Úloha IV.5 ... Nebezpečný manévr

7 bodů; průměr 4,85; řešilo 13 studentů

Tom Cruise měl ve filmu Top Gun: Maverick za úkol připravit skupinu mladých vojáků na nebezpečnou misi. Součástí této mise bylo proletět ve stíhačce komplikovaným prostorem v omezeném čase. Let byl náročný i z důvodu velkých zrychlení, která Tom Cruise při letu pociťoval. Při jednom z manévrů napřed ve stíhačce stoupal pod úhlem 45 ° a poté provedl vertikální otočku o 90 ° tak, že na konci tohoto manévru klesal pod úhlem 45 °. Předpokládejte, že se během otočky stíhačka pohybovala po části kružnice rychlostí $300\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a že celý manévr trval 8 sekund.

1. *Spočítejte velikost maximálního pocitového zrychlení, které Tom Cruise při tomto manévru pociťoval (manévrem rozumíme let stíhačky po zmíněné části kružnice za účelem změny směru letu).*

2. *Porovnejte ho s minimálním pocitovým zrychlením při manévru a určete poměr $a_{\max}/a_{\min}$.*

Bonus: Tom Cruise si následně uvědomil, že způsob, kterým otočku provádí (tedy let po části kružnice), není zdaleka optimální. Zkuste se zamyslet nad tím, jaké může být nejmenší možné maximální zrychlení letadla. Následně také určete, po jaké trajektorii se letadlo v takovém případě bude pohybovat. Je to zároveň i trajektorie s nejmenším maximálním pocitovým zrychlením?
Poznámka: Pocitovým zrychlením rozumíme tíhu, kterou naše tělo pociťuje. Tedy například pokud stojíme v klidu na zemi, tak cítíme zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, i když naše tělo nezrychluje. Naopak astronauti na Mezinárodní vesmírné stanici se zrychleným pohybem pohybují, ale cítí stav beztíže.

1. Při manévru opíše Tom Cruise oblouk o středovém úhlu 90 °. Celková vzdálenost, kterou při tom urazí, je $s = vt$. Tedy pro poloměr kružnice R máme:

$$\frac{2\pi R}{4} = vt \Rightarrow R = \frac{2vt}{\pi}\,.$$

Dostředivé zrychlení tedy má velikost:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{\pi v}{2t}\,.$$

Nás však zajímá zrychlení, které Tom Cruise pocítí, což je celkové zrychlení v soustavě spojené s Tomem Cruisem. V té na něj působí tíhové zrychlení a odstředivé zrychlení, které má směr normálový ke kružnici. Z geometrie je zřejmé (viz obrázek 1), že vektorový součet těchto dvou bude největší v počátečním nebo koncovém bodě manévru. Jeho velikost můžeme spočítat tak, že si odstředivé zrychlení rozložíme na vertikální složku a_y a horizontální složku a_x. Ty vypočítáme jako [1]

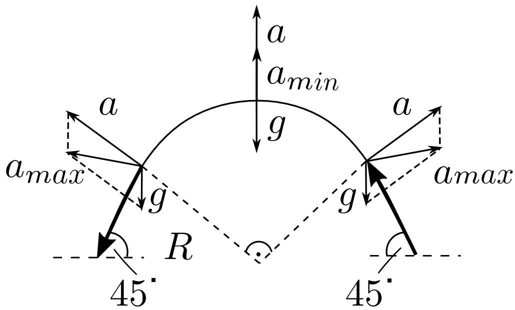
$$a_x = a\cos(45\,°)$$
$$a_y = a\sin(45\,°)\,.$$

[1] Zde nezáleží na tom, u které složky bude $\sin 45\,°$ a $\cos 45\,°$, jelikož jsou stejné.

Celkové vertikální zrychlení je tedy $a_y - g$ a celkové horizontální a_x. Abychom získali celkovou velikost pocitového zrychlení, stačí nám jen pomocí Pythagorovy věty sečíst jeho vertikální a horizontální složku.[2]

$$a_{\max} = \sqrt{(a_y - g)^2 + a_x^2} = \sqrt{a^2 \sin^2(45\,^\circ) - 2ag\sin(45\,^\circ) + g^2 + a^2\cos^2(45\,^\circ)}$$

$$a_{\max} = \sqrt{a^2 + g^2 - \sqrt{2}ag} = \sqrt{\left(\frac{\pi v}{2t}\right)^2 + g^2 - \frac{\sqrt{2}\pi v}{2t}g} = 52{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$



Obr. 1: Trajektorie stíhačky.

2. Nejmenší zrychlení bude v nejvyšším bodě trajektorie, neboť tam odstředivé zrychlení působí opačným směrem než tíhové (viz obrázek 1):

$$a_{\min} = a - g = \frac{\pi v}{2t} - g = 49{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,$$

a tedy

$$\frac{a_{\max}}{a_{\min}} = 1{,}07\,.$$

Bonus

Při tomto manévru se snažíme otočit letadlo ze stoupání pod úhlem $45\,^\circ$ do klesání pod úhlem $45\,^\circ$ za 8 sekund. Aby manévr byl co nejefektivnější, průměrné zrychlení musí mít směr změny rychlosti. (Při letu po kružnici se tento směr mění, a tak nemůže být optimální trajektorií.) Změna rychlosti má směr dolů a velikost

$$\Delta v = 2v_y = 2v\cos(45\,^\circ) = \sqrt{2}v\ .$$

Minimální zrychlení je menší nebo rovno průměrnému a maximální zrychlení je větší nebo rovno průměrnému. Aby tedy maximální zrychlení bylo co nejmenší, musí být rovno průměrnému (pokud to situace umožňuje, což v našem případě platí) nebo-li:

$$a_{\max} = \frac{\Delta v}{t} = \frac{\sqrt{2}v}{t} = 53\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

[2] Ke stejnému výsledku můžeme dospět i s využitím kosinové věty.

Když se letadlo pohybuje s konstantním zrychlením, které míří směrem dolů, je to analogické se šikmým vrhem v tíhovém poli Země. Trajektorií tedy bude parabola.

Pro pociťované zrychlení se opět musíme podívat do soustavy spojené s Tomem Cruisem. Působí na něj setrvačné zrychlení o velikosti $a_{\max}$ směrem nahoru a odečítá se tedy s tíhovým zrychlením, které působí směrem dolů.

Už jsme si ukázali, že na stíhačku při této trajektorii působí nejmenší možné zrychlení. Je tedy jasné, že i pocitové zrychlení bude nejmenší možné.

Hynek Jakeš
hynek@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.