličku o stejné hmotnosti m, vychýlil kyvadélko o úhel $90\,^\circ$ a pustil kuličku. Tato kulička se pak v nejnižším bodě své trajektorie dokonale pružně srazila s kuličkou na zemi.

   Jakou rychlostí se bude nepřipevněná kulička pohybovat v okamžiku těsně po srážce? Stačí jí tato rychlost na to, aby unikla z jamky?

2. Poté Edgar pod kyvadélko umístil kuličku s dvakrát větší hmotností. Unikne z jamky tato kulička? Pokud ne, kam nejvýše se dostane?

3. Co se stane, pokud Edgar na kuličku z předchozí úlohy připevní nehmotnou plastelínu, která zajistí, že se kuličky při srážce k sobě dokonale přilepí? Jaká bude nyní rychlost kuliček po srážce?

V celé úloze předpokládejte, že se po srážce kuličky pohybují stále po stejné přímce a zanedbejte všechny odporové síly.

Úloha V.E ... Kapesníková ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Robert byl společně s dalšími organizátory Výfuku v čajovně. Při náročném vymýšlení úloh se mu podařilo rozlít kalíšek čaje na stůl tak, že ani trochu nesteklo na zem. Robert ihned vytáhl suchý kapesník a začal čaj utírat. Když kapesník už nic nenasál, Robert ho nechal okapat nad stolem, načež ho přemístil nad kalíšek a vyždímal čaj zpátky do kalíšku. Takto použitý kapesník vyhodil. Zajímalo by ho však, jakou část objemu čaje se mu podařilo zachránit a jaká část zůstala navždy v použitém kapesníku.

Pomozte Robertovi a experimentálně zjistěte, kolik procent objemu tekutiny lze výše popsaným způsobem zachránit. Místo čaje použijte vodu. Pro zvýšení přesnosti měření můžete rozlít větší objem vody a použít více kapesníků. Dejte si však pozor, abyste použitý vyždímaný kapesník vždy hned vyhodili a vodu nasávali novým, suchým kapesníkem.

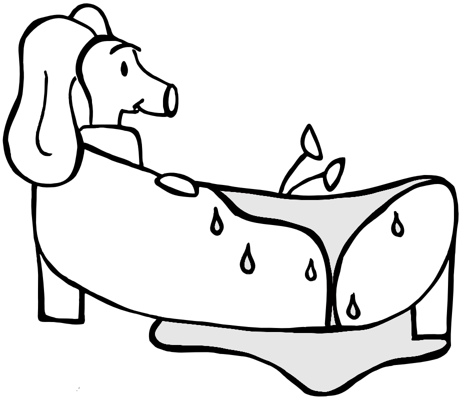
Úloha V.V ... Srovnávací ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

S modelem atomu se můžete setkat na každém kroku. Téměř všechny jsou ale nepřesné co se parametrů dráhy elektronu týče.

1. Spočítejte, v jaké vzdálenosti od jádra obíhá elektron podle Bohrova modelu v kationtu hélia He^+. Výsledek vyjádřete v jednotkách Å (angstrom, $Å = 10^{-10}$ m). Uvažujte, že se elektron nachází v základním stavu (tedy s hlavním kvantovým číslem rovným jedné).

2. Při porovnávání velikosti jádra s velikostí celého atomu proslulo přirovnání k zrnku a fotbalovému hřišti. Jaký poloměr by musel mít fotbalový stadion coby elektronový obal z předchozí úlohy, aby makové zrno o poloměru 1 mm představovalo jádro hélia o poloměru 0,5 fm?

3. Další zajímavou veličinou charakterizující v Bohrově modelu pohyb elektronu kolem jádra je frekvence oběhu. Určete, kolikrát za sekundu elektron dle Bohrova modelu naše jádro hélia oběhne.



Výfučtení: Bohrův model atomu

V historii se představa člověka o tom, jak vypadá hmota a posléze atom, měnila. Proto se v tomto Výfučtení seznámíme s jedním z historických modelů, který významně změnil pohled na celý mikrosvět.

Předchůdce

Bohrův model se opírá o Rutherfordův model atomu a snaží se vyřešit problémy, kvůli kterým nemohl být pravdivý.

Rutherfordův model se také nazývá planetárním, protože připomíná sluneční soustavu. Ve středu se nachází malé, hmotné, kladně nabité jádro. Okolo něj obíhají záporně nabité elektrony ve velkých vzdálenostech vzhledem k rozměrům jádra. Hmotnosti elektronů a jádra jsou však velmi malé, proto je gravitační síla mezi nimi zanedbatelná. Na rozdíl od sluneční soustavy jsou tedy elektrony drženy elektrostatickou silou, pro jejíž velikost platí

$$F_\mathrm{e} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,,$$

kde Q_1 a Q_2 jsou náboje jádra a obíhajícího elektronu, r je vzdálenost mezi nimi a ε_0 konstanta nazývaná *permitivita vakua*. Tato přitažlivá síla pak v planetárním modelu vyrovnává odstředivou sílu

$$F_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r}\,,$$

a elektrony tedy mohou obíhat po stabilní orbitě, aniž by spadly do jádra nebo odletěly pryč. Problém tohoto modelu spočívá v tom, že při zrychleném pohybu elektronu (při pohybu po kružnici se částice pohybuje s dostředivým zrychlením) vzniká elektromagnetické záření. Tohoto jevu se využívá například v rentgenkách. Vzniklé záření však způsobuje ztrátu energie elektronu, který by tedy postupně zpomalil a spadl do jádra. Teoretický čas tohoto pádu je nesmírně malý – mnohem menší než jedna vteřina, ale my v našem okolí vidíme, že elektrony do jádra nepadají. To je důvod, proč byl potřeba nový model.

I když tento model neodpovídá úplně skutečnosti, není zbytečný. Lze z něj například odvodit, že atomy jsou podobné malým magnetům. Elektron obíhající kolem jádra totiž můžeme chápat jako proudovou smyčku (v důsledku záporného náboje elektronu proud teče v opačném směru, než obíhá elektron). Tento proud poté podle Ampérova pravidla pravé ruky bude vytvářet magnetické pole. Takto bude tvořit magnetické pole každý elektron v atomu.

Bohrův model

Bohrův model funguje na podobném principu jako Rutherfordův, ale s tím, že zavádí dodatečné podmínky, kterými se pokouší vyřešit zmíněné problémy Rutherfordova modelu. Začněme však tím, co zůstává: kladně nabité jádro, ve kterém je téměř všechna hmotnost, a záporně nabité lehčí elektrony. I v tomto modelu obíhají elektrony kolem jádra, ale tentokrát se mohou vyskytovat jen v určitých vzdálenostech od jádra.

V těchto „vybraných“ vzdálenostech pak elektrony, na rozdíl od ostatních vzdáleností, elektromagnetické záření nevyzařují. Na každé z těchto vzdáleností má tedy elektron určitou energii, proto se často mluví o energetických hladinách. Jediný okamžik, kdy budou elektrony v Bohrově modelu vyzařovat, bude při přechodu z vyšší na nižší energetickou hladinu. V takovém případě vyzáří právě množství energie odpovídající rozdílu energií jednotlivých hladin. Toto množství neboli *kvantum* elektromagnetické energie je vyzářeno dohromady v jednom *balíku* a nazývá se *foton*. Pro obrácený přechod musíme elektronu energii dodat. Elektron tedy musí naopak pohltit foton s velmi podobnou energií, jako je rozdíl energetických hladin. Na těchto základech vznikl Bohrův model.

Kvanta

Zmínili jsme některé nové předpoklady, ze kterých Bohrův model vychází. Tyto předpoklady nebyly zvoleny náhodně, ale vychází přímo z experimentálních dat. Bylo totiž změřeno, že atomy mohou absorbovat a vyzářit pouze světlo konkrétních vlnových délek. (Vlnová délka světla zároveň určuje i jeho energii.) Niels Bohr si uvědomil, že se těmto požadavkům dá vyhovět, pokud povolíme elektronům nacházet se jen v konkrétních vzdálenostech s konkrétní energií.

Mechanické veličiny popisující elektrony v atomech (jako energie, rychlost atd.) již nemohou nabývat libovolných číselných hodnot, ale jen určitých, které se navíc často liší o nějaké celočíselné násobky. Říkáme, že veličiny nabývají pouze *diskrétních* hodnot neboli, že jsou *kvantované*.

Mezi některé další veličiny, které se kvantují, patří například tzv. *moment hybnosti*. To je veličina vyjadřující jakousi míru točivosti a oběhu elektronu a pro pohyb po kružnici ji můžeme spočítat jako součin vzdálenosti elektronu od jádra a jeho hybnosti

$$L = rp\,.$$

Pro moment hybnosti elektronu existuje charakteristický, elegantní vztah, jenž říká, že jeho velikost může nabývat pouze celočíselných násobků jedné fyzikální konstanty, jak uvidíme později. Ovšem i přesto, že s ním přišel sám Bohr, není úplně pravděpodobné, že by si jej on sám odvodil pouze teoreticky. Jednalo se spíše o intuitivní odhad doplněný empirickými zkušenostmi z pozorovaných dat. Nicméně my si dnes tento vztah odvodit můžeme díky objevům, které přišly pár let po představení Bohrova modelu.

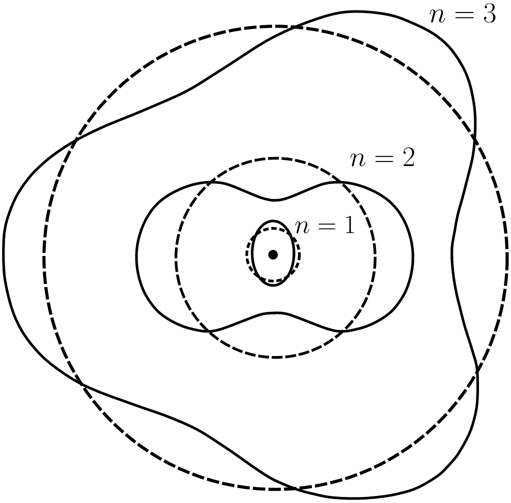
V roce 1924 francouzský fyzik Louis de Broglie napsal disertační práci, ve které vyslovil myšlenku, že se částice mohou šířit prostorem i jako vlny. Podobně jako mořské vlny šíří energii po hladině, mohou i elementární částice nést energii prostorem v podobě vlny. De Broglie se pak ve své práci zaměřil zejména na to, jakou vlnovou délku (vzdálenost mezi dvěma vrcholy vlny) by měly částice za tohoto předpokladu. Dopracoval se k výsledku, že pro vlnovou délku částice platí tento elegantní předpis

$$\lambda = \frac{h}{p}\,,$$

kde p je hybnost částice a $h \doteq 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s je takzvaná *Planckova konstanta*, jedna ze základních konstant fyziky. Tento předpoklad je velmi mocný nástroj k popisování celého kvantového světa a skutečně se ukazuje, že platí. My si díky němu přesně popíšeme Bohrův model atomu.

Stabilní dráhy

Vyjdeme-li z Bohrovy myšlenky, že elektrony se pohybují po kružnici a zároveň vyhovíme de Broglieho hypotéze, zjistíme, že elektron bude tvořit vlnu obtočenou kolem jádra.



Obr. 1: Schéma jádra a prvních tří kružnicových drah elektronu (čárkovaně). Plnou čarou jsou zvýrazněny elektronové vlny.

Aby taková vlna šířící se kolem jádra mohla vůbec existovat a nerušila se sama se sebou, musí její konec navázat na začátek a uzavřít tak celou smyčku kolem jádra. Ve vzdálenostech, kde toto možné není, se elektron vyskytovat nemůže, jelikož vlna nebude plynulá. Matematicky tuto podmínku můžeme vyjádřit tímto způsobem

$$2\pi r = n\lambda \,,$$

kde r značí vzdálenost elektronu od jádra a n je nějaké přirozené číslo. Tato rovnice říká, že délka kružnicové trajektorie musí být rovna celočíselnému násobku vlnové délky. Jedině tak na sebe může vlna po jednom oběhu navázat. Pokud dosadíme za vlnovou délku de Broglieho vztah, můžeme rovnici dostat do zajímavé podoby.

$$rp = n\frac{h}{2\pi} \,.$$

Levá strana očividně odpovídá dříve zmíněnému momentu hybnosti elektronu. Tuto rovnici obvykle zapisujeme ve kratším tvaru

$$L = n\hbar \,,$$

kde $\hbar$ je tvz. *redukovaná Planckova konstanta* a je rovna $h/(2\pi)$. Dostali jsme nyní Bohrovu identitu, která nám říká, že moment hybnosti elektronu v atomu je roven celočíselnému násobku redukované Planckovy konstanty. Moment hybnosti může nabývat jenom určitých hodnot! To je výsledek, který se příčí klasické fyzice, nicméně je to přesně to, co Bohrův model potřeboval.

Celočíselný koeficient n je v kvantové mechanice tak důležitý, že si vysloužil vlastní název: *hlavní kvantové číslo*. Dáme-li vypočtený kvantový moment hybnosti do rovnosti s klasickým, můžeme zjistit mnohé.

Energie

Podívejme se na to, jaké energie by tedy elektron mohl mít. Předpokládejme, že „vybraná dráha" bude mít poloměr r. Elektrony se v tomto modelu pohybují po kružnicích se středem uprostřed jádra, proto se musí pohybovat rovnoměrným pohybem. Pro rovnoměrný pohyb po kružnici platí, že na elektron musí působit výše popsané dostředivé zrychlení, aby se udržel na kruhové trajektorii. Protože gravitační síla mezi elektronem a jádrem je zanedbatelně malá, lze uvažovat, že dostředivé zrychlení způsobí elektrická síla sama. Musí tedy platit rovnice $F_\mathrm{e}/m = a_\mathrm{d}$, kde po dosazení získáváme

$$\frac{e \cdot Ze}{4\pi\varepsilon_0 rm} = v^2 \,.$$

V rovnici byl zapsán náboj jádra jako počet protonů v jádře Z vynásobený elementárním nábojem. Jelikož již známe rychlost, lze jednoduše spočítat i kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \,.$$

Ke kinetické energii je potřeba ještě přičíst potenciální energii. Pro potenciální energii nabité částice Q_1 v radiálním elektrickém poli částice Q_2 platí

$$E = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \,.$$

V našem případě, tedy pro elektron, dostaneme

$$E_\mathrm{p} = \frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \,.$$

Po sečtení těchto dvou energií získáváme výslednou energii elektronu ve vzdálenosti r od středu atomu

$$E\left(r\right) = \frac{-Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \,.$$

Za povšimnutí stojí, že výsledek je záporný a ve velmi velkých vzdálenostech v porovnání s rozměry atomů prakticky nulový ($1/x$ je pro velmi velké x rovno prakticky nule). To jsme přesně očekávali. Elektrony budou v atomech držet, jelikož se vždy snaží mít co nejmenší energii, která bude co nejblíže jádru, kde bude energie nejzápornější (a tedy nejmenší).

Můžeme si uvědomit, že nyní máme dvě podmínky pro rychlost elektronu na dané hladině. Jednu vyplývající ze vztahu pro moment hybnosti a také podmínku, ke které jsme dospěli při odvozování vztahu pro energii. Srovnáním těchto podmínek můžeme dospět ke vztahu pro vzdálenosti, v nichž elektron může obíhat. Využijme nejprve vztah pro moment hybnosti

$$L = mvr = n\hbar \,,$$

$$v = \frac{n\hbar}{mr} \,.$$

A nyní můžeme dosadit do uvedeného vztahu pro v^2, čímž dostaneme podmínku pro poloměry, ve kterých mohou elektrony obíhat

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 rm} = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2}\,,$$
$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0 \cdot n^2\hbar^2}{mZe^2}\,.$$

Tuto vzdálenost pak ještě můžeme dosadit zpět do vzorce pro energii elektronu v určité vzdálenosti od jádra

$$E\left(n\right) = \frac{-mZ^2e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2n^2\hbar^2} = \frac{-mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2n^2h^2}\,.$$

Takto spočítaná energie se nám bude dále hodit. Pro zjednodušení zaveďme *Rydbergovu konstantu* $R_\infty = me^4/(8\varepsilon_0^2h^2 \cdot hc)$. Vzorec pro energii tedy bude

$$E\left(n\right) = hcR_\infty \cdot \frac{-Z^2}{n^2}\,.$$

Spektra jsou úžasná!

Výše jsme zjistili, že elektrony mohou obíhat kolem jádra jen v určitých vzdálenostech. Zároveň platí, že mechanická energie elektronu závisí na vzdálenosti od jádra. Z tohoto jsme výše odvodili vztah pro energie a vidíme, že podle očekávání i energie elektronů může nabývat pouze určitých hodnot. Právě tento fakt má pravděpodobně největší vliv na moderní chemii. Díky Bohrově modelu elektron nemůže kontinuálně padat do jádra a vyzařovat energii, ale pořád mu nic nebrání ve spadnutí z jedné oběžné dráhy do nižší dráhy.

Při tomto přechodu se ale sníží energie elektronu, kam se tedy zbytek energie poděje? Ukazuje se, že vznikne právě jeden foton (balík světelné energie), jehož energie přesně odpovídá poklesu energie elektronu. Energie fotonu souvisí s jeho vlnovou délkou λ podle vztahu

$$E = \frac{hc}{\lambda}\,.$$

Tím, že energie má jen určité hodnoty, bude mít i vlnová délka emitovaného fotonu pro danou energii pouze jednu možnou vlnovou délku, která bude určena pouze tím, odkud a kam elektron přeskakuje.

Vyzářený foton o energii E tedy bude mít vlnovou délku

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{hc}{hcR_\infty \cdot \frac{-Z^2}{n_i^2} - hcR_\infty \cdot \frac{-Z^2}{n_j^2}} = \frac{1}{Z^2R_\infty}\frac{n_i^2n_j^2}{n_i^2 - n_j^2}\,.$$

Přičemž n_i je hlavní kvantové číslo, které má elektron před přechodem, a n_j po přechodu.

Podobně jako celý atom vyzařuje světlo, může ho atom také absorbovat, a to o úplně stejných vlnových délkách, jako vyzařuje. Na základě toho dokážou chemici pomocí ozařování zjistit, z čeho je zkoumaná látka složena. Obor, který takové metody využívá, se nazývá *spektroskopie* (na toto téma bylo sepsáno 3. Výfučtení minulého ročníku, doporučujeme si jej také přečíst).

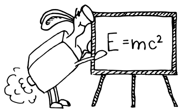
A jak to bylo dál?

I tento model obsahuje nepřesnosti. Hlavní nepřesností je, že neuvažuje ovlivňování elektronů navzájem. Z tohoto důvodu je model vhodný hlavně pro vodík. Trochu nepřesněji, ale stále dobře, popisuje i atomy, které mají jeden valenční elektron. Dále tento model umožňuje pouze kruhové dráhy, přestože předchozí modely umožňovaly také jiné dráhy. Kvůli nutnosti předpovědět i jiné atomy, musely vzniknout další modely, které tento model silně ovlivnil.

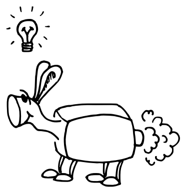
Důležité je zmínit tzv. *Sommerfeldův* model, který udržuje stejnou myšlenku jako Bohrův, akorát připouští, že se elektron může pohybovat po elipsách (podobně jako planety kolem Slunce). I tento model se však ukázal jako neúplný, současného modelu atomového obalu se dosáhlo teprve roku 1925, kdy rakouský fyzik *Erwin Schrödinger* formuloval svou pohybovou rovnici částic. Podle ní pak navrhl model, podle něhož se elektrony mohou pohybovat všude kolem jádra, ale s různou pravděpodobností závisející na poloze. Zajímavé je, že tento model také říká, že elektron má pouze určité hladiny energie a že jsou shodné s těmi, které nám dává Bohrův model (alespoň pro atom vodíku). Tento paradox je charakteristický pro obor fyziky, a tak pomohl rozvinout Bohr společně se Schrödingerem *kvantovou mechaniku.*

Pavel Provazník
pavelp@vyfuk.mff.cuni.cz

Michal Stroff
stroffis@vyfuk.mff.cuni.cz



Řešení III. série



Úloha III.1 ... Matematická analýza

5 bodů; průměr 4,95; řešilo 22 studentů

David se učí matematickou analýzu a čeká ho zkouška. Analýza je ale těžký předmět, takže se musí učit dlouho. Na úspěšné složení početní části zkoušky se musí učit alespoň 24 hodin. Víme, že spočítat jeden příklad na derivace funkcí mu trvá v průměru 3 minuty, příkladů na integrály spočítá za hodinu 12 a za 3 hodiny spočítá 16 diferenciálních rovnic. Před zkouškou si spočítal celkově 75 příkladů na derivace, 150 integrálů a 40 diferenciálních rovnic. Je David dostatečně naučený, aby zvládl zkoušku?

David spočítal 75 příkladů na derivace, každý mu zabral 3 minuty. Čas, který David strávil počítáním derivací, je tedy

$$75 \cdot 3\,\mathrm{min} = 225\,\mathrm{min} = 3{,}75\,\mathrm{h}\,.$$

Čas, který strávil nad integrály, spočítáme jako

$$\frac{150}{12}\,\mathrm{h} = 12{,}5\,\mathrm{h}\,.$$

Jak dlouho Davidovi trvaly diferenciální rovnice, můžeme vypočítat podobně jako integrály, akorát musíme výsledek ještě vynásobit třemi, protože tentokrát mu daný počet příkladů netrval hodinu, ale tři hodiny. Na jejich spočítání proto potřebuje třikrát víc času. Nad diferenciálními rovnicemi tedy David strávil

$$\frac{40}{16} \cdot 3\,\mathrm{h} = 7{,}5\,\mathrm{h}\,.$$

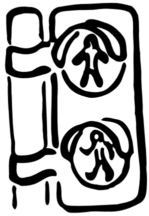
Sečtením všech tří časů zjistíme, že David se učil 23,75 h, což je málo. David proto zkoušku nezvládl.

David Chudožilov
chudozilov@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.2 ... Aleš na přechodu

5 bodů; průměr 4,30; řešilo 63 studentů

Aleš a Jirka jdou pěšky na setkání Výfuku, které se koná v Praze. Oba mají stejnou rychlost $v = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*, mají to stejně daleko a vyjdou ve stejnou chvíli. Každých* $d = 200\,\mathrm{m}$ *je čeká na cestě přechod pro chodce (první přechod mají až* $200\,\mathrm{m}$ *od domu), na kterém je vždy zelená* $8\,\mathrm{s}$ *a červená* $30\,\mathrm{s}$*. Všechny přechody přebliknou z červené na zelenou ve chvíli, kdy Jirka s Alešem vyjdou z domu. O kolik déle než Jirkovi trvá cesta Alešovi, pokud Jirkovi trvá* $t = 18\,\mathrm{min}$ *a Aleš ze svého přesvědčení vždy čeká na přechodech na zelenou, zatímco Jirka chodí i na červenou? Jaká je optimální vzdálenost přechodů, aby oba došli ve stejnou chvíli?*



Nejprve musíme zjistit, jak vypadá Alešova cesta. Zajímá nás, kolik je na ní přechodů. Víme, že Jirkovi cesta trvala $t = 18\,\mathrm{min} = 1\,080\,\mathrm{s}$ a že šel rychlostí $v = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Na základě toho můžeme spočítat, že Jirka (a tedy i Aleš) musel ujít $s = vt = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 1\,080\,\mathrm{s} = 2\,160\,\mathrm{m}$. Jelikož jsou od sebe přechody vzdálené $200\,\mathrm{m}$, znamená to, že jich každý po cestě potkal 10.

Zákona dbalý Aleš dorazil k prvnímu přechodu za $100\,\mathrm{s}$, neboť každou sekundu ušel dva metry a celkem musel ujít $200\,\mathrm{m}$. Tam ovšem zrovna v tu chvíli svítila červená. Jeden „cyklus“ semaforu totiž trvá $T = 8 + 30 = 38\,\mathrm{s}$ a třetí zelená už zhasla ($2T + 8\,\mathrm{s} = 84\,\mathrm{s} \leq 100\,\mathrm{s}$), zatímco čtvrtá se ještě nerozsvítila ($3T = 114\,\mathrm{s} \geq 100\,\mathrm{s}$). Jinými slovy si Aleš musel počkat $114\,\mathrm{s} - 100\,\mathrm{s} = 14\,\mathrm{s}$.

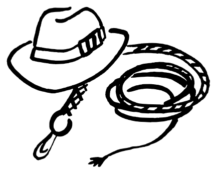
Vzhledem k tomu, že druhý semafor je vzdálen opět $200\,\mathrm{m}$ a Aleš vyjde přesně v okamžiku, kdy na něm skočí zelená, rovnou víme, že bude čekat opět $14\,\mathrm{s}$. Stejně to bude zřejmě fungovat i pro všechny ostatní semafory. Aleš tedy čekal na každém semaforu $14\,\mathrm{s}$. Celkem potkal 10 semaforů a dorazil proto o $14\,\mathrm{s} \cdot 10 = 140\,\mathrm{s}$ později než Jirka. Cesta Alešovi trvala celkem $20\,\mathrm{min}$ a $20\,\mathrm{s}$.

Zbývá odpovědět na otázku optimální vzdálenosti semaforů. Pro jednoduchost předpokládejme, že Aleš se po přechodu vydá pouze tehdy, pokud mu zrovna padla zelená (pokud už zelená v okamžiku Alešova příchodu k přechodu nějakou chvíli svítí, tak to Aleš raději nebude riskovat).[1] Alešovi bude cesta trvat stejně dlouho jako Jirkovi v případě, že vždy, když dojde na přechod, na něm bude zrovna svítit zelená. To se stane v případě, že čas, který stráví na cestě mezi dvěma semafory, bude nějaký násobek délky „cyklu“ semaforu a že k němu vždy dojde ve stejné „fázi“. Nejkratší taková vzdálenost je vzdálenost, kterou Aleš ujde během jednoho „cyklu“. Můžeme ji spočítat jako $s_2 = vT = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 38\,\mathrm{s} = 76\,\mathrm{m}$. Další přípustné vzdálenosti jsou potom po řadě $2s_2 = 152\,\mathrm{m}, 3s_2 = 228\,\mathrm{m}, \ldots$ Na závěr si můžete všimnout, že toto obecné řešení samozřejmě připouští i situaci, ve které by na cestě žádný semafor nebyl.

Viktor Materna
materna@vyfuk.mff.cuni.cz

[1] Samozřejmě bychom výsledek mohli zobecnit tím, že bychom Alešovi dovolili mezi jednotlivými semafory získat malé zpoždění takové, že když ho sečteme pro všechny semafory, tak nebude větší než doba, po kterou svítí zelená.

Úloha III.3 ... Jako když bičem mrská... 6 bodů; průměr 4,34; řešilo 35 studentů



Na vlaku jedoucím konstantní rychlostí $40\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ *stojí zloděj Svatého grálu. Z věže vedle kolejí na něj číhá Indiana Jones připravený zkazit mu veškeré plány. V jisté chvíli mrskne svým bičem, který se namotá na most vedoucí přes koleje přesně v místě nad kolejnicemi. Nenamotaná část biče má délku* $5\,\mathrm{m}$. *V jaké vzdálenosti bude nepřítel ve chvíli, kdy se Indy musí zhoupnout směrem kolmým na koleje, aby ho mohl srazit? Počítejte, že bič je nehmotný, úhlová výchylka napnutého biče od svislého směru je relativně malá a že Indyho už ze soubojů a bičování bolí ruce a chce tedy ve vzduchu strávit co nejméně času. Odpor vzduchu zanedbejte. Indy se aktivně neodráží, prostě se jen zhoupne.*

Dostane-li se vlak s nepřítelem k Indymu za čas t, urazí při tom vzdálenost $d = vt$, kde v je rychlost vlaku. Dále potřebujeme vědět, za jak dlouho se Indy dostane z věže do nejnižšího bodu své trajektorie. Indiana Jonese na biči můžeme považovat za matematické kyvadlo (proto byla v zadání zmínka o malé úhlové výchylce). Pro periodu T, se kterou matematické kyvadlo kmitá, platí vzorec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

kde l je délka biče a g tíhové zrychlení. Během jednoho kmitu se Indy dostane do nejnižšího bodu (nad kolejnice), poté na druhou stranu do nejvyššího bodu, kde se obrátí, a přes nejnižší bod se vrátí zpátky na věž, ze které vyskočil. Všechny čtyři části kmitu jsou časově symetrické, takže nejkratší doba, za kterou se Indy dostane nad kolejnice, je jedna čtvrtina periody kmitu. Aby Indy proletěl nejnižším bodem své trajektorie právě ve chvíli, kdy tam bude stát nepřítel, musí čtvrtina periody být rovna času t (tak jsme značili čas, za který vlak s padouchem urazí hledanou vzdálenost d), tedy:

$$t = \frac{T}{4}\,.$$

Nyní všechny rovnice sjednotíme.

$$d = vt = \frac{vT}{4} = \frac{\pi}{2}v\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Pro výpočet dosadíme hodnoty ze zadání: $l = 5\,\mathrm{m}$, $v = 40\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = 100/9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

$$d = \frac{\pi}{2}\frac{100}{9}\sqrt{\frac{5}{9,81}}\,\mathrm{m} \doteq 12{,}5\,\mathrm{m}$$

Indy musí skočit ve chvíli, kdy je nepřítel přibližně ve vzdálenosti 12,5 m.

Michal Stroff
stroffis@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.4 ... Čočka a zrcadlo

6 bodů; průměr 3,61; řešilo 31 studentů

Jirka si hrál se spojnou čočku a bodovým zdrojem světla. Když umístil zdroj světla do vzdálenosti $a = 12\,\mathrm{cm}$ *od čočky, vznikl za čočkou obraz ve vzdálenosti* $a' = 6\,\mathrm{cm}$. *Potom vzal čočku i zdroj a umístil čočku do vzdálenosti* $l = 10\,\mathrm{cm}$ *před zrcadlo, přičemž zachoval původní vzdálenost zdroje od čočky (zdroj se tedy nachází* $22\,\mathrm{cm}$ *od zrcadla). Paprsky ze zdroje prošly čočkou a opět vytvořily za čočkou první obraz. Poté se ale odrazily od zrcadla, znovu prošly čočkou a vytvořily druhý obraz. Jak daleko od čočky vznikl druhý obraz?*
Nápověda: Může se vám hodit tužka a pravítko nebo zobrazovací rovnice.

Jak víme z nápovědy, může nám být nápomocna *zobrazovací rovnice*. Ta se obvykle uvádí ve tvaru

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

a dává do souvislosti ohniskovou vzdálenost čočky f se vzdáleností mezi čočkou a světelným zdrojem, v našem případě $a = 12\,\mathrm{cm}$, a vzdáleností mezi čočkou a obrazem, která je $a' = 6\,\mathrm{cm}$. Z této rovnice si vyjádříme ohniskovou vzdálenost použité čočky jako

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{a + a'}{aa'} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{aa'}{a + a'} = 4\,\mathrm{cm}\,.$$

Když už víme, co zobrazovací rovnice popisuje, můžeme ji použít pro zodpovězení otázky ze zadání – jak daleko od čočky vznikne obraz, když paprsky půjdou způsobem popsaným v zadání. Hledáme tedy nějakou vzdálenost b', v níž se vyskytne obraz. Známe ohniskovou vzdálenost, ale potřebujeme ještě zjistit vzdálenost b. Bude to vlastně dráha, kterou urazí paprsky mezi prvním obrazem a čočkou. Paprsky nejdříve urazí dráhu $l - a'$ k zrcadlu a potom ještě l k čočce. Získáme tak

$$b = l - a' + l = 2l - a' = 14\,\mathrm{cm}\,.$$

Teď již můžeme opět použít zobrazovací rovnici a dostaneme

$$\frac{1}{b'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b} = \frac{b - f}{bf} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{bf}{b - f} = 5{,}6\,\mathrm{cm}\,.$$

Druhý obraz tedy vznikne 5,6 cm před čočkou.

Úloha III.5 ... Gedankenexperiment

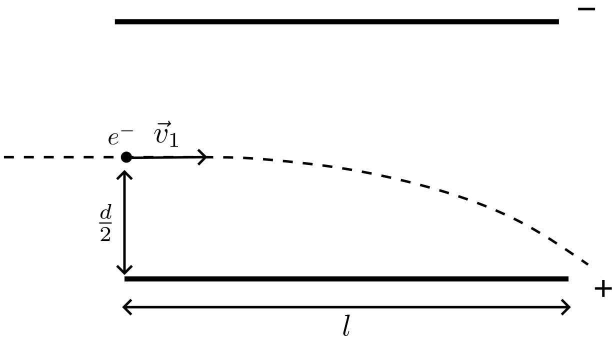
7 bodů; průměr 3,80; řešilo 15 studentů

Jelikož čekání na zelenou na semaforu je někdy opravdu dlouhé, má Aleš spoustu času přemýšlet o netradičních fyzikálních úlohách. Jednou tak přemýšlel o elektronech a napadla ho myšlenka, zda by bylo možné z velkého množství elektronů vybrat pouze ty, které se pohybují nějakou konkrétní rychlostí, jenom s pomocí deskového kondenzátoru. (Deskový kondenzátor je součástka, která je tvořena dvěma rovnoběžnými deskami, které jsou nabity opačným nábojem.)

V obou podúlohách uvažujte, že Aleš má zdroj elektronů, z něhož všechny elektrony vylétávají ve stejném místě a stejným směrem. Dále uvažujte, že vzdálenost desek Alešova imaginárního kondenzátoru je $d = 1\,\mathrm{mm}$, *vzdálenost mezi konci kondenzátoru (tj. šířka kondenzátoru) je* $l = 5\,\mathrm{cm}$ *a že na kondenzátoru je udržováno konstantní napětí* $U = 10\,\mathrm{mV}$. *Také nejspíš budete potřebovat vědět, že hmotnost elektronu je* $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ *a jeho náboj je* $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

1. *Nejprve Aleše napadlo, že by kondenzátor mohl umístit tak, aby do něj elektrony vletěly rovnoběžně s jeho deskami přesně v polovině mezi nimi (obr. 2). Takto příliš pomalé elektrony narazí do kladně nabité desky. Jakou minimální rychlost v_1 musí elektron mít, aby vyletěl na druhé straně kondenzátoru?*

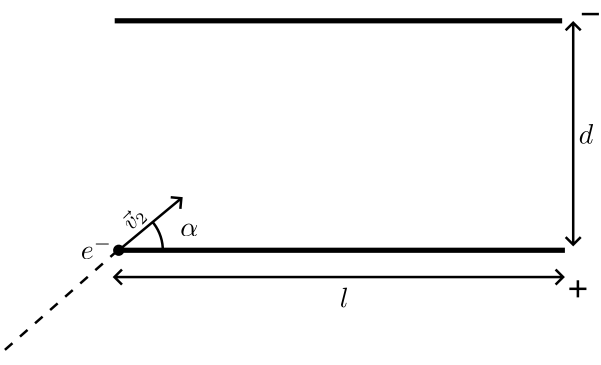
   Poznámka: *Nelekněte se, když vám vyjde hodně velká rychlost.*



Obr. 2: Elektrony letící rovnoběžně

2. *Poté ovšem Aleš dostal mnohem lepší nápad, který mu umožní získat pouze elektrony s přesně danou rychlostí. Kondenzátor nyní trochu natočí a elektrony do něj budou vstupovat v místě, kde je okraj kladně nabité desky kondenzátoru, tak, že jejich rychlost bude s deskou svírat úhel α (obr. 3).*

   Nejprve kvalitativně popište, jakým způsobem musíme zvolit úhel α, aby kondenzátorem proletěly pouze elektrony s danou rychlostí. (Tedy aby elektrony s rychlostí větší nebo menší narazily do jedné z desek kondenzátoru.) Následně vypočítejte úhel α a počáteční rychlost v_2 elektronů, které proletí.



Obr. 3: Elektrony letící pod úhlem α

Nápověda 1: *K výpočtům by se vám teoreticky mohlo hodit vědět, že elektrickou intenzitu uvnitř kondenzátoru můžeme vypočítat jako*

$$E = \frac{U}{d}$$

a že lze uvažovat, že všude mimo prostor mezi deskami kondenzátoru je intenzita elektrického pole nulová.
Nápověda 2: *V druhé podúloze by se mohlo stát, že pro určení α a v_2 budete muset vyřešit soustavu dvou rovnic. V takovém případě doporučujeme, abyste se z nich nejprve pokusili vyjádřit hodnotu nějaké goniometrické funkce α. Také by se vám mohl hodit vztah:*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

První úloha

Síla působící na elektron Nejprve bychom se měli zamyslet nad tím, co se vůbec s elektronem stane poté, co vletí do kondenzátoru. V první nápovědě je zmíněno, že intenzitu elektrického pole uvnitř kondenzátoru můžeme vypočítat pomocí vztahu

$$E = \frac{U}{d}\,,$$

a tak by bylo dobré zvážit, jaký vliv to bude mít na elektron. Elektrická intenzita nám říká, jaká síla by v daném bodě prostoru působila na jednotkový náboj. Zároveň víme, že elektrická síla působící na těleso je vždy přímo úměrná jeho náboji. Tyto poznatky můžeme shrnout rovnicí

$$F = EQ\,,$$

která nám říká, jak pomocí náboje tělesa Q a elektrické intenzity E v daném místě vypočítáme sílu F, která na těleso kvůli elektrickému poli působí.

Pokud tedy použijeme značení ze zadání, tak síla působící na elektron v kondenzátoru bude

$$F = Eq = \frac{Uq}{d}\,.$$

Zamyšlení nad vztahem pro sílu[2] Nyní je poměrně důležité se zamyslet nad tím, co tento výsledek znamená. Nejprve si všimněme toho, že síla F nijak nezávisí na tom, kde v kondenzátoru se elektron nachází. Toto je opravdu pozoruhodné, neboť Coulombův zákon, který je jedním ze základních zákonů elektrostatiky, říká, že pro sílu mezi dvěma bodovými náboji platí $F \sim 1/r^2$. To znamená, že při vzdalování nábojů od sebe se síla rychle zmenšuje. Jak ale pozorujeme, tak v kondezátorech síla nijak nezávisí na tom, kde mezi deskami se náboj nachází. Tato podivnost je způsobena tím, jak se obvykle na kondenzátory v elektrostatice pohlíží.

Vzdálenost desek kondenzátoru je obvykle velmi malá v porovnání s jeho ostatními rozměry. Je tedy možné uvažovat, že se náboje pohybují velmi blízko u nabitých desek. Tím pádem neuděláme velkou chybu, když si představíme, že jsou desky nekonečné. Ač se na první pohled

[2] Není zcela nezbytné k vyřešení úlohy

zdá, že si tímto vše jen zkomplikujeme, není tomu tak. V případě nekonečných desek je totiž situace dokonale symetrická, z čehož plyne mnoho výhod.[3] Například je již zřejmé, že síla musí působit směrem k jedné z desek, neboť všechny síly ve směru rovnoběžném s deskou se zřejmě navzájem vyruší. To, že elektron bude přitahován ke kladné desce, již poté vyplývá jednoduše z faktu, že má záporný náboj, a je tedy přitahován kladným nábojem a odpuzován záporným.

Přijít na to, proč se síla nemění se vzdáleností, je poněkud obtížnější, ale pokusme se najít alespoň nějaké odůvodnění. Aby se síla zmenšovala se vzdáleností, musely by se v nějakém místě rozbíhat siločáry. To by pak ale nutně znamenalo, že v nějakém vedlejším bodě musí siločáry mířit šikmo, a tedy mít i nějakou složku rovnoběžnou s deskou. To ovšem nedává smysl, jelikož v tomto bodě (stejně jako v každém jiném) bude deska v libovolném horizontálním směru vypadat stejně. Není proto možné, aby v některém takovém směru působila větší přitažlivá síla než ve směrech jiných.

Minimální rychlost Celkem tedy víme, že na elektron po celou dobu, co prolétá kondenzátorem, působí konstantní síla F směrem kolmo na desky kondenzátoru. Můžeme si všimnout, že tato situace je v podstatě stejná u vrhu, a můžeme ji tedy obdobným způsobem počítat. Zrychlení působící na elektron je podle druhého Newtonova zákona

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Uq}{md}\,.$$

Na počátku se elektron pohybuje v horizontálním směru rychlostí v_1, kterou chceme určit. Pro minimální rychlost, kterou musí elektron na průlet kondenzátorem mít, bude jeho trajektorie taková, že po uražení horizontální vzdálenosti l (tedy „na konci“ kondenzátoru) se bude nacházet ve stejné výšce jako kladně nabitá deska kondenzátoru, tedy urazí vertikální vzdálenost $d/2$. Horizontální pohyb je rovnoměrný, platí pro něj

$$l = v_1 t_1\,,$$

a vertikální odpovídá volnému pádu se zrychlením a, z čehož plyne

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2} a t_1^2\,.$$

Vyjádříme-li dobu letu kondenzátorem t_1 z druhé rovnice a dosadíme do první, dostaneme

$$l = v_1 \sqrt{\frac{d}{a}}\,.$$

Nyní jen vyjádříme v_1 a dosadíme za a, čímž získáme výsledek

$$v_1 = l\sqrt{\frac{a}{d}} = l\sqrt{\frac{Uq}{md^2}} = 2{,}1 \cdot 10^6 \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

[3] Následující úvahy fungují úplně stejně i pro jednu desku, což je jednodušší pro představu, tudíž doporučujeme si situaci představit nejprve takto.

Druhá úloha

Volba úhlu α Nejprve se máme opět zamyslet nad tvarem trajektorie elektronu, což úzce souvisí s volbou úhlu α. Pokud vyžadujeme, aby proletěly pouze elektrony s přesně danou rychlostí, je celkem zřejmé, že pomalejší elektrony musí narazit do kladně nabité desky a rychlejší do záporně nabité desky. Zařízení nemůže fungovat tak, že by elektrony s rychlostí o málo větší i menší narazily do stejné desky, neboť poté by do ní musely narazit i elektrony se správnou rychlostí.

Jak již víme z řešení první úlohy, na elektron působí konstantní zrychlení a směrem ke kladně nabité desce, a tak můžeme k úloze přistupovat podobně jako k vrhu. Z toho mimo jiné plyne, že se elektron v kondenzátoru bude pohybovat po parabole. Představme si nyní, že pod určitým úhlem vletí do kondenzátoru tři elektrony, přičemž první bude mít menší rychlost než druhý a ten bude mít menší rychlost než třetí. Díky podobnosti s vrhy víme, že elektron s největší rychlostí doletí do největší vzdálenosti a dosáhne největší výšky. Naopak elektron s nejmenší rychlostí dosáhne nejmenší výšky a doletí do nejmenší vzdálenosti. Pro trajektorie z toho plyne, že trajektorie prvního elektronu bude „pod“ trajektorií druhého (blíže ke kladné desce) a že trajektorie třetího bude „nad“ trajektorií druhého (blíže k záporné desce). Aby tedy všechny elektrony s jinou rychlostí než v_2 narazily do některé desky, musí se všechny trajektorie „nad“ tou správnou protínat se zápornou deskou a všechny „pod“ ní s tou kladnou. Správná trajektorie se tedy v nejvyšším bodě bude téměř dotýkat záporné desky a v nejnižším (tedy na konci kondenzátoru) se téměř dotkne okraje kladné desky.

Zbývá otázka, jak úhel α a rychlost v_2 vypočítat. Z úvah o tvaru trajektorie jsme zjistili, že máme dvě podmínky – v nejvyšším bodě trajektorie se elektron téměř dotkne „horní“ desky, dosáhne tedy výšky d, a elektron ve vzdálenosti l se bude nacházet v nulové výšce (v úrovni „spodní“ desky). Tyto dvě podmínky představují dvě rovnice, které můžeme sestavit. Povede-li se nám je sestavit tak, aby obsahovaly pouze dvě neznámé (rychlost v_2 a úhel α), pak by tuto soustavu s trochou štěstí mělo být i možné vyřešit. Proto se nyní budeme snažit zbavit závislosti na čase.

Rovnice plynoucí z první podmínky Zabývejme se nejdříve první podmínkou, která mluví o maximální výšce. Víme, že při vrhu z nulové výšky (tedy když těleso vyletí ze stejné výšky do níž dopadne) dosáhne elektron maximální výšky v polovině doby letu, kdy bude mít nulovou vertikální složku rychlosti. Vertikální složku počáteční rychlosti můžeme vypočítat jako

$$v_y = v_2 \sin\alpha\,.$$

Víme, že za čas $t_2/2$ zpomalí elektron právě o rychlost v_y (na nulovou rychlost), ze vztahu pro zrychlení tak dostaneme

$$a\frac{t_2}{2} = v_y = v_2 \sin\alpha\,.$$

Zároveň víme, že v tuto chvíli urazil elektron ve vertikálním směru vzdálenost d. Abychom si zjednodušili výpočty, můžeme zde využít poměrně často používaného triku: místo uvažování elektronu, který zpomaluje na nulovou rychlost, si představíme děj pozpátku, tedy elektron zrychlující z nulové rychlosti na počáteční. To odpovídá rovnoměrně zrychlenému pohybu s nulovou počáteční rychlostí. Pro vzdálenost d tedy dostáváme rovnici

$$d = \frac{1}{2}a\left(\frac{t_2}{2}\right)^2\,.$$

Dosazením za čas $t_2/2$ z předcházející rovnice dostáváme rovnici vyjadřující první podmínku

$$d = \frac{1}{2}a\left(\frac{v_2 \sin\alpha}{a}\right)^2 = \frac{v_2^2 \sin^2\alpha}{2a}\,. \tag{1}$$

Rovnice plynoucí z druhé podmínky Zkusme nyní tedy ještě najít rovnici plynoucí z druhé podmínky. V nulové výšce se elektron bude nacházet v čase t_2. V horizontálním směru se jedná o rovnoměrný pohyb, pro vzdálenost l tedy bude platit

$$l = v_x t_2 = v_2 t_2 \cos\alpha\,.$$

Čas t_2 jsme však již používali v odvozování rovnice pro první podmínku, a můžeme ho tedy vyjádřit například z použitého vztahu pro zrychlení

$$t_2 = \frac{2v_2 \sin\alpha}{a}\,.$$

Dosazením do předcházející rovnice pro vzdálenost l dostáváme rovnici vyjadřující druhou podmínku

$$l = \frac{2v_2^2 \cos\alpha \sin\alpha}{a}\,. \tag{2}$$

Řešení soustavy rovnic Nyní nám jen zbývá vyřešit soustavu těchto dvou rovnic. Postupujme dle nápovědy a snažme se nejprve nalézt hodnotu goniometrické funkce úhlu α. Zkusme použít tradiční dosazovací metodu, kdy si z jedné rovnice vyjádříme v_2 a tento výraz poté dosadíme za v_2 do druhé rovnice. Pro mírné zjednodušení výpočtů si můžeme všimnout, že v obou rovnicích se vyskytuje pouze v_2^2. Stačí nám tedy vyjádřit si v_2^2. Vyjádřeme si tedy druhou mocninu rychlosti z rovnice (1)

$$v_2^2 = \frac{2ad}{\sin^2\alpha}$$

a dosaďme tento výraz do rovnice (2)

$$l = \frac{4ad}{\sin^2\alpha}\frac{\cos\alpha \sin\alpha}{a} = \frac{4d}{\operatorname{tg}\alpha}\,,$$

kde jsme mimo jiné využili vztah pro podíl sinu a kosinu z druhé nápovědy. Nyní již konečně můžeme přímo vyjádřit α

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4d}{l} \doteq 4{,}6\,^\circ$$

a dosadit tuto hodnotu do vztahu pro v_2^2. Ten nám již stačí odmocnit a dosadit v něm za a a α (vztah pro a jsme odvodili již v první podúloze)[4]

$$v_2 = \sqrt{\frac{2ad}{\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2Uq}{m\sin^2\left(\operatorname{arctg}\frac{4d}{l}\right)}} \doteq 7{,}4\cdot 10^5 \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Aleš Opl
`ales@vyfuk.mff.cuni.cz`

[4] Nabízí se zde ještě otázka, zda by kombinaci $\sin \operatorname{arctg} x$ nebylo možné vyjádřit nějak elegantněji. Možné to skutečně je. Ptáte-li se jak, doporučujeme vám, abyste se zkusili zamyslet nad tím, co tento výraz vlastně znamená.

Úloha III.E ... Voda plná napětí

7 bodů; průměr 4,70; řešilo 27 studentů

Kapaliny se od plynů liší tím, že zatímco plyny se snaží rozprostřít do celého objemu nádoby, ve které se nachází, kapaliny se naopak shlukují do kapek. Příčinou tohoto shlukování jsou takzvané povrchové síly, *které matematicky popisujeme pomocí veličiny nazývané* povrchové napětí. *Povrchové napětí se značí σ a je definováno jako množství práce ΔW, kterou musíme vykonat, abychom povrch kapaliny zvětšili o jednotkovou plochu $\Delta S = 1\,\mathrm{m}^2$, tedy:*

$$\Delta W = \sigma \Delta S$$
$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S}\,.$$

V praxi to znamená, že kapaliny s velkým povrchovým napětím (například rtuť) se snaží tvořit takové kapky, které mají co nejmenší povrch, což platí pro kapky ve tvaru kuliček.

Dalším příkladem je pak velikost kapek při odkapávání. Při oddělení kapky od zbytku kapaliny se totiž zvětší celkový povrch kapaliny (můžete si to představit tak, že jedna větší kapka má menší povrch než dvě menší kapky dohromady) a síla, která tuto změnu zajišťuje a tedy i koná práci, je tíha kapek. Větší povrchové napětí pak znamená větší kapky. Konkrétně se dá odvodit vztah:

$$\sigma = \frac{mg}{\pi d}\,,$$

kde m je hmotnost jedné kapky, g je tíhové zrychlení a d je průměr krčku kapky těsně před odkápnutím, který můžeme aproximovat průměrem otvoru, ze kterého kapalinu odkapáváme.

Měření povrchového napětí s využitím tohoto vztahu se nazývá kapková metoda. *Pomocí této metody změřte povrchové napětí vody.*

Teorie

Povrchové napětí vody budeme měřit nepřímo pomocí kapkové metody, popsané v zadání. Použijeme vzorec, podle kterého pro povrchové napětí platí:

$$\sigma = \frac{mg}{\pi d}\,, \tag{3}$$

kde tíhové zrychlení g a hodnota π jsou v našem měření konstanty a hmotnost kapky m a průměr otvoru d, kterým aproximujeme průměr krčku před odkápnutím, budeme měřit. Hmotnost kapky určíme tak, že zvážíme více kapek a naměřenou hodnotu vydělíme jejich počtem. Tím dosáhneme větší přesnosti, než kdybychom se pokoušeli změřit hmotnost jen jedné kapky. Protože voda je kapalina, změříme objem většího počtu kapek a pak z tabulkové hodnoty hustoty při teplotě našeho měření a naměřeného objemu spočítáme hmotnost. Průměr tenkého otvoru změříme pomocí jehly na šití. Protože jehla se zužuje postupně, stačí najít takovou jehlu, která se do otvoru vejde jen částečně. Poté pomocí mikrometru změříme průměr nejsilnějšího místa jehly, které se nám do otvoru ještě povedlo zasunout. Měření pro větší přesnost provedeme vícekrát.

Podmínky

Měření jsme prováděli při teplotě 22 °C a tlaku 103 kPa na území České republiky.

Pomůcky

Voda, nádoba s malým kulatým otvorem – v našem případě injekční stříkačka, malý odměrný válec, jehla na šití, kterou lze do malého kulatého otvoru zasunout jen částečně, lihová fixa, mikrometr.

Postup

1. Jehlu jsme zlehka zčásti zastrčili do malého kulatého otvoru, lihovou fixou jsme si označili místo, které se do otvoru ještě vešlo, a jehlu vyndali.

2. V označeném místě jsme pomocí mikrometru změřili průměr jehly.

3. Měření průměru otvoru jsme pro dosažení větší přesnosti zopakovali celkem pětkrát.

4. Do odměrného válce, který má nejmenší dílek o velikosti 0,1 ml, jsme nakapali z injekční stříkačky tolik kapek vody, že spodní hladina vody v odměrném válci dosáhla hodnoty 1 ml.

5. Celkovou hmotnost kapek jsme spočítali jako součin objemu kapek (1 ml) a hustoty vody při 22 °C (teplotě našeho měření). Pro získání hmotnosti jedné kapky jsme celkovou hmotnost kapek vydělili jejich počtem.

6. Naměřené a vyhledané hodnoty m, g a d jsme dosadili do vzorce (3) pro výpočet povrchového napětí σ. Tímto výpočtem jsme zjistili hodnotu povrchového napětí vody při teplotě 22 °C.

Výsledky

Hodnoty, které jsme naměřili, jsou uvedeny v tabulce 1.

n	$\frac{d}{\text{mm}}$
1	2,50
2	2,49
3	2,51
4	2,52
5	2,51
průměr	2,51

Tab. 1: Průměr otvoru d

Směrodatnou odchylku průměru získáme ze vzorce:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}\,,$$

kde N je počet měření, x_i je hodnota i-tého měření a $\bar{x}$ je průměrná naměřená hodnota. Po dosazení a zaokrouhlení jsme získali výsledek $s = 0{,}005\,\mathrm{mm}$. Tuto chybu ještě musíme sečíst s chybou měřidla. V našem případě mikrometr měří s přesností na 0,01 mm, chyba je tedy 0,005 mm. Tuto chybu přičteme[5] k směrodatné odchylce a zjistíme, že vnitřní průměr otvoru, ze kterého odkapáváme vodu, je $(2{,}51 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}$.

Hmotnost kapky m Kapek jsme v jednom mililitru napočítali 20. Objem jedné kapky proto byl 0,05 ml. Protože nejmenší dílek na našem odměrném válci měl velikost 0,1 ml, byla chyba měření objemu všech dvaceti kapek polovina tohoto dílku, tedy 0,05 ml. Chybu měření objemu jedné kapky pak získáme vydělením hodnoty 0,05 ml počtem kapek, tedy 20. Chyba měření objemu jedné kapky tedy byla po zaokrouhlení $3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{ml}$. Hmotnost kapky pak spočítáme jako součin objemu jedné kapky a hustoty vody při teplotě 22 °C $\rho = 998\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Tak získáme hmotnost jedné kapky $m = (50 \pm 3)\,\mathrm{mg}$, přičemž chybu jsme získali opět vynásobením chyby objemu hustotou vody.

Výpočet povrchového napětí σ Měřením, výpočty a hledáním v tabulkách jsme došli k následujícím hodnotám:

$$
\begin{aligned}
m &= (5{,}0 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}\\
d &= (2{,}51 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\\
g &= 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.
\end{aligned}
$$

Dosazením do vzorce pro výpočet povrchového napětí σ získáme:

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{5{,}0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{\pi \cdot 2{,}51 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}\\
\sigma &= 62 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}\,.
\end{aligned}
$$

Ještě by bylo dobré spočítat chybu tohoto vypočítaného výsledku. Z pravidel pro počítání chyb vyplývá, že pokud se výsledná veličina počítá jako součin nebo podíl, tak sčítáme relativní chyby. Neboli:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta\sigma}{\sigma} &= \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta d}{d}\\
\Delta\sigma &= 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}\,.
\end{aligned}
$$

Změřili jsme tedy, že povrchové napětí vody je rovno přibližně $(62 \pm 4) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$.

Diskuze

Tabulková hodnota povrchového napětí vody je rovna $\sigma_\mathrm{t} = 72{,}75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Námi změřené povrchové napětí je tedy poměrně menší než skutečná hodnota. I když naše měření bylo zatíženo relativně velkou chybou, způsobenou z velké části nepřesným určením objemu jedné kapky, stále je na základě naší vypočítané chyby námi změřená hodnota menší, než bychom čekali.

[5] V praxi se obvykle tyto chyby kombinují jiným způsobem, zde se však spokojíme s prací s tzv. *hrubými chybami*, které se sčítají právě tímto jednoduchým způsobem.

Je to hlavně proto, že při odkapávání vody měl krček kapky těsně před odkápnutím o něco menší průměr než otvor, jehož průměr jsme použili. Ze vzorce pro výpočet povrchového napětí je jasné, že pokud by se nám podařilo tento menší průměr změřit, tak bychom pravděpodobně dostali vyšší hodnoty σ a více bychom se přiblížili tabulkové hodnotě.

Mezi další zdroje chyb patří, že jsme v našem měření použili obyčejnou kohoutkovou vodu, ve které je rozpuštěné nezanedbatelné množství solí a dalších látek, zatímco tabulkové hodnoty jsou stanovovány pro čisté látky (tedy pro destilovanou vodu). I přes odchylku námi naměřené hodnoty od tabulkové hodnoty je naše měření cenné. Vždyť se nám povedlo určit povrchové napětí blízké tabulkové hodnotě, a to jen s použitím experimentálního vybavení, které máme doma.

Závěr

Změřili jsme povrchové napětí vody pomocí kapkové metody a získali jsme hodnotu $\sigma = (62 \pm \pm 4) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Pozorovali jsme odlišné chování od námi idealizovaného stavu a vysvětlili jsme tak odchylku našeho měření od tabulkové hodnoty.

Jakub Savula
savula@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.V ... Hravě to přeskočím!

7 bodů; průměr 4,00; řešilo 16 studentů

Jirka se jednoho dne vydal na menší plavbu po řece na voru. Cestou potkal Aleše, který dostal stejný nápad, a po chvilce se rozhodl, že by si s ním rád popovídal. Alešův vor se však nacházel až kousek za Jirkovým. Jirka je zdatný ve sportech a ví o sobě, že dokáže na zemi bez rozběhu snadno doskočit do vzdálenosti $D = 2\,\mathrm{m}$. Když Jirka odhadl, že vzdálenost, do níž musí skočit, aby bezpečně dopadl na Alešův vor, je $d = 1{,}8\,\mathrm{m}$, tak řekl: „Hravě to přeskočím!“. Zapomněl však, že se nenachází na zemi, ale na řece, kde se vor může bez tření pohybovat.

1. *Podaří se Jirkovi bezpečně skočit na Alešův vor, pokud Jirka váží $m = 70\,\mathrm{kg}$ a vor $M = = 400\,\mathrm{kg}$? Uvažujte, že je vor dost velký, takže se při odrazu nezmění jeho výška nad hladinou, ani nijak neovlivní svislou složku Jirkovy rychlosti.*

2. *Předpokládejme nyní, že vzdálenost vorů byla taková, že Jirka na Alešův vor doskočil. Jaký bude poměr rychlostí obou vorů (vůči hladině) poté, co Jirka dopadne na ten Alešův? Aleš váží také $m = 70\,\mathrm{kg}$ a hmotnost jeho voru je rovněž $M = 400\,\mathrm{kg}$.*

1. Jirkův skok považujeme za šikmý vrh, po odrazu má tedy Jirkova rychlost vodorovnou a svislou složku. Svislá složka určuje, jaký čas Jirka stráví ve vzduchu (mohli bychom spočítat, že tato doba je rovna $2v_y/g$, kde v_y je svislá složka rychlosti, ale v této úloze to nebudeme potřebovat). Ze zadání víme, že se svislá složka rychlosti nezmění, a tak se nezmění ani doba letu. Z této doby a vodorovné složky rychlosti spočítáme, jak daleko Jirka doskočí. Pokud označíme vodorovnou složku rychlosti u a dobu letu T, tak platí:

   $$D = uT\,,$$

   neboť pohyb ve vodorovném směru je rovnoměrný přímočarý.

Zbývá vyřešit, jak velká je tato vodorovná složka rychlosti při odrazu na voru. K tomu si musíme rozmyslet, jak fungují svaly. Představme si, že házíme rukou různě těžké kameny. Velmi těžký kámen zvládneme urychlit jen na malou rychlost, neboť naše ruka zvládne působit jen omezeně velkou silou. Když budeme postupně hmotnost kamenů zmenšovat, tak se bude jejich rychlost zvětšovat. Od určitého okamžiku ale zjistíme, že už se nám kameny nedaří hodit rychleji. Je to proto, že zvládneme švihnout rukou jen omezenou maximální rychlostí. Podobně když se snažíme doskočit do co největší vzdálenosti, jsme omezeni jak maximální silou, tak rychlostí švihu.

Nyní se zamysleme nad naší úlohou. Když se Jirka odráží od voru, tak se opět snaží doskočit do co největší vzdálenosti. Máme tedy dvě možnosti, buď švihne nohama stejně rychle a tedy získá stejnou rychlost vůči voru, nebo zvládne působit na vor stejnou silou (a tedy švihne nohama rychleji). V obou případech je však jeho výsledná vodorovná rychlost vůči hladině *menší* než na zemi. Je to proto, že se vor při odrazu posune dozadu, jak ukážeme za chvíli.

Zdá se tedy, že máme dva různé předpoklady, ze kterých můžeme při řešení úlohy vycházet. Který z nich je správný? Nebo jsou správné oba? To záleží na člověku. Někteří lidé mají dost silné nohy, takže jsou při skoku na zemi omezeni pouze rychlostí švihu, jiní zase dokáží švihnout velmi rychle, ale síla jim chybí. V principu jsou tedy možné obě varianty. Protože nemáme zadáno, jak silný Jirka je, budeme oba předpoklady považovat za správné. Získáme tak dvě různá řešení úlohy, která budeme obě považovat za správná (mohli bychom ještě přemýšlet například o tom, že je Jirka překvapen, že se vor rozpohybuje apod. a na základě toho dát přednost jednomu nebo žádnému z předpokladů, ale zde se spokojíme s tím, že jsou oba správné).

(a) Předpokládejme, že Jirka získá při skoku vždy stejnou rychlost vůči podložce. Poznamenejme, že slovní spojení „vůči podložce“ je důležité, neboť při odrazu od voru se vor rozpohybuje. Ze zadání víme, že svislá složka Jirkovy rychlosti se nezmění, a nezmění se tak ani doba letu. Vodorovná složka rychlosti však bude vůči hladině vody menší o rychlost voru V, tedy:

$$v = u - V\,,$$

kde v je vodorovná složka Jirkovy rychlosti vůči hladině. Je to proto, že při odrazu se vor začne pohybovat rychlostí V opačným směrem, než Jirka skáče. Velikost této rychlosti dokážeme spočítat, neboť víme, že celková hybnost Jirky a voru byla před odrazem nulová. Na systém nepůsobí žádná výsledná vnější síla, hybnost Jirky a voru se tedy zachová, proto bude platit:

$$0 = MV - mv\,,$$
$$V = \frac{m}{M}v\,.$$

V rovnici se objevilo znaménko mínus, protože rychlosti mají navzájem opačný směr. O rychlosti voru V zároveň víme, že pro ni platí $v = u - V$, tedy:

$$v + \frac{m}{M}v = u\,,$$
$$v = \frac{M}{M+m}u\,.$$

Vodorovnou složku rychlosti už známe, zbývá spočítat vzdálenost, do které Jirka doskočí. Viděli jsme, že se doba letu nezmění a že je rovna $T = D/u$. Z toho získáme délku skoku s:

$$s = vT = \frac{v}{u}D$$

$$s = \frac{M}{M+m}D = 1{,}7\,\mathrm{m}\,.$$

Jirka tedy za těchto předpokladů na Alešův vor nedoskočí.

(b) Nyní předpokládejme, že Jirka zvládne při skoku švihnout nohama rychleji a při tom působit na vor stále stejnou silou. Znamená to, že při odrazu získá stejnou rychlost vůči hladině? Ne, protože část energie se předá voru. Uvědomme si proč. Na pevné zemi můžeme Jirkův skok chápat tak, že Jirka pokrčí nohy a při odrazu na něj působí síla, dokud se jeho nohy nenarovnají. Pokud bude tato síla konstantní (pomocí pokročilejší matematiky lze ukázat, že bychom dostali stejný výsledek i pro nekonstantní sílu), bude vykonaná práce rovna:

$$W = Fx\,,$$

kde F je působící síla a x je vzdálenost, o kterou se nohy pokrčí. Pokud však bude skok probíhat na voru, tak se při odrazu vor v důsledku zákona zachování hybnosti posune a na Jirku i na vor působí síla F podél kratší dráhy než x. Celková práce vykonaná v obou případech je však stále rovna $W = Fx$, a tedy platí:

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2\,,$$

kde u je vodorovná rychlost při skoku na zemi, v je vodorovná rychlost vůči hladině a V je rychlost voru. Tento zákon zachování energie ještě doplníme o zákon zachování hybnosti:

$$MV = mv\,,$$

$$V = \frac{m}{M}v\,,$$

podobně jako v části 1a. Zkombinováním těchto dvou rovnic získáme:

$$u^2 = v^2 + \frac{M}{m}\cdot\left(\frac{m}{M}v\right)^2\,,$$

$$v = \sqrt{\frac{M}{m+M}}u\,.$$

Vzdálenost, do které Jirka doskočí, je pak rovna:

$$s = vT = \frac{v}{u}D\,,$$

$$s = \sqrt{\frac{M}{M+m}}D = 1{,}85\,\mathrm{m}\,.$$

Skutečně vyšlo, že pokud Jirka zachová působící sílu, tak doskočí dále, v tomto případě dokonce až na vor. Tento výsledek je tedy v souladu s naší původní úvahou, že aby Jirka zvládl působit stejnou silou, musí švihnout nohama rychleji, a získat tak větší rychlost.

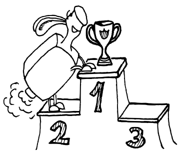
2. Uvažujeme, že se vory na počátku nepohybují ani vůči sobě, ani vůči hladině (není to sice v zadání specifikováno, ale bez tohoto předpokladu by úlohu nešlo vyřešit). Celková hybnost tohoto systému je tedy na počátku nulová a opět uvažujeme, že nepůsobí vnější síla, takže bude celková hybnost nulová i po Jirkově skoku.

   Když označíme W rychlost Alešova voru a uvědomíme si, že na něm na konci stojí Jirka i Aleš (dohromady mají hmotnost $2m$), tak ze zákona zachování hybnosti dostaneme:

$$MV = (M + 2m)W\,,$$
$$\frac{V}{W} = \frac{2m + M}{M} = 1{,}35\,.$$

   Poměr velikostí obou rychlostí je tedy roven 1,35 a rychlosti mají opačný směr.

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	43	129
1.	*Vojtěch Reif*	ZŠ u sv. Štěpána Praha 2	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**42**
2.–3.	*Jan Foldyna*	Anglofonní základní škola, z. ú.	5	5	–	0	–	–	–	**10**	**28**
2.–3.	*Valentýna Sochorová*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**28**
4.	*Jakub Chum*	G Nad Štolou, Praha	5	5	–	–	–	5	–	**15**	**25**
5.	*Agáta Húšťavová*	European School Luxembourg II	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**21**
6.	*Tomáš Rataj*	ZŠ Stupkova, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**14**
7.	*Antonín Papoušek*	G Volgogradská 6a, Ostrava	5	2	–	–	–	–	–	**7**	**11**
8.	*Filip Němec*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**3**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	43	129
1.	*Matěj Křivánek*	ZŠ T. G. M. Mor. Budějovice	5	5	3	6	–	3	5	**27**	**83**
2.	*Adam Houdek*	ZŠ a MŠ , Březová	5	5	–	–	4	–	7	**21**	**73**
3.	*Matěj Ondrušek*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	5	4	2	0	1	3	–	**15**	**55**
4.	*Bartoloměj Stoklásek*	ZŠ Troubelice	5	4	6	6	4	–	–	**25**	**54**
5.	*Květa Bouchalová*	G, Olomouc-Hejčín	5	5	3	0	–	5	–	**18**	**52**
6.	*Antonín Středa*	ZŠ a MŠ Lutín	5	5	6	–	–	–	–	**16**	**45**
7.	*Jáchym Turner*	G J. Vrchlického, Klatovy	5	2	6	–	–	5	1	**19**	**44**
8.	*Emma Burešová*	Jiráskovo G, Náchod	4	3	–	0	–	–	–	**7**	**39**
9.	*Eliška Knopfová*	ZŠ J. A. Komenského Hradec Králo	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**35**
10.	*Daniel Strašil*	G Christiana Dopplera, Praha	5	3	–	–	–	–	–	**8**	**34**
11.	*Hana Bayerová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**33**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**129**
12.	*Jáchym Šleška*	ZŠ Haškova, Uničov	5	3	–	–	–	–	–	**8**	**32**
13.	*Klára Zíková*	G J. Vrchlického, Klatovy	5	4	2	0	–	–	–	**11**	**31**
14.	*Klára Valentová*	ZŠ Hálkova, Olomouc	5	2	–	–	–	–	–	**7**	**26**
15.–16.	*Tereza Strašilová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
15.–16.	*Matylda Svobodová*	ZŠ Novoměstská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
17.	*Šimon Novák*	Nový PORG, Praha	5	4	–	–	–	–	–	**9**	**19**
18.–19.	*Dmitrij Petreckyj*	Fakultní ZŠŠ PedF UK Praha 5 - S	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
18.–19.	*Kateřina Zubálová*	ZŠ Stupkova, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
20.	*Sofie Desnicová*	G, Litovel	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
21.	*Martin Maláč*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
22.–25.	*Mikuláš Glozar*	ZŠ Masarova, Brno	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**15**
22.–25.	*Erik Hojgr*	ZŠ Hálkova, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
22.–25.	*Lukáš Lizúch*	Masarykovo G, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
22.–25.	*Alexandra Sochorová*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
26.	*Beáta Mudráková*	ZŠ a MŠ Husova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
27.	*Matyáš Churavý*	EKO G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
28.	*Matěj Illner*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
29.–30.	*Sari Attar*	ZŠ a MŠ Praha 5 - Hlubočepy	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
29.–30.	*Ondřej Kulhánek*	FZŠ prof. O. Chlupa, Praha	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**8**
31.	*Marek Šoltés*	ZŠ Svážná, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
32.	*Sofia Husáková*	Soukromá ZŠ UNIVERZUM s.r.o. Pra	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**5**
33.	*Josef Povolný*	ZŠ Školní ul., Hrádek nad Nisou	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**114**
1.	*Jana Feldbabelová*	ZŠ Jemnice	–	5	6	6	7	4	7	**35**	**107**
2.	*Sámo Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	4	7	7	4	**33**	**88**
3.	*Max Menčík*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	5	6	6	4	4	4	**29**	**86**
4.	*Petr Barták*	Slovanské G, Olomouc	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**59**
5.	*Dominik Kudr*	ZŠ a MŠ Studenec	–	5	–	6	–	4	–	**15**	**50**
6.	*Filip Borkovec*	G, Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**42**
7.	*Juraj Štefina*	ZŠ sv. Margity Púchov	–	5	5	5	–	–	4	**19**	**41**
8.	*Patrik Piňos*	ZŠ Gajdošova, Brno	–	5	–	0	–	3	–	**8**	**40**
9.	*Aneta Mičulková*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**39**
10.	*Matěj Knop*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	–	–	–	4	4	**12**	**35**
11.	*Julie Krčmařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	4	2	–	–	–	–	**6**	**27**
12.–14.	*Filip Andráši*	G, Křenová, Brno	–	5	4	4	–	–	–	**13**	**26**
12.–14.	*Tomáš Čanda*	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
12.–14.	*Kateřina Hujová*	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
15.	*Magdaléna Křížová*	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	–	–	–	–	–	–	–	–	**25**
16.	*Josef Turek*	G, Šumperk	–	4	–	0	–	–	–	**4**	**24**
17.	*Zuzana Kýrová*	ZŠ nám. Svornosti, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
18.–20.	*Aleš Antoň*	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
18.–20.	*Josef Eliáš Formánek*	G, Křenová, Brno	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**21**
18.–20.	*Adam Jurtík*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
21.	*Karolína Kačalková*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
22.–23.	*Alžběta Sochorová*	G, Blovice	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**19**
22.–23.	*Štěpán Zajačik*	ZŠ Školní, Chomutov	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
24.–25.	*Matěj Purkert*	G, Písnická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**114**
24.–25.	*Linda Rokosová*	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
26.–27.	*Michaela Chovancová*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**17**
26.–27.	*Lucie Kohoutková*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
28.–30.	*Ondřej Bohatý*	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
28.–30.	*Lukáš Hobza*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
28.–30.	*Renata Petlanová*	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
31.	*Filip Procházka*	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
32.	*Patrik Hrebinec*	ZŠ Na Příkopech, Chomutov	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
33.–36.	*Marek Petlan*	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
33.–36.	*Erik Rössler*	PORG, Praha	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**13**
33.–36.	*Tereza Vargová*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
33.–36.	*Timotej Vašina*	ZŠ a MŠ Praha 6 - Dejvice	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
37.	*Šimon Václavík*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
38.	*Vít Foltas*	ZŠ a MŠ Spálov	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**9**
39.	*Jakub Brázda*	ZŠ Politických vězňů, Slaný	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
40.–43.	*Tomáš Dolanský*	G Týn nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
40.–43.	*Marína Kiliánová*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
40.–43.	*Eva Kundratová*	ZŠ Komenského II Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
40.–43.	*Jiří Zakuťanský*	G, Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
44.	*Valerie Labuťová*	G, Nový Bydžov	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**114**
1.	*Matej Karpáč*	ZŠ Jána Švermu	–	5	6	6	7	7	5	**36**	**97**
2.	*Kamilo Tomáš*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	6	–	6	4	**27**	**87**
3.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	3	6	4	4	7	4	**28**	**84**
4.	*Alena Mouchová*	G, Český Krumlov	–	5	3	4	2	5	4	**23**	**82**
5.	*Matěj Šebesta*	Masarykovo G, Vsetín	–	5	4	2	4	5	1	**21**	**67**
6.–7.	*Ondřej Porod*	G Týn nad Vltavou	–	5	6	–	3	5	–	**19**	**65**
6.–7.	*Martin Vagner*	G, Voděradská, Praha	–	4	6	6	–	4	–	**20**	**65**
8.	*Monika Dlouhá*	G Matyáše Lercha, Brno	–	4	4	4	1	2	1	**16**	**63**
9.	*Natálie Lászlóová*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	5	6	1	4	–	**21**	**62**
10.	*Michaela Urbanová*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	2	4	–	4	–	**15**	**55**
11.	*David Laušman*	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**54**
12.	*Denis Peťka*	G J. Škody, Přerov	–	5	–	6	–	5	–	**16**	**52**
13.	*Filip Groh*	ZŠ Liberec 10	–	3	3	0	4	4	6	**20**	**50**
14.	*Martin Motyčka*	ZŠ Nad Vodovodem, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	**49**
15.	*Lucie Endlová*	G O. Havlové, Ostrava	–	5	6	–	–	5	3	**19**	**48**
16.–17.	*Vít Kubal*	G, Český Krumlov	–	5	3	0	4	4	–	**16**	**46**
16.–17.	*Tereza Kubínová*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**46**
18.	*Vojtěch Černý*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**41**
19.	*Antonín Plašil*	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	**40**
20.	*Klaudie Zemene*	G a ZUŠ, Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	–	**39**
21.–22.	*Marek Opluštil*	G, Litovel	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**38**
21.–22.	*Petra Prknová*	ZŠ Jemnice	–	2	–	–	–	6	–	**8**	**38**
23.	*Kristýna Otevřelová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	–	–	–	–	–	–	–	**37**
24.	*Ondřej Kočur*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**35**
25.	*Michael Ambros*	G, Olomouc-Hejčín	–	4	3	–	–	–	–	**7**	**34**
26.	*Jan Hrubec*	OPEN GATE Říčany	–	–	–	–	–	–	–	–	**33**
27.–28.	*Jana Pohořilská*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**32**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**III**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**114**
27.–28.	*Vlasta Suchá*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	**32**
29.	*Natálie Jochová*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	–	–	–	7	–	**12**	**31**
30.	*Filip Gašparín*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**30**
31.–32.	*Anežka Krčmová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
31.–32.	*David Manhalter*	EKO G, Brno	–	5	2	5	–	–	–	**12**	**29**
33.–35.	*Adam Cieślar*	ZŠ Divišov	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
33.–35.	*Jana Fišerová*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**26**
33.–35.	*Pavel Zachariáš*	G Tišnov	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**26**
36.–37.	*Jan Motlík*	G Opatov, Praha	–	4	4	4	–	–	–	**12**	**25**
36.–37.	*Ondřej Rejman*	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	–	–	–	–	–	–	–	**25**
38.	*Ondřej Zapletal*	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	5	2	–	–	–	–	**7**	**24**
39.	*Leonard Lindvay*	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
40.	*Klára Hašová*	G, Křenová, Brno	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**20**
41.–43.	*Max Denemarek*	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
41.–43.	*Pavlína Jurásková*	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
41.–43.	*Šimon Klousek*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
44.	*Martin Landík*	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
45.–47.	*Nicol Plšková*	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
45.–47.	*Petra Šilerová*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
45.–47.	*Vítek Vácha*	ZŠ a MŠ Wolkerova, Havl. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
48.	*Natálie Manoušková*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**15**
49.–53.	*Šimon Hanák*	Cyrilomet. G a SOŠ pg., Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
49.–53.	*Ondřej Pavelka*	ZŠ a MŠ Pňovice, Litovel	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
49.–53.	*Jakub Štěpánek*	ZŠ Nad Vodovodem, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
49.–53.	*Petr Vaško*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
49.–53.	*Julie Vlčanová*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
54.	*Josef Hugo Holub*	ZŠ Gajdošova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
55.	*Jan Herzig*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
56.–57.	*Vojtěch Kužílek*	ZŠ Heyrovského, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
56.–57.	*Julie Svobodová*	ZŠ Chomutovská, Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
58.	*Kevin Nguyen*	ZŠ Chomutovská, Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
59.	*Ema Vondráčková*	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
60.	*Barbora Barnatová*	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
61.–63.	*Mikuláš Hořenek*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	0	–	–	–	–	**0**	**6**
61.–63.	*Lenka Hromádková*	G, Hlinsko	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
61.–63.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
64.	*Marek Hromada*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
65.–66.	*Marie Steinhauserová*	ZŠ Strmilov	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**
65.–66.	*Šimon Tureček*	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**
67.	*Štěpán Železný*	ZŠ Hamry, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**1**
68.–69.	*Mikoláš Palouda*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**0**
68.–69.	*Štěpán Petr*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**0**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

/ksvyfuk ***@ksvyfuk***

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.