

Úloha IV.E ... Husté sklo

7 bodů; průměr 4,76; řešilo 25 studentů

Určete hustotu skla pomocí Archimédova zákona. Prázdnou skleněnou nádobu vložte do vody a přilévejte vodu, dokud její hrdlo není na úrovni hladiny. Z objemů skla, sklenice a nalité vody určete hustotu skla.

Přesnost metody porovnejte s dalším způsobem měření hustoty.

Teorie

Hustota je fyzikální veličina udávající hmotnost jednotky objemu dané látky. Můžeme ji měřit přímo (pomocí hustoměru), častěji se však využívá měření nepřímé. Asi nejjednodušší a nejčastější je změření objemu V (pomocí např. odměrného válce) a hmotnosti m a spočítání hustoty pomocí vzorce $\rho = m/V$. My ji však máme měřit jinak – s využitím Archimédova zákona.

Na těleso plovoucí ve vodě (nebo jakékoliv jiné kapalině) působí dvě základní síly: tíhová síla F_G a vztlaková síla vody (kapaliny) F_{vz} . Tyto dvě síly jsou v případě, že je těleso v klidu, v rovnováze. (Pokud v rovnováze nejsou, těleso se ponoří/vystoupá na hladinu a dojde tak k jejich vyrovnání). My se budeme řídit zadáním. Dojde tak k situaci, kdy v měřené nádobě (v našem případě ve zkumavce) bude nějaké množství vody. Tato soustava pak bude celá plovat v jiné, větší nádobě. Tíhová síla působí na zkumavku i na vodu v ní a můžeme ji vyjádřit jako

$$F_G = m_S g + m_V g,$$

kde m_S značí hmotnost prázdné sklenice, m_V hmotnost vody ve sklenici a g tíhové zrychlení (pokud bychom chtěli být přesní, museli bychom započítat i hmotnost vzduchu uvnitř sklenice, ta je však velmi malá, proto ji zanedbáváme). Vztlaková síla závisí na ponořeném objemu celého tělesa, tedy skla i vnitřního objemu zkumavky. Můžeme ji vyjádřit následovně:

$$F_{vz} = V_C \rho_V g,$$

kde ρ_V značí hustotu vody a V_C celkový ponořený objem zkumavky. Tyto dvě síly nyní můžeme dát do rovnosti a vztah upravit (za hmotnosti sklenice i vody v ní dosadíme dle vzorce $m = \rho V$):

$$\begin{aligned} m_S g + m_V g &= V_C \rho_V g, \\ \rho_S V_S + \rho_V V_V &= V_C \rho_V, \\ \rho_S &= \rho_V \cdot \frac{V_C - V_V}{V_S}. \end{aligned}$$

Vidíme, že ve finálním vzorci nám opravdu figurují jen hustota vody $\rho_V = 0,997 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ a tři neznámé objemy, o nichž se mluví v zadání: objem skla zkumavky V_S , objem vody přilité do zkumavky V_V a celkový objem zkumavky V_C (tedy součet V_S a vnitřního objemu zkumavky).

Postup a výsledky měření

Během měření se budeme řídit návodem uvedeným v zadání. Do odměrného válce nalijeme vodu a vložíme do něj malou skleněnou zkumavku. Do ní budeme pipetou postupně přilévat vodu, dokud se okraj zkumavky nedostane do stejné úrovně jako hladina vody ve válci. Hodnoty naměříme pro dvě zkumavky vyrobené ze stejného druhu skla, u každé provedeme 5 měření. Naměřené hodnoty i vypočítané hustoty naleznete v tabulce 1.

Bohužel, zvolené vybavení nebylo pro experiment dobrou volbou. Vnitřní objem zkumavky a množství vody do ní přidané bylo sice změřeno pomocí pipety velice přesně (nejistota 0,05 ml), ale odměrný válec měl stupnici s dílky po 1 ml a měření objemu zkumavky samotné má tak nejistotu desetkrát větší (0,5 ml). To je důvod, proč jsou v tabulce hodnoty, které byly měřeny pomocí odměrného válce (konkrétně V_S a V_C), zaokrouhleny na celé jednotky.

menší zkumavka				větší zkumavka			
V_V	V_S	V_C	ρ_S	V_V	V_S	V_C	ρ_S
ml	ml	ml	$\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$	ml	ml	ml	$\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$
1,8	5	15	2,63	2,6	6	19	2,73
1,7	5	15	2,65	2,7	6	19	2,70
1,8	5	15	2,63	2,7	6	19	2,70
1,9	5	15	2,61	2,6	6	19	2,73
1,7	5	15	2,65	2,8	6	19	2,69

Tab. 1: Naměřené hodnoty objemů a z nich vypočtené hustoty skla

Nyní se podívejme na nejistotu měření. Prováděli jsme nepřímé měření, u něhož se skládají chyby jednotlivých kroků postupu. V našem případě je přesný výpočet chyb poměrně náročný, ale můžeme se pokusit chybu alespoň odhadnout. Představíme si, že při měření objemu se jeho skutečná hodnota nacházela v intervalu $[V - \sigma_V, V + \sigma_V]$, kde V je naměřená hodnota a σ_V je její nejistota. Chybu hustoty poté odhadneme tak, že vypočítáme nejmenší a největší možnou hodnotu, které by mohla nabývat, pokud se hodnoty objemů nachází ve zmíněných intervalech¹.

Zjišťovali jsme tři různé objemy (zkumavky samotné, její vnitřní objem a množství přilité vody), pomocí nichž jsme následně vypočítali hustotu. Chyby způsobené při měření pomocí pipety jsou zanedbatelné oproti chybě, ke které došlo při použití odměrného válce, jejíž hodnota činí 0,5 ml, což je tedy chyba u veličin V_C a V_S . Pro menší zkumavku tedy budeme předpokládat, že V_C je v intervalu $[14,5 \text{ ml}, 15,5 \text{ ml}]$ a V_S v intervalu $[4,5 \text{ ml}, 5,5 \text{ ml}]$. Jak vidíme, hustota bude nejmenší při dosazení hodnot $V_C = 14,5 \text{ ml}$ a $V_S = 5,5 \text{ ml}$ (za V_V dosadíme průměrnou hodnotu), čímž získáme hodnotu $2,3 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, a největší při dosazení hodnot $V_C = 15,5 \text{ ml}$ a $V_S = 4,5 \text{ ml}$, čímž získáme hodnotu $3,0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Z toho tedy můžeme odhadnout, že nejistota hustoty je polovina rozdílu těchto hodnot, tedy $0,35 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Při zaokrouhlení nejistoty na jedno desetinné místo a použití průměru vypočtených hustot dostaneme výsledek

$$\rho_S = (2,6 \pm 0,4) \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}.$$

Podobně můžeme postupovat i u větší zkumavky, čímž dospějeme k výsledku

$$\rho_S = (2,7 \pm 0,3) \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}.$$

Všimněme si, že hustota skla u větší zkumavky nám vychází mírně vyšší, než je tomu u zkumavky menší. Mohlo by se zdát, že nejsou vyrobené ze stejného druhu skla, pravděpodobněji však je, že rozdílné výsledky jsou způsobeny nepřesností měření (koneckonců intervaly, které nám vymezují chyby, mají celkem velký průnik, proto můžeme říci, že se v rámci chyb

¹Vzhledem k tomu, že chyby ve skutečnosti pouze vymezují oblasti, ve kterých se hodnoty nachází s určitou pravděpodobností, tak tento přístup není zcela správný. Dává nám ovšem dobrý odhad velikosti chyby.

obě hodnoty shodují). Pokud si zkusíme vyhledat hustotu skla na internetu, obvykle najdeme hodnotu $2,5 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. V tomto případě je pravděpodobně správně, že hodnoty nám vyšly o něco vyšší – objektem našeho zkoumání byly chemické zkumavky, které nejsou vyráběny z klasického skla. Vyšší hustotu v tomto případě tedy lze snadno odůvodnit.

Jiný způsob měření

Podle zadání bychom měli porovnat přesnost měření této metody s jiným postupem. Ke srovnání jsme zvolili postup zmíněný již v úvodu tohoto vzorového řešení – výpočet pomocí definičního vzorce pro hustotu $\rho = m/V$. Obě zkumavky jsme zvažili malou kapesní váhou s přesností na desetiny gramu, objem skla jsme již změřený měli z předchozí části s přesností na mililitry.

typ zkumavky	$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{\rho}{\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}}$
menší	12,6	5	2,52
větší	15,4	6	2,57

Tab. 2: Naměřené hodnoty hustoty skla – měření pomocí hmotnosti

A jaká bude nejistota měření v tomto případě? K jejímu spočítání využijeme vzorec pro zjištění celkové nejistoty při násobení/dělení:

$$\frac{u_\rho}{\rho} = \frac{u_m}{m} + \frac{u_V}{V},$$

kde ρ , m , V jsou naměřené a spočítané hodnoty hustoty, hmotnosti a objemu a u_ρ , u_m , u_V jsou nejistoty jednotlivých veličin. Dosazením získáme celkovou nejistotu a můžeme zapsat výsledky pro zkumavku menší (index m) i větší (index v):

$$\begin{aligned}\rho_m &= (2,5 \pm 0,3) \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}, \\ \rho_v &= (2,6 \pm 0,2) \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}.\end{aligned}$$

Závěr

Dvěma různými způsoby se nám povedlo změřit hustotu skla. Všechny výsledky se pohybují okolo hodnoty $2,6 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Relativní nejistota měření se pohybuje mezi 8 % a 16 %. Největší chyby byly způsobeny nevhodným vybavením (nedostatečně přesný odměrný válec) a lidskou chybou (odhadnutí momentu, kdy je okraj zkumavky na hladině vody).

Veronika Bartáková
vercab@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.