

# výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

v rukou držíte v pořadí již čtvrtou brožurku letošního ročníku Výfuku. Tentokrát se podíváme například na to, jak je vysoká budova Matfyzu, jakým způsobem z letadla bombardovat nepřátelskou kavalerii nebo jak vychladit Kofolu, když se porouchá výčepní zařízení. V páté úloze, která je jako obvykle nejobtížnější, si budete muset poradit s problémem přetížení během manévrování ve stíhačce. V rámci experimentální úlohy budete mít příležitost si změřit hustotu skleničky a ve Výfučení na vás čeká povídání o dalekohledech. Kromě zadání nových úloh v brožurce naleznete také vzorová řešení druhé série a průběžné pořadí po druhé sérii.

Na základě tohoto pořadí vám průběžně rozesíláme pozvánky na letní výfučí tábor. Organizátoři už vybrali legendu a pustili se do příprav a jsou si jistí, že se letos rozhodně máte na co těšit.

Jelikož je ale tábor zatím daleko a i na tradiční jarní setkání si ještě nějaký ten měsíc počkáme, můžete nás mezitím sledovat a případně i kontaktovat na našich sociálních sítích. Připomínáme, že Výfuk má účet na Facebooku a Instagramu, kam pravidelně přidáváme novinky a aktuality, abyste zůstali v obraze a nic vám neuteklo. Také si můžete na webu prohlédnout fotky z podzimního setkání.

Doufáme, že si náležitě užijete zimní radovánky a že se budete bavit i při řešení nových výfučích úloh.

*Organizátoři*

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



## Zadání IV. série



*Termín odeslání: 27. 2. 2023 20.00*

### Úloha IV.1 ... Zaplavená kuchyňka ⑥ ⑦

5 bodů

Lubor rád pozoruje Prahu ze svého pokoje. Po deštivém dnu zahlédl ve vzdálené kaluži odraz horního okraje budovy Matfyzu. Spočtete výšku této budovy, pokud Lubor bydlí v 16. patře



**matfyz**

kolejí 17. listopadu, každé patro má výšku 3,5 m a přízemí 5,5 m. Lubor měří asi 2 m a poměr vzdálenosti mezi kaluží a kolejemi ku vzdálenosti mezi kaluží a Matfyzem je 5 : 1. Předpokládejte, že kaluž a přízemí obou budov leží ve stejné nadmořské výšce. Budova má nejdříve přízemí, potom první patro.

### Úloha IV.2 ... Pravděpodobnost potrawy ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

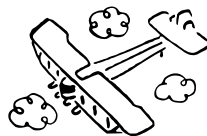
Soňa si chce dát k večeři rybu. Podívá se proto, jaké ryby plavou v rybníce. Spatří dlouhé ryby, konkrétně dva lososy, tři kapry, jednoho candáta a tři štiky, i ryby krátké, tedy čtyři pstruhy, dva cejny, tři karasy a jednoho okouna. Soňa však jí jen dlouhé ryby, které se nevejdou na talíř, protože jinak má pocit, že se na ni ryba (i bez hlavičky) stále kouká. Jaká je pravděpodobnost v procentech, že když si Soňa uloví jednu náhodnou rybu, bude si ji chtít dát k večeři?



### Úloha IV.3 ... Fyzici útočí ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

V první světové válce kromě obyčejných vojáků bojovalo také velké množství fyziků. Jedním z nich byl například ruský kosmolog Alexander Friedmann, který byl letcem pod carským režimem. Uvažujme, že se Friedmann během Brusilovy ofenzívy ve svém Murometu jal hrdinně bombardovat německou armádu. V jakém čase  $t$  od přeletu ruského zákopu musí vyhodit bomby, aby zasáhl nepřátelskou kavalérii o rychlosti  $v_1 = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , která vyrazila ve stejný moment, kdy Friedmann přeletěl zákop ve vzdálenosti  $d = 5000 \text{ m}$ ? Letadlo letí ve výšce  $h = 3000 \text{ m}$  rychlostí  $v_2 = 110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ?



### Úloha IV.4 ... Dobře vychlazená Kofola ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Viktor chtěl na schůzce organizátorů čepovat Kofolu, ale porouchalo se mu výčepní zařízení. Proto se rozhodl, že si vytvoří improvizované chladicí zařízení z kbelíku s vodou a ledem. Do vědra nalil 5 l ledové vody o teplotě  $t_v = 5^\circ \text{C}$  a 5 kg ledu o teplotě  $t_l = -15^\circ \text{C}$ . Následně do něj ponořil nápojové vedení a začal točit Kofolu. Kolik Kofoly zvládne natočit, než se obsah kbelíku příliš ohřeje? Uvažujme zjednodušený model, ve kterém zanedbáme všechny tepelné ztráty do okolí. Dále budeme předpokládat, že chlazení bude probíhat do té doby, dokud bude mít obsah kbelíku nižší teplotu než vychlazená Kofola (o teplotě rovněž  $t_v = 5^\circ \text{C}$ ). Počítejte s tím, že led se bude průběžně rozpouštět. Počáteční teplota Kofoly je  $t_0 = 25^\circ \text{C}$ . Předpokládejte, že Kofola má stejné tepelné vlastnosti jako voda a dohledejte si potřebné konstanty.

### Úloha IV.5 ... Nebezpečný manévr ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ★

7 bodů

Tom Cruise měl ve filmu Top Gun: Maverick za úkol připravit skupinu mladých vojáků na nebezpečnou misi. Součástí této mise bylo proletět ve stíhačce komplikovaným prostorem v omezeném čase. Let byl náročný i z důvodu velkých zrychlení, která Tom Cruise při letu pociťoval. Při jednom z manévru napřed ve stíhačce stoupal pod úhlem  $45^\circ$  a poté provedl vertikální otočku o  $90^\circ$  tak, že na konci tohoto manévru klesal pod úhlem  $45^\circ$ . Předpokládejte, že se během otočky stíhačka pohybovala po části kružnice rychlostí  $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a že celý manévr trval 8 sekund.



1. Spočítejte velikost maximálního pocitového zrychlení, které Tom Cruise při tomto manévru pocítoval (manévrem rozumíme let stíhačky po zmíněné části kružnice za účelem změny směru letu).
2. Porovnejte ho s minimálním pocitovým zrychlením při manévru a určete poměr  $a_{\max}/a_{\min}$ .

*Bonus:* Tom Cruise si následně uvědomil, že způsob, kterým otočku provádí (tedy let po části kružnice), není zdaleka optimální. Zkuste se zamyslet nad tím, jaké může být nejmenší možné maximální zrychlení letadla. Následně také určete, po jaké trajektorii se letadlo v takovém případě bude pohybovat. Je to zároveň i trajektorie s nejmenším maximálním pocitovým zrychlením?

*Poznámka:* Pocitovým zrychlením rozumíme tíhu, kterou naše tělo pocítuje. Tedy například pokud stojíme v klidu na zemi, tak cítíme zrychlení  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , i když naše tělo nezrychluje. Naopak astronauti na Mezinárodní vesmírné stanici se zrychleným pohybem pohybují, ale cítí stav beztlíž.

#### Úloha IV.E ... Husté sklo ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Určete hustotu skla pomocí Archimédova zákona. Prázdou skleněnou nádobu vložte do vody a přilévejte vodu, dokud její hrdlo není na úrovni hladiny. Z objemů skla, sklenice a nalité vody určete hustotu skla.

Přesnost metody porovnejte s dalším způsobem měření hustoty.

#### Úloha IV.V ... Pod drobnohledem ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Výfuček se jako nadšený astronom jednoho jasného dne rozhodl vytvořit si vlastní dalekohled. Rozhodl se pro Newtonův typ, jelikož mu čočkové dalekohledy přišly na konstrukci moc jednoduché. Při výrobě si však zapomněl poznamenat všechny parametry dalekohledu. Jediné, na co si vzpomněl, byl zorný úhel okuláru  $\text{fov} = 50^\circ$  a světelnost  $f/5$  (tedy  $S = 1/5$ ). Výfuček však nechtěl odbíhat od pozorování pro pravítka, a proto se rozhodl chybějící údaje změřit pozorováním noční oblohy.

1. Nejprve namířil dalekohled na nebeský rovník. Pozorované pole zcela zmizelo za  $\Delta t = 1 \text{ min}$ . Jaké je zvětšení dalekohledu?
2. Poté spatřil dvojhvězdu, která se v dalekohledu již téměř jevila jako jeden samostatný zdroj světla. Vyhledal si, že skutečná úhlová vzdálenost obou složek dvojhvězdy je  $\alpha = 0,35''$ . Z doposud známých údajů určete průměr a ohniskovou vzdálenost objektivu a ohniskovou vzdálenost okuláru.
3. Výfučka dvojhvězda natolik zaujala, že se jí rozhodl vyfotit. Jakou největší velikost může mít strana jednoho pixelu kamery (pixely mají tvar čtverce), aby bylo na fotografii možné rozpoznat jednotlivé složky dvojhvězdy? Kamera je nejcitlivější klasicky v části spektra odpovídající viditelnému světlu.



## Výfučtení: Mega giga tera, teleskopů éra

### Úvod

Ve Výfučtení třetí série desátého ročníku, Mili mikro nano? Mikroskopům ano!<sup>1</sup> jsme se dozvěděli, jak fungují přístroje zvětšující velmi malé objekty – mikroskopy. V tomto Výfučtení se budeme zabývat něčím velice podobným, a to dalekohledy neboli teleskopy. Na rozdíl od mikroskopů jsou dalekohledy stavěny pro zvětšování pouze velmi vzdálených objektů, jako mikroskopy je tedy použít nelze. Setkat jste se s nimi mohli při pozorování noční oblohy či Slunce, v přírodě při pozorování ptactva nebo třeba u divadelního kukátka. Dnes si vysvětlíme, jak tato zařízení fungují, a ukážeme si některé typy dalekohledů i montáží, které jsou pro dynamiku pozorování nezbytné.

### Historie

První dalekohled byl vynalezen na počátku 17. století v Nizozemsku optikem Hansem Lippersheyem. Známý Ital Galileo Galilei si již o rok později vyrobil vlastní exemplář, kterým začal objevovat svět dosud skrytý lidským očím. Mezi některé jeho převratné objevy patřily krátery na Měsíci, sluneční skvrny, fáze Venuše či čtyři největší měsíce planety Jupiter, dodnes známé jako Galileovy měsíce. Byť si zpočátku myslel, že jde o hvězdy, zjistil, že se jedná o tělesa obíhající kolem Jupitera, a vyvrátil tak myšlenku, že všechna tělesa obíhají kolem Země.

Od té doby se dalekohledy neustále zdokonalovaly a dodnes jsou nezbytným pomocníkem pro astronomy profesionální i amatérské. Nejenže nám dalekohledy přibližují vzdálené objekty, ale především zachycují více světla než naše oko a odkrývají nám tak krásy vesmíru do podrobností pro nás jinak neviditelných.

### Optika

Asi jste se již do nějakého dalekohledu někdy koukali. Zjednodušeně řečeno se jedná o přístroj nebo optickou soupravu, která zvětšuje *úhlovou velikost* pozorovaného předmětu. Úhlovou velikostí rozumíme úhel, který pozorujeme mezi okraji objektu. U vzdálených objektů je velmi malý, proto je už nemůžeme pohodlně pozorovat pouhýma očima. Každý dalekohled má tedy určité *úhlové zvětšení*, což je poměr úhlových velikostí obrazů při pozorování dalekohledem a pouhýma očima, dále pak *zorný úhel*, což je úhlová velikost pozorovaného *pole* (tedy části oblohy, kterou vidíme v dalekohledu), a ještě další vlastnosti, které můžeme ovlivnit parametry jeho součástí.

### Zobrazovací rovnice

Každý dalekohled je soustavou několika optických členů, tedy čoček, zrcadel, optických hranolů, různých korekčních desek apod. Každý typ dalekohledu používá jinou kombinaci těchto členů. Rozlišujeme dva druhy čoček: *spojky*, které lámou svazek rovnoběžných paprsků k sobě, a *rozptylky*, ty jej lámou od sebe. Podobně dělíme zrcadla na *dutá*, která odráží svazek rovnoběžných

<sup>1</sup>[https://vyfuk.org/\\_media/ulohy/r10/s3/vyfucteni3.pdf](https://vyfuk.org/_media/ulohy/r10/s3/vyfucteni3.pdf)

paprsků k sobě, *vypuklá*, která jej odráží od sebe, a *rovinná*, taková najdete například ve vaší koupelně.

Bod, ve kterém se scházejí odražené nebo zlomené paprsky, se nazývá *ohnisko*. V případě rozptylky a vypuklého zrcadla, kde se paprsky nesbíhají, se za ohnisko považuje bod, ve kterém se protínají přímkami, po kterých se šíří odražené paprsky (je to tedy bod, ze kterého paprsky zdánlivě vycházejí). Leží tedy na druhé straně optického členu, než kde bychom jeho polohu předpokládali, a proto je takové ohnisko *zdánlivé*.

Ve skutečném ohnisku se tedy soustředí všechna světelná energie (pocházející ze vzdáleného zdroje, jako je například naše Slunce), která dopadá na optický člen. Proto můžeme lupou nebo brýlemi na čtení na přímém slunci zapalovat objekty, jedná se totiž o spojky. Naopak brýlemi na dálku rozhodně nic nezapálíme, jedná se totiž o rozptylky se zdánlivým ohniskem a k soustředění světelné energie nedochází.

Od polohy ohniska se pak odvíjí charakteristika každého členu. Vzdálenost mezi ohniskem a optickým členem se nazývá *ohnisková vzdálenost*, značíme ji  $f$ . Pokud je ohnisko zdánlivé, pak  $f$  nabývá záporných hodnot. Chceme-li zjistit, kde se vytváří obraz zobrazovaného předmětu, použijeme zobrazovací rovnici:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f},$$

přičemž  $a$  a  $a'$  jsou vzdálenosti předmětu a obrazu od optického členu. Pokud je hodnota  $a'$  záporná, pak je obraz neskutečný a vzniká před čočkou, případně za zrcadlem. Z toho vyplývá, že pokud pozorujeme velmi vzdálený předmět skrz samostatný optický člen, říkáme mu *objektiv*, pak  $a$  nabývá velkých hodnot a  $1/a$  se blíží nule. Bude tedy platit  $a' = f$ . Jelikož se paprsky ze vzdáleného zdroje dají považovat za rovnoběžné, dostáváme výsledek, o kterém jsme mluvili na začátku. Tedy že se původně rovnoběžné paprsky sbíhají v ohnisku.

Abychom však mohli obraz pozorovat, musíme takto zakřivené paprsky protínající se v ohnisku opět „narovnat“ do rovnoběžného svazku, čehož docílíme dalším optickým členem, jenž nazýváme *okulár*. Za nutnost rovnoběžnosti paprsků může naše oko, konkrétně jeho čočka, která už si rovnoběžné paprsky opět zobrazí na sítnici tak, že na obraz ani nemusí zaostřovat. Aby okulár paprsky správně „narovnal“, musí být ve vhodné vzdálenosti od objektivu, čehož docílíme *ostřením*.

Pokud pozorujeme vesmírné nebo velmi vzdálené objekty, tak nám postačí zaostřit pouze jednou, jelikož paprsky ze všech těchto objektů jsou prakticky rovnoběžné a sbíhají se tedy na stejném místě.

Zajímavé je, že pokud snímáme obraz z dalekohledu digitálně na čip kamery nebo analogově na film, není okulár zapotřebí. Objektiv dalekohledu totiž poslouží zároveň jako objektiv těla fotoaparátu či kamery.

### Zvětšení

Asi nejdůležitější vlastností, která nás zajímá u všech typů dalekohledů, je tzv. úhlové zvětšení. V optice se setkáte ještě s klasickým zvětšením, jež vypočítáme jako:

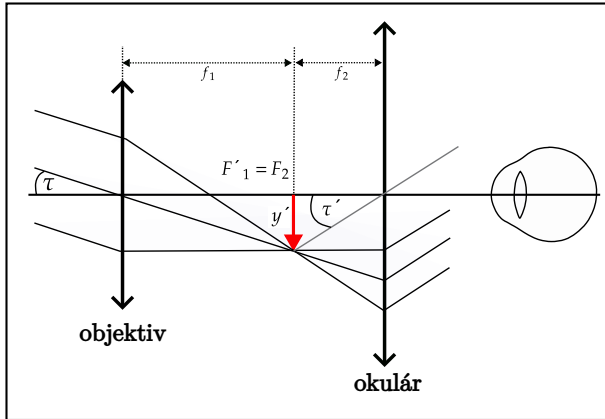
$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a},$$

kde  $y$  a  $y'$  jsou výšky předmětu a obrazu. Záporná hodnota zvětšení znamená, že obraz bude převrácený. U dalekohledů se však tímto zvětšením příliš nezabýváme, jelikož by dosahovalo

extrémně malých hodnot. Prakticky jej využijeme pouze u výpočtů týkajících se snímání, nikoliv u vizuálního pozorování. Proto, pokud se v astronomii mluví o „zvětšení“ dalekohledu, pak se myslí spíše *úhlové zvětšení*, pro něž si můžeme odvodit vztah z obrázku 1:

$$\gamma = \frac{\tau'}{\tau} \doteq \frac{\operatorname{tg} \tau'}{\operatorname{tg} \tau} = \frac{y'}{f_2} \cdot \frac{f_1}{y'} = \frac{f_1}{f_2},$$

kde  $\tau$  je úhlová velikost objektu, s funkcí  $\operatorname{tg} x$  si zatím nemusíte lámat hlavu. Pokud tedy použijeme např. objektiv o ohniskové vzdálenosti 1 m a okulár o  $f = 25$  mm, potom se nám pozorované objekty budou jevit 40krát větší.



Obr. 1: Schéma průchodu rovnoběžného svazku paprsků skrz dvě spojky neboli Keplerův dalekohled. Objektiv a okulár vždy sdílejí jedno společné ohnisko.

### Zorné pole

Dalším parametrem dalekohledů je zorné pole neboli *skutečné zorné pole* (FOV), tedy úhlová velikost výřezu oblohy, který v dalekohledu uvidíme. FOV samozřejmě chceme co největší, zároveň však klesá s rostoucím zvětšením. Nejrychlejší způsob jak jej změřit je vzít stopky, namířit dalekohled na nebeský rovník (asi  $40^\circ$  nad jižním obzorem) a změřit čas, za který přejde objekt z jednoho okraje pole na druhý. Potom platí:

$$\text{FOV} = \Delta t \cdot \omega = \Delta t \cdot \frac{360^\circ}{23 \text{ h } 56 \text{ min}},$$

kde  $\Delta t$  je naměřený čas, výsledek je v úhlových stupních. Značení 23 h 56 min vyjadřuje dobu, za kterou se Země otočí okolo své osy vůči hvězdám. Tato doba je tedy odlišná od tzv. slunečního dne, který všichni dobře známe. Je to proto, že kromě otáčení kolem osy Země obíhá kolem Slunce.

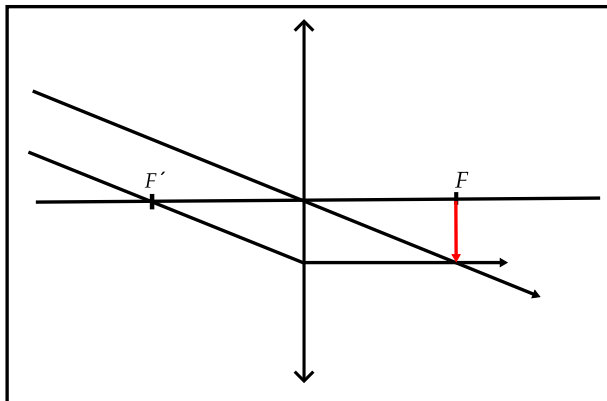
Nicméně, pokud se nám nechce nic měřit, stačí se podívat na tzv. *zorný úhel okuláru* (fov), protože platí:

$$\text{FOV} = \frac{\text{fov}}{\gamma} = \text{fov} \frac{f_2}{f_1}.$$

Toto je jeden z mnoha důvodů, proč velké zvětšení není vždy výhodou. Zorné pole kamery či fotoaparátu je pak určeno rozměry čipu a ohniskovou vzdáleností objektivu v následujícím vztahu, kde předpokládáme, že se předmět nachází velmi daleko a zobrazí se tedy do ohniska jako na obrázku 2:

$$\text{FOV} = 2 \arctg \frac{x}{2f} \doteq \frac{x}{f} \cdot \frac{180^\circ}{\pi},$$

kde  $x$  je šířka, případně výška čipu.



Obr. 2: Dva paprsky vycházející z jednoho velmi vzdáleného zdroje se nám jeví jako rovnoběžné, proto se obraz vytvoří v ohnisku, kam musíme umístit čip.

### Ostatní kvality a vady dalekohledů

Parametrů, podle kterých můžeme určit kvalitu obrazu, existuje ještě mnoho. Jedním z nich je tzv. *rozlišovací schopnost*. Tu popisujeme nejmenší možnou úhlovou vzdáleností  $\Theta$  mezi dvěma body tak, aby bylo oba body ještě možné rozlišit. Při menších úhlových vzdálenostech se již světlo kvůli zákonům vlnové optiky slévá dohromady a body pak pozorujeme jako jediný zdroj světla. Proto ani naše oči nevidí dokonale ostře. Rozlišovací schopnost závisí na pozorované vlnové délce  $\lambda$  (středem viditelného světla je zhruba 550 nm), jelikož se každá vlnová délka „ohýbá“ jinak, a průměru objektivu  $D$ , ať už se jedná o zrcadlo či čočku, jelikož ovlivňuje množství světla které dalekohled „zachytí“. Platí:

$$\Theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Schválně si můžeme dosadit průměr zornice našeho oka, tedy ve tmě asi  $D_{\text{pup}} = 6$  mm. Mělo by nám vyjít  $\Theta_{\text{pup}} \doteq 23''$  na světle se však zornice zmenšuje a rozlišovací schopnost je tedy horší. Rozlišovací schopnost u digitálních čipů je ještě navíc určena velikostí jednotlivých pixelů. Pokud na jeden pixel dopadá větší část obrazu než úhel  $\Theta$ , pak je na snímcích rozhodující rozlišovací schopnost čipu. Pokud naopak na jeden úhel  $\Theta$  připadá více takových pixelů, pak rozhoduje rozlišovací schopnost dalekohledu. Někdy se tedy již nevyplatí kupovat kameru s menšími pixely, protože obraz stejně nebude ostřejší kvůli vlastnostem dalekohledu.

Posledním hlavním parametrem je *světelnost dalekohledu*, což je, jak název vypovídá, analogie k intenzitě záření obrazu. Platí pro ni jednoduchý vztah:

$$S = \frac{D}{f},$$

kde  $D$  a  $f$  jsou průměr a ohnisková vzdálenost objektivu. Má-li tedy nějaký dalekohled extrémní zvětšení, je zapotřebí dosáhnout větších rozměrů i v jeho průměru. Víceméně je průměr dalekohledu nejdůležitějším fyzickým parametrem ze všech, jelikož zvětšení lze upravovat pomocí okulárů.

Jak to však v praxi bývá, nic není dokonalé. U dalekohledů se vyskytuje celá škála charakteristických vad (chcete-li *aberací*), způsobených použitými optickými členy, které musíme případně korigovat dalšími korekčními optickými přístroji. Asi nejnámější optickou vadou je tzv. *chromatická aberace*, tedy barevná vada, při které dochází k rozdílnému úhlu lomu paprsků s různou vlnovou délkou a především na okrajích pole můžeme vidět rozklad světla na barvy duhy. Vzniká při lomu světla skrz čočky, nejsilnější je tedy u refraktorů, naopak u reflektorů je minimální. Další výraznou vadou je tzv. *sférická aberace* neboli kulová vada, kdy se paprsky neprotínají v jednom bodě, ale tvoří kruhovou plošku, a proto nemůžeme obraz zcela zaostřit. Tento problém nastává u všech typů dalekohledů. Dále si ještě uvedeme hlavní problém reflektorů, tím je tzv. *koma*, kdy se body ležící na okrajích pole promítají jako komplikované obrazce připomínající komety, což je způsobeno nepřesnou konstrukcí zrcadla či čočky. S rostoucí vzdáleností od středu pole roste i závažnost komy, proto se projevuje především na velkém zorném poli. Existují samozřejmě i další vady jako například astigmatismus, zklenutí a zkreslení pole, vinětače atd.

### Typy dalekohledů

Podle optických členů rozlišujeme několik typů teleskopů – primárně je dělíme na dalekohledy čočkové (refrakторы) a zrcadlové (reflektory).

#### Čočkové dalekohledy (refrakторы)

Objektivem čočkových dalekohledů je čočka, případně soustava čoček. Vůbec prvním sestaveným refraktorem byl dalekohled *Galileův*, který je tvořen objektivem ze spojky a okulárem z rozptylky. Tento dalekohled se dnes využívá například jako divadelní kukátko, ovšem dříve přispěl i k velmi významným průlomům v astronomii.

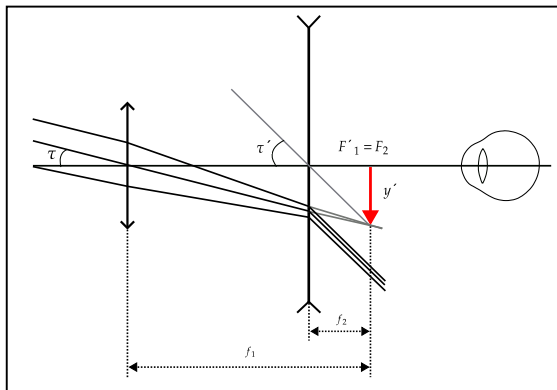
Dalekohled zkonstruovaný ze dvou spojných čoček, které mají společnou optickou osu, se dnes nazývá *Keplerův* dalekohled. To, že je jeho obraz převrácený, je pro astronomická pozorování nepodstatné. Jeho modifikovaná podoba je využívána jako třiedr – v tom však najdete zrcátka nebo hranoly, které obraz převrací nazpět.

Při rostoucí potřebě o zachycení co nejvíce světla, tedy zvětšení průměru vstupní čočky (objektivu), se začaly objevovat nevýhody refraktorů. Jedná se především o různé vady čoček. Navíc je výroba velkých čoček velmi náročná.

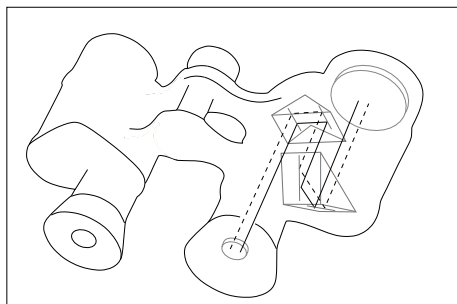
#### Zrcadlové dalekohledy (reflektory)

Ukázalo se, že pro větší průměry objektivu jsou vhodnější dalekohledy zrcadlové. Prvním takovým zkonstruovaným reflektorem byl *Newtonův* dalekohled, jehož objektivem je *primární* duté





Obr. 3: Schéma Galileova dalekohledu



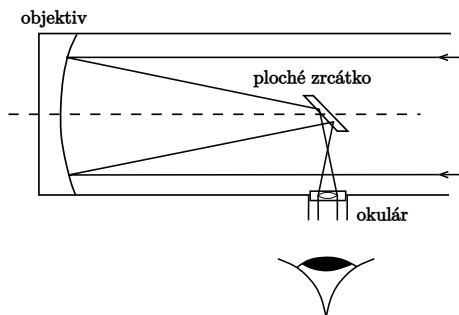
Obr. 4: Průřez triedrem

zrcadlo parabolického tvaru. Z toho se pak světlo odráží na malé *sekundární* rovinné zrcadlo, uchycené přibližně v ohnisku primáru tzv. pavoukem (který vytváří známé čtyři paprsky u jasnějších hvězd). Sekundár odráží světlo přímo do okuláru. Výsledkem je převrácený obraz s velkou světelností a téměř žádnou chromatickou aberací. Současně s Newtonovým vznikl i podobný typ dalekohledu – *Cassegrainův*. Zatímco Newton má okulárový výťah po straně tubusu, do Cassegrainu se díváme klasicky zezadu.

Nicméně ani tyto systémy nebyly dokonalé a stále byly velmi náchylné aberacím. Kvůli tomu vznikly tzv. kombinované a modifikované systémy, které tyto chyby řeší velmi elegantně kombinováním obou typů dalekohledů, přičemž využívají různých korekčních členů apod.

## Montáže

Stejná pozornost jako výrobě optických soustav se věnuje montážím dalekohledů – jejich upevnění k zemi. Dalekohledy by nám totiž nebyly k ničemu platné, pokud by nebyly ve stabilní poloze. Každé zachvění dalekohledu by vedlo k naprostému znehodnocení pozorování. Jenže naše planeta Země se otáčí kolem své osy a obloha se nám tak zdánlivě pohybuje, proto ukot-



Obr. 5: Schéma Newtonova dalekohledu

vení dalekohledu nemůže být ani příliš pevné. Musíme být schopni udržet krok s „utíkající“ oblohou, jinak by nám zmizely i objekty, které pozorujeme. Proto používáme dva základní typy montáží – azimutální a ekvatoriální (paralaktickou).

Azimutální montáž je založena na dvou vzájemně kolmých osách, kolem kterých lze dalekohled otáčet. V jedné ose je nastaven azimut (horizontální úhel mezi směrem k severnímu pólu a směrem k objektu promítnutému na obzor – ten samý úhel ukazuje klasický kompas) a v druhé výška nad obzorem. Tato montáž je velmi jednoduchá na výrobu i na používání, má však řadu nevýhod. Tou nejvýznamnější je, že pokud chceme, aby pozorovaný objekt zůstal v zorném poli, musí být azimutální montáž vybavena elektronikou, která podle nastavených parametrů dokáže hýbat dalekohledem v obou osách.

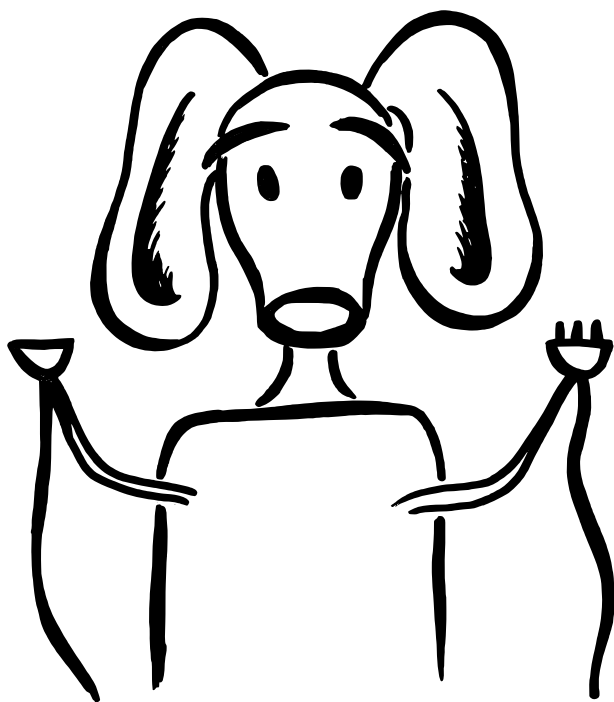
Složitější na nastavení, ale výhodnější při potřebě sledování oblohy např. pro focení objektů, je montáž ekvatoriální. Jedna z os je nasměrována rovnoběžně se zemskou osou a okolo ní se otáčí přístroj dalekohledu v hodinovém úhlu (podél světového rovníku). Pohyb hvězd stačí sledovat v jedné ose a navíc rovnoměrně, přičemž otáčení je nejčastěji zajištěno tzv. hodinovým strojem.

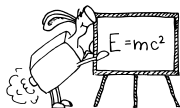
## Závěr

Přiblížili jsme si fascinující a rozmanitý svět dalekohledů – přístrojů, které jsou všude kolem nás. Společně jsme nahlédli za oponu principů optiky a ukázali si, jak a proč takový dalekohled funguje. Nutno zmínit, že v dnešní době se pro astronomická pozorování používají i jiné než optické dalekohledy, například radioteleskopy. To je však už nad rámec tohoto Výfučtení.

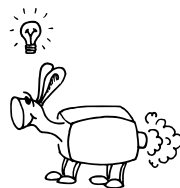
*Tomáš Patsch*  
patscht@vyfuk.mff.cuni.cz

*Vladimíra Jiříčková*  
vladi@vyfuk.mff.cuni.cz





## Řešení II. série

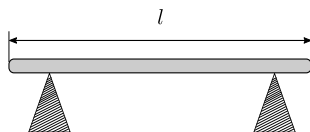


### Úloha II.1 ... Dvě podpěry

5 bodů; průměr 3,40; řešilo 15 studentů

Mějme dvě stejně vysoké svislé podpěry a položme na ně homogenní tyč délky  $l$  (viz obrázek 6). Lubora by zajímalo, jak daleko od sebe mají být podpěry vzdáleny a jakým způsobem na ně položit tyč, aby byla tyč co nejstabilnější. Dokážete mu poradit?

Stabilitu definujeme jako minimální vzdálenost, o kterou musíme tyč posunout, než z libovolné podpěry spadne. Vzdálenost podpěr a polohu tyče vyjádřete v násobcích délky tyče  $l$ .



Obr. 6: Homogenní tyč na podpěrách

Zamysleme se, kdy tyč v důsledku posouvání spadne. Jsou dva způsoby, jak se to může stát, buď se konec tyče dostane mezi podpěry, anebo se budou obě podpěry nacházet jen pod jednou půlkou tyče (většina hmotnosti tyče pak bude ležet mimo podpěry a tyč se převáží). Podpěry proto určitě umístíme každou pod jednu polovinu tyče. Tyč je souměrná podle středu, stačí tedy určit, kam umístíme podpěru z jedné strany od středu, a celý případ bude symetricky i na druhé straně.

Podpěra polovinu tyče pomyslně rozděluje na dva úseky. Když tyč posouváme, podpěra zůstává na místě a jeden z úseků se tak prodlužuje a druhý zkracuje, dokud střed nebo konec tyče nebude ležet přímo nad podpěrou – tím se délka jednoho z úseků zkrátí na nulu a tyč dalším posouváním spadne. To znamená, že stabilita tyče je dána délkou nejkratšího z těchto dvou úseků.

Nejstabilnější rozmístění je proto takové, kdy je délka obou úseků  $l/4$  (kamkoli z této polohy podpěru posuneme, vždy se délka nejkratšího úseku zmenší). Symetricky umístíme i druhou podpěru do vzdálenosti  $l/4$  od druhého konce tyče. Vzdálenost mezi podpěrami tak bude  $l/2$ .

Můžeme si všimnout, že vysuneme-li takto podepřenou tyč o  $l/4$  (což je stabilita tyče) libovolným směrem, bude přímo nad jednou podpěrou ležet jeden konec tyče a nad druhou střed (a zároveň i těžiště) tyče. Oba případy, kdy může tyč spadnout, tak nastanou zároveň, což potvrzuje, že jsme opravdu našli nejlepší řešení, protože oddálení jednoho případu vždy přibližuje ten druhý.

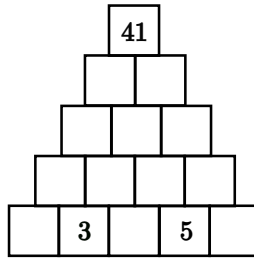
*Pavla Šimová*

paja@vyfuk.mff.cuni.cz

## Úloha II.2 ... Faraon matematik

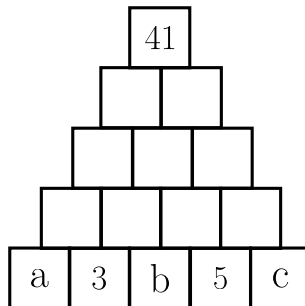
5 bodů; průměr 3,28; řešilo 76 studentů

Výfuček se vypravil na výlet k pyramidám. Legenda praví, že zdejší faraon měl zálibu v matematice. Proto je na každém bloku pyramidy napsáno přirozené číslo, které je součtem čísel na dvou kamenech pod ním. Zub času se postaral o to, že většinu očíslovaných kamenů zavál písek. To však pro Výfučka není žádná překážka a hravě si dovede skrytá čísla dopočítat! Zkuste to taky a doplňte čísla na všechna nepopsaná místa pyramidy. Egypťané rozhodně nepovažovali nulu za přirozené číslo.



Obr. 7: Pyramida

Vzhledem k tomu, že každé číslo je vždy rovno součtu dvou čísel pod ním, je jasné, že když budeme znát čísla ve spodní řadě, tak všechna ostatní políčka hravě dopočítáme. Ve spodní řadě neznáme 3 čísla, označíme si je proto neznámými  $a$ ,  $b$ ,  $c$  viz obrázek ??.



Následně si pomocí zmíněného pravidla doplníme pyramidu. Tím se dostaneme do situace znázorněné na obrázku ??.

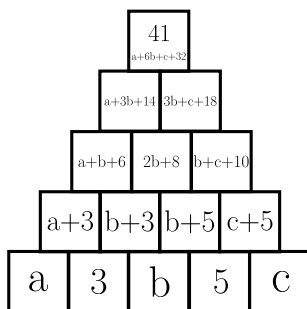
Uvědomme si, že číslo na vrchním čtverečku známe – je rovno 41. Tím získáme rovnici:

$$a + 6b + c + 32 = 41$$

$$a + 6b + c = 9.$$

Jelikož jsou čísla přirozená, nenulová (tedy nejnižší může být 1), je jasné, že  $b$  se bude rovnat jedné, protože jakákoliv jiná hodnota by přerostla náš celkový součet.

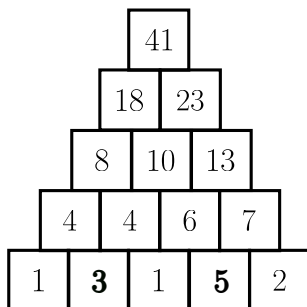
Díky tomuto pak můžeme znovu poupravit naši rovnici:



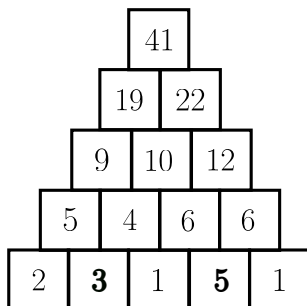
$$a + 6 + c = 9$$

$$a + c = 3.$$

Pokud se pak znovu vrátíme k naší původní myšlence, že čísla jsou přirozená a nenulová, zjistíme, že našimi jedinými řešeními jsou taková, kde  $a = 1$  a  $c = 2$ :



a také " $a = 2$ " a " $c = 1$ ":



Naše jediná dvě řešení jsou tak ta zobrazena na obrázcích výše, a tak máme dvě možnosti, jak doplnit všechna tato čísla!

Václav Verner

vasek@vyfuk.mff.cuni.cz

### Úloha II.3 ... Kolotoč

6 bodů; průměr 2,63; řešilo 49 studentů

Kačka jednou stála na pouti u řetězového kolotoče a přemýšlela, co by se stalo, kdyby se některá ze sedaček utrhla. Pomozte Kačce a nakreslete, jak by se sedačka pohybovala z pohledu Kačky stojící vedle kolotoče a z pohledu dítěte, které se právě na kolotoči veze (na jiné sedačce, která našťastí vydržela). Stačí přibližný náčrt, nemusíte pohyb přesně počítat. Své řešení okomentujte.



Na daný problém se máme podívat ze dvou perspektiv – Kačky mimo kolotoč a dítěte, které se otáčí spolu s kolotočem. Každému z těchto pohledů přísluší jiná *vztažná soustava*. Ty obecně rozdělujeme na *inerciální* a *neinerciální*. Za inerciální vztažnou soustavu považujeme takovou, v níž platí 1. Newtonův zákon, tedy že těleso, na které nepůsobí žádná síla, je z pohledu této soustavy v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Za takovou soustavu můžeme považovat například vztažnou soustavu spojenou se Zemí.<sup>2</sup> Každá vztažná soustava, která je vůči jiné inerciální vztažné soustavě v klidu, je také inerciální. Je tedy jasné, že inerciálním pozorovatelem situace bude Kačka stojící mimo, zatímco dítě na kolotoči se na situaci dívá z pohledu neinerciálního pozorovatele.

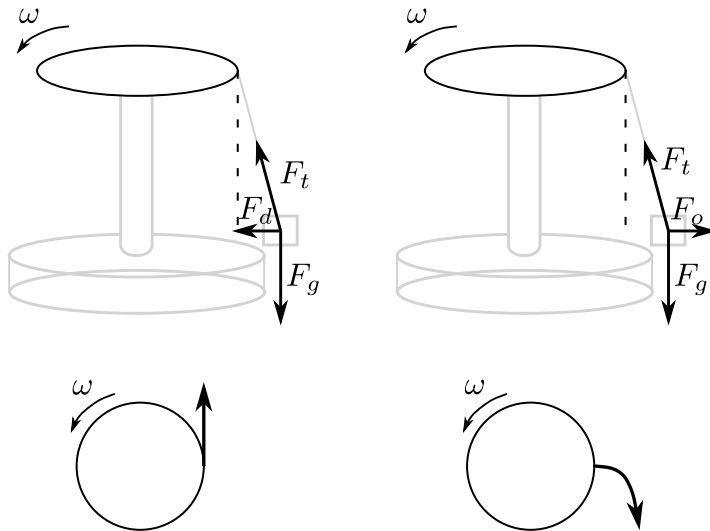
Teď se zaměříme na síly, které na dítě na kolotoči působí. Začneme pohledem inerciální vztažné soustavy – kolotoč se otáčí po kružnici, což znamená, že zde musí být kromě všudypřítomné tíhové síly také nějaká síla, která zakřivuje trajektorii – tou je síla dostředivá, která je výslednicí tíhové síly a síly tahové, která napíná závěs kolotoče. Dostředivá síla míří do středu, jak bychom podle názvu odhadli. Jejím důsledkem je pak zakřivení pohybu – musíme si uvědomit, že zrychlení nemusí nutně měnit velikost rychlosti, ale třeba jen směr, jako je tomu u rotačního pohybu. Přehledně shrnutí sil nabízí obrázek 8.

Dítě na kolotoči – neinerciální pozorovatel – pozoruje novou sílu, *setrvačnou odstředivou sílu*. Odstředivá síla vzniká v rotujících soustavách právě proto, že by se tělesa chtěla pohybovat rovnoměrně přímočaře vzhledem k inerciálním pozorovatelům (v důsledku zákona setrvačnosti). Směr této síly je proto směrem ven z rotující soustavy (kolmo na rotační pohyb). Abychom tedy tělesa v rotující soustavě udrželi, musíme působit nějakou dodatečnou silou. V případě dítěte na kolotoči je touto silou právě tahová síla závěsu kolotoče. Ze znázornění těchto sil na obr. 8 vidíme, že z pohledu dítěte je výslednice sil působící na sedačku skutečně nulová a sedačka je proto pro něj v klidu.

Když jsme si rozebrali silové působení z jednotlivých pohledů, můžeme rozhodnout, co se stane v případě, že se sedačka utrhne, a rozebrat si pohyb, který tak nastane. Při utržení sedačky přestane působit tahová síla závěsu. Z pohledu Kačky – tedy inerciálního pozorovatele – přestane působit dostředivá síla, a tak se bude sedačka s dítětem pohybovat v horizontálním směru rovnoměrně přímočaře, tedy po tečně ke kružnici, po níž se sedačka pohybovala před utržením. Jelikož tíhová síla působí stále, je zřejmé, že ve vertikálním směru bude sedačka padat

<sup>2</sup>Ve skutečnosti soustava spjatá se Zemí není úplně inerciální, neboť se Země otáčí kolem své osy. Toto ovlivňuje například velikost tíhového zrychlení  $g$ , u větších měřtek pozorujeme tzv. *Coriolisovu sílu*, která způsobuje stáčení bouřek. Pro účely naší úlohy se však se soustavou Země spokojíme

volným pádem, jako to známe z běžné praxe. Tomuto pohybu, který se skládá z většího množství rovinných pohybů (například vertikálního a horizontálního) říkáme složený. Z pohledu dítěte na kolotoči – tedy neinerciálního pozorovatele – se pak po utržení sedačky bude sedačka pohybovat ve směru setrvačné odstředivé síly, tedy přímo ven z kruhu. Taková bude situace bezprostředně po utržení. Jak se bude sedačka vzdalovat, její rychlost bude zůstávat stejná, ale vzdálenost od středu se bude zvětšovat, a tak se její úhlová rychlost ( $\omega = v/r$ ) bude zmenšovat, a tedy bude „zatačet“ proti směru otáčení kolotoče. Samozřejmě i zde bude pohyb ovlivňovat tíhová síla. Ten tak bude ve vertikálním směru volným pádem. Graficky pak daný popis znázorňuje obrázek níže.



Obr. 8: Rozložení sil pro inerciální vztažnou soustavu (vlevo) a neinerciální vztažnou soustavu (vpravo). Dole vidíme jednotlivé trajektorie, jak je vidí maminka (vlevo) a dítě na kolotoči (vpravo). Připomeňme, že zde znázorňujeme jen pohyb v horizontálním směru.

**Lukáš Linhart**

lukasl@vyfuk.mff.cuni.cz

## Úloha II.4 ... Stav beztíže

6 bodů; průměr 4,52; řešilo 23 studentů

Jirka se vydal na večerní procházku s přáteli. V průběhu večera si všiml, že přes oblohu přeletěla Mezinárodní vesmírná stanice (ISS). Jeden z kamarádů se jej zeptal, jak vysoko nad povrchem ISS obíhá. Jirka si však výšku nepamatoval a on, ani žádný z jeho přátel, nemají signál, proto si údaj nemohou vyhledat na internetu. Rozhodl se tedy, že výšku  $h$  ISS nad povrchem spočítá. Pozoroval proto noční oblohu a na hodinkách změřil, že další přelet ISS nastal o  $T = 93$  min později. Dále si vzpomněl, že poloměr Země je  $R = 6378$  km a gravitační zrychlení na povrchu je  $a_g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Spočítejte, stejně jako Jirka, výšku ISS nad zemským



povrchem s využitím pouze těchto tří údajů, když víte, že dvě tělesa o hmotnostech  $m$  a  $M$ , ve vzájemné vzdálenosti  $r$  na sebe působí gravitační silou o velikosti:

$$F_g = \frac{GMm}{r^2},$$

kde  $G$  je konstanta, jejíž číselnou hodnotu si Jirka rovněž nepamatuje.

Nejdříve se zamysleme nad tím, z jakého vztahu by bylo možné výšku ISS nad povrchem vyjádřit. Využít můžeme toho, že na této výšce bude určitě záviset velikost gravitační síly, která na ISS působí. Dále víme, že gravitační síla drží ISS na kruhové dráze, hraje tedy roli dostředivé síly, pro kterou platí vztah:

$$F_d = \frac{mv^2}{r},$$

kde  $m$  je hmotnost tohoto tělesa a  $v$  jeho rychlost.

Gravitační sílu mezi Zemí a stanicí můžeme určit pomocí vztahu ze zadání. Označme si  $h$  výšku ISS nad povrchem a  $m_S$  její hmotnost. Celková vzdálenost ISS od středu Země je poté  $R + h$  a vztah pro gravitační sílu tedy bude mít tvar

$$F_g = \frac{Gm_S M}{(R + h)^2},$$

kde používáme stejné značení jako v zadání.

Nyní můžeme, jak jsme již naznačili dříve, využít toho, že gravitační síla v této úloze odpovídá dostředivé síle, čímž dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} F_d &= F_g \\ \frac{m_S v^2}{r} &= \frac{Gm_S M}{(R + h)^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

První věcí, které si všimneme, je, že se nám zkrátí hmotnost stanice, což je velmi důležité, neboť ta není v zadání uvedena. Následně je také důležité si všimnout toho, že v této rovnici, z níž chceme nakonec vyjádřit  $h$ , nyní ještě neznáme tři další veličiny - rychlost stanice  $v$ , poloměr dráhy, po které obíhá Zemí  $r$  a součin gravitační konstanty a hmotnosti Země  $GM$  (místo jejich součinu bychom též samozřejmě mohli uvažovat každou veličinu zvlášť, ale jak se za chvíli ukáže, zvolený přístup je výhodnější).

Začneme od nejjednodušší otázky. Jaký je poloměr dráhy, po které stanice obíhá? Z jednoduché představy dojdeme k tomu, že se opět jedná o vzdálenost mezi středem Země a ISS, tedy  $r = R + h$ .

O nepříliš těžší je určení rychlosti stanice  $v$ . Stačí nám využít základní vztah  $v = s/t$ . Z Jirkova pozorování víme, že celou planetu stanice oběhla za čas  $T$ . Již víme, že obíhá po kružnici o poloměru  $r = R + h$ , čímž pádem je uražená vzdálenost  $s = 2\pi(R + h)$ . Rychlost je tedy

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi(R + h)}{T}.$$

Nyní nám již jen zbývá určit součin  $GM$ . K tomu využijeme poslední zadaný údaj, kterým je gravitační zrychlení na povrchu Země  $a_g$ . To totiž můžeme s využitím druhého Newtonova zákona a vztahu pro gravitační sílu vypočítat jako

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM}{R^2}$$

a z této rovnice již můžeme vyjádřit hledaný součin  $GM$ :

$$GM = a_g R^2.$$

V tuto chvíli nám již jen zbývá vše dosadit do rovnice (1) a poté vyjádřit výšku  $h$ :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$\frac{4\pi^2(R+h)^2}{T^2(R+h)} = \frac{a_g R^2}{(R+h)^2}$$

Výšku  $h$  je nyní nejjednodušší vyjádřit tak, že nejprve vyjádříme  $(R+h)$  a následně odečteme  $R$ , čímž získáme výsledný vztah pro výšku  $h$ :

$$h = \sqrt[3]{\frac{a_g R^2 T^2}{4\pi^2}} - R$$

Po dosazení číselných hodnot ze zadání dostáváme tedy výsledek  $h \doteq 4,22 \cdot 10^5 \text{ m} = 422 \text{ km}$ , což velmi dobře odpovídá skutečnosti, neboť ISS obvykle obíhá Zemi ve výšce 418 až 422 km.

### Zajímavost

Za povšimnutí také stojí, že v průběhu řešení této úlohy jsme v podstatě odvodili třetí Keplerův zákon pro kruhový pohyb. Pokud dosadíme do rovnice (1) odvozené vztahy pro rychlost  $v$  a poloměr  $r$ , ale již nedosadíme za součin  $GM$  a následně provedem několik úprav, dostaneme právě jednu z podob třetího Keplerova zákona

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM}. \quad (2)$$

Dostat se z tohoto tvaru na více známou podobu

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3}$$

již jen vyžaduje uvědomit si, že výraz na pravé straně rovnice (2) je stejný pro všechna tělesa obíhající dané těleso (v našem případě Zemi), a tak se musí i pro libovolná dvě obíhající tělesa rovnat jejich levé strany, neboli:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}.$$

Z toho, že jsme v průběhu řešení úlohy tento zákon odvodili, také vyplývá, že jsme si jeho použitím mohli výpočty značně zjednodušit. Jeho užitím bychom ale zároveň přišli o velkou

část chápání toho, o co v úloze vlastně jde. Také vzhledem k tomu, co vše Jirka zapomněl, je těžké věřit tomu, že by si vzpomněl zrovna na potřebnou podobu třetího Keplerova zákona.

*Aleš Opl*

ales@vyfuk.mff.cuni.cz

### Úloha II.5 ... Bezdrátová sluchátka

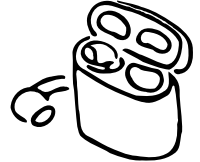
7 bodů; průměr 4,94; řešilo 16 studentů

Viktor si koupil nová bezdrátová sluchátka. Výrobce uvádí, že při maximální hlasitosti bude sluchátko hrát v typické vzdálenosti  $l = 0,01$  m od ušního bubínku s hladinou intenzity  $L_1 = 105$  dB.

Nápověda: Hladinu intenzity definujeme jako:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

kde  $I$  je intenzita zvuku,  $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  odpovídá přibližně intenzitě nejslabšího zvuku, který jsme schopni slyšet, (s hladinou intenzity 0 dB) a  $\log x$  je funkce *logaritmus*.



1. Jaký bude akustický výkon sluchátka při maximální hlasitosti?
2. Jaký bude podíl energie využitý na reprodukování hudby a celkové energie akumulátoru, jestliže sluchátko dokáže hrát na jedno nabití  $t = 4$  h? Sluchátko má v sobě zabudovaný akumulátor s napětím  $U = 3,7$  V a nábojem  $Q = 40$  mAh.
3. Viktor ztratil sluchátko někde na louce, která je  $a = 350$  m dlouhá a  $b = 200$  m široká. Jaká je pravděpodobnost, že Viktor stojící uprostřed louky sluchátko po zapnutí na maximální hlasitost uslyší, jestliže hladina intenzity zvuku ze sluchátka by musela být u Viktora alespoň 45 dB?

Sluchátka můžeme aproximovat bodovým všesměrovým zdrojem.

Známe hladinu intenzity sluchátek ve vzdálenosti  $l$  od ušního bubínku. Ta odpovídá nějaké intenzitě  $I$ , kterou můžeme spočítat podle vzorce, který se objevil v zadání. Zatím nebudeme do vzorce dosazovat konkrétní hodnoty, pouze si pomocí základních operací s logaritmy vyjádříme ze vzorce  $I$ .

$$\begin{aligned} L_1 &= 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}, \\ \frac{L_1}{10} &= \log \frac{I}{I_0}, \\ 10^{\frac{L_1}{10}} &= 10^{\log \frac{I}{I_0}}, \\ 10^{\frac{L_1}{10}} &= \frac{I}{I_0}, \\ I &= I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10}}. \end{aligned}$$

Potom už bude stačit vynásobit intenzitu  $I$  plochou  $S$ , do které se v této vzdálenosti zvuk sluchátek rozprostírá, a dostaneme hledaný akustický výkon  $P$ . Pro plochu  $S$  použijeme standardní vzorec pro povrch koule (v tomto případě o poloměru  $r = l$ ).

$$P = S \cdot I = 4\pi r^2 \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10}}.$$

Jelikož nás zajímá číselný výsledek, musíme ještě do výsledného vzorce dosadit konkrétní hodnoty ze zadání:

$$P = 4\pi l^2 \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10}} = 4\pi \cdot (0,01 \text{ m})^2 \cdot 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 10^{\frac{105 \text{ dB}}{10}} \doteq 3,97 \cdot 10^{-5} \text{ W}.$$

Sluchátka tedy budou mít při maximální hlasitosti akustický výkon jen přibližně  $4 \cdot 10^{-5} \text{ W}$ .

V druhé části úlohy chceme spočítat podíl mechanické energie zvuku  $E_m$  a elektrické energie akumulátoru  $E_e$ . Mechanickou energii zvuku zjistíme jako součin výkonu  $P$ , který jsme právě spočítali, a času  $t$ , po který zvládla sluchátka hrát na maximální hlasitost.

$$E_m = P \cdot t.$$

V akumulátoru je energie uchována ve formě práce, kterou vykoná elektrické pole při přesunu náboje  $Q$  mezi místy s různými potenciály. Jelikož je napětí rovno rozdílu potenciálů, máme:

$$E_e = U \cdot Q.$$

Musíme si ale dát pozor na jednotky. Naštěstí je náboj zadán v miliampérhodinách a čas v hodinách, takže se nám hodiny hezky vykrátí a bude stačit převést miliampéry na ampéry.

Zbývá vyjádřit výsledný poměr (rovnou dosadíme i konkrétní hodnoty ze zadání). Při dosazování konkrétních hodnot nezapomeneme za  $P$  dosadit přesnou nezaokrouhlenou hodnotu, kterou jsme získali v první části úlohy.

$$\frac{E_m}{E_e} = \frac{P \cdot t}{U \cdot Q} \doteq \frac{3,97 \cdot 10^{-5} \text{ W} \cdot 4 \text{ h}}{3,7 \text{ V} \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ Ah}} \doteq 1,07 \cdot 10^{-3}.$$

Na mechanickou energii zvuku se tedy přemění jen asi desetina procenta energie uložené v akumulátoru.

Při řešení poslední části úlohy si více přiblížíme fungování logaritmických veličin, mezi které lze zařadit právě hladinu intenzity zvuku  $L$ . Hrají-li sluchátka ve vzdálenosti  $l$  s hladinou intenzity  $L_1 = 105 \text{ dB}$  a Viktor zvládne registrovat alespoň  $L_2 = 45 \text{ dB}$ , znamená to, že je uslyší ještě na tisícinásobek vzdálenosti  $l$ . Proč? Mezi  $45 \text{ dB}$  a  $105 \text{ dB}$  je rozdíl  $60 \text{ dB}$ . Každých  $10 \text{ dB}$  znamená desetinásobný rozdíl intenzity zvuku. To znamená, že Viktor sluchátka uslyší ještě ve vzdálenosti, v níž bude mít zvuk milionkrát nižší intenzitu než ve vzdálenosti  $l$ . Intenzita ovšem klesá s druhou mocninou vzdálenosti, takže vzdálenost, ve které je hladina intenzity rovná  $L_2$ , nebude milionkrát větší než je  $l$ , ale jen tisíckrát větší ( $\sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$ ). Tisícnásobek jednoho centimetru je deset metrů, pokud tedy označíme tuto vzdálenost  $l'$ , máme  $l' = 10 \text{ m}$ .

Mohli bychom postupovat i více „matematicky“ (tento přístup je s předchozím samozřejmě ekvivalentní) a využít základních pravidel pro počítání s logaritmy:

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y, \quad \log(x^2) = 2 \log x.$$

Přejdeme nyní k výpočtu. Známe hladinu intenzity  $L_1$  pro vzdálenost  $l$  a chceme spočítat vzdálenost  $l'$ , při které je hladina intenzity  $L_2 = 45 \text{ dB}$ . Navíc víme, že intenzita zvuku klesá s druhou mocninou vzdálenosti, pro poměr intenzit tedy máme:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{l'}{l}\right)^2.$$

Tento poměr nyní dále využijeme k vyřešení úlohy. Všimněme si, že pokud vypočítáme rozdíl  $L_1 - L_2$ , tak dostaneme:

$$L_1 - L_2 = 10 \cdot \left( \log \frac{I_1}{I_0} - \log \frac{I_2}{I_0} \right) = 10 \log \left( \frac{I_1}{I_0} \right) = 10 \log \frac{I_1}{I_2}.$$

Z předchozího pak máme:

$$L_1 - L_2 = 10 \log \left( \frac{l'}{l} \right)^2 = 20 \log \frac{l'}{l},$$

kde jsme využili obě zmíněná pravidla pro počítání s logaritmy. Z tohoto vztahu nyní stačí jen vyjádřit  $l'$  a dostaneme stejný výsledek, jako jsme dostali „méně matematickou“ úvahou, tedy:

$$l' = l \cdot 10^{\frac{L_1 - L_2}{20}} = 10 \text{ m}.$$

Pravděpodobnost  $p$ , že Viktor uslyší uprostřed louky sluchátko, které se může nacházet kdekoli, je potom rovna podílu ploch kruhu s poloměrem  $l'$  a plochy louky  $a \cdot b$ .

$$p = \frac{\pi r^2}{a \cdot b} = \frac{\pi(10 \text{ m})^2}{350 \text{ m} \cdot 200 \text{ m}} = \frac{1}{700} \pi \doteq 4,49 \cdot 10^{-3}.$$

Viktor tedy sluchátko uslyší s pravděpodobností menší než půl procenta. Dobrou zprávou je, že v nejhorším případě mu k jeho nalezení bude stačit prohledat louku po pásích širokých  $2 \cdot l' = 20 \text{ m}$ . To by znamenalo nachodit skoro 4 km.

**Viktor Materna**

materna@vyfuk.mff.cuni.cz

## Úloha II.E ... Segedín

7 bodů; průměr 5,37; řešilo 35 studentů

Při přípravě pondělního oběda Soňa přemýšlela, jak je možné, že uvařený knedlík vyplave. Napadlo ji, že vařením změní hustotu. Změřte hustotu libovolného druhu knedlíku před vařením a po něm. Platí pro vámi zvolený knedlík Sonina domněnka?



### Teorie

Protože hustotu knedlíků nelze měřit přímo (například hustoměrem), musíme ji změřit nepřímo. V tomto případě jsme zvolili měření objemu a hmotnosti. Z těchto dvou veličin je poté už možné vypočítat jejich hustotu.

Během vaření knedlíků se může jejich hustota změnit jak změnou objemu tak změnou hmotnosti. Ve vodě se může část rozpustit nebo naopak povrch může vsáknout vodu z okolí. Během varu se může voda uvnitř knedlíku vypařit a uniknout z něj nebo roztáhnout prostor, ve kterém je uvězněna. Dále se velikost může zvětšit kynutím, ale pokud jsou hodnoty měřeny těsně před vařením, tak se dá tato změna většinou zanedbat, neboť při vysokých teplotách ke kynutí nedochází.

### Postup

Objem i hmotnost bylo potřeba změřit před vařením a po něm. Vše bylo uděláno bez prodlev, aby byly omezeny změny teploty. Měření bylo vždy provedeno na více knedlíčích pro zpřesnění výsledků. Měření hmotnosti je možno provést jednoduše pomocí kuchyňské váhy. Naše váha měřila s přesností na gramy, lze tedy říci, že chyby měření hmotnosti jsou menší než jedno procento, což je zanedbatelné vzhledem k chybám měření objemu.

Měření objemu je mnohem složitější. Knedlíky nelze rozumně popsat jako geometrický tvar, u kterého z rozměrů umíme spočítat objem. Dva problémy má i měření, kdy se těleso ponoří do vody a odečte se rozdíl objemů vody samotné a vody s tělesem. Prvním problémem je rozmáčení knedlíku, které by se dalo vyřešit například zabalením knedlíku do tenké fólie. Druhým problémem je nižší hustota knedlíku než vody. Kvůli tomu nelze knedlík jednoduše položit do vody, ale je ho nutné do vody tlačit. Při takovém měření buď nenaměříme celý objem knedlíku, anebo pod vodou naměříme i kus své ruky, oboje vede ke zkresleným výsledkům.

Řešením tohoto problému může být záměna vody za jinou kapalinu nebo za sypkou látku, která se chová také trochu jako kapalina. Pro tento účel byly vybrány drobné korálky. Protože bylo měřeno v odměrné nádobě s nejmenším dílem stupnice 25 ml, lze chybu způsobenou velikostí korálek zanedbat.

### Výsledky měření

Během našeho měření jsme zjistili, že u kynutého a houskového knedlíku můžeme pozorovat přibližně stejné změny. V obou případech se vytvoří vrstvička na povrchu, která obsahuje poměrně hodně vody, pod ní je pórovitá výplň obsahující spoustu páry. Tato pára při vaření vznikla z vlhkosti přítomné v těstě a při zvětšování svého objemu zvětšila objem všech „mezer“. Z těchto knedlíků se také moc velká část nerozpustí, což je vidět z relativně čisté vody, která po vaření knedlíků zůstává.

V následující tabulce jsou uvedeny průměry hustot před vařením a po vaření různých druhů knedlíků včetně jejich chyb. Ty byly vypočteny z chyby měření objemu a statistické chyby, protože ostatní chyby byly zanedbatelné.

typ knedlíku	před vařením		po vaření	
	$\rho$	$\sigma$	$\rho$	$\sigma$
kynutý knedlík plněný	611	87	547	61
kynutý knedlík prázdný	610	153	330	42
houskový knedlík	895	47	530	17

Tab. 1: Hustoty knedlíků před a po vaření v  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

### Diskuze

Toto měření potvrdilo pro námi zvolené knedlíky domněnku, že se při vaření snižuje jejich hustota. Měření je však velmi nepřesné, a proto je potřeba výsledné hodnoty brát pouze jako

řádové určení. Největší chyby vneslo měření objemu, proto pokud by byl pokus opakován, měl by se objem měřit jinak.

*Pavel Provazník*  
pavelp@vyfuk.mff.cuni.cz

## Úloha II.V ... Meteorologická

7 bodů; průměr 3,92; řešilo 12 studentů

1. *Jaká maximální část primární duhy může být ze zemského povrchu vidět? Existuje nějaká poloha Slunce, pro kterou ji není možné vůbec pozorovat?*
2. *Jak široká je primární duha, vyjádřeno ve stupních? Předpokládáme, že na jednom okraji duhy je červené světlo, pro které má index lomu ve vodě hodnotu  $n_c = 1,330$ , a druhý okraj tvoří modré světlo s indexem lomu  $n_m = 1,337$ .*

1. Ve Výfučtení jsme si ukázali, že duhu vidíme v úhlové vzdálenosti  $42^\circ$  od bodu naproti Slunci. To znamená, že při určování části duhy, kterou můžeme vidět, musíme vycházet z polohy tohoto bodu. Ten bude většinu dne pod obzorem, tedy duhu vidíme jen menší část. Největší část uvidíme, když bude Slunce, a tedy i bod naproti Slunci, přímo na obzoru. V takovém okamžiku uvidíme z duhy právě polovinu.

Bod přímo naproti Slunci může být na obloze i výše, ale to je pak Slunce pod obzorem, takže se v kapičkách vody nemůže lámat jeho světlo a duha v noci nevzniká. Kromě noci pak není možné duhu pozorovat tehdy, když je bod proti Slunci více než  $42^\circ$  pod obzorem, tedy když je Slunce více než  $42^\circ$  nad obzorem. To se v letních měsících kolem poledne děje (o rovnodennosti je v poledne přibližně  $40^\circ$  nad obzorem, při letním slunovratu asi  $63,5^\circ$ ), v takovou dobu tedy duhu pozorovat nemůžeme.

2. Pro určení šířky duhy spočítáme úhel  $\gamma_0$  dle vzorce z Výfučtení pro červené a modré světlo a pak tyto polohy odečteme. Pro červené světlo dostáváme

$$\gamma_{0\text{-červená}} = 4 \arcsin \left( \frac{\sqrt{\frac{4-n_c^2}{3}}}{n} \right) - 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{4-n_c^2}{3}} \right) \doteq 42,52^\circ.$$

Pro modré světlo dostáváme po dosazení

$$\gamma_{0\text{-modrá}} = 4 \arcsin \left( \frac{\sqrt{\frac{4-n_m^2}{3}}}{n} \right) - 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{4-n_m^2}{3}} \right) \doteq 41,50^\circ.$$

Vypočítali jsme tedy, že horní okraj duhy je červený a dolní modrý, což souhlasí s naším pozorováním, a šířka duhového oblouku je přibližně  $1,02^\circ$ .

*Kateřina Rosická*  
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz







## Pořadí řešitelů po II. sérii

## Kategorie šestých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
		5	5	6	6	7	7	7	43	86
1. Vojtěch Reif	ZŠ u sv. Štěpána Praha 2	2	5	–	–	–	–	–	7	32
2. Valentýna Sochorová	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	28
3. Agáta Húšťavová	European School Luxembourg II	–	5	–	–	–	6	–	11	21
4. Jan Foldyna	Anglofonní základní škola, z. ú.	1	2	0	–	–	–	–	3	18
5. Tomáš Rataj	ZŠ Stupkova, Olomouc	–	2	2	–	–	1	–	5	14
6. Jakub Chum	G Nad Štolou, Praha	–	3	–	–	–	7	–	10	10
7. Antonín Papoušek	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	4
8. Filip Němec	PORG, Praha	1	2	–	–	–	–	–	3	3

## Kategorie sedmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
		5	5	6	6	7	7	7	43	86
1. Matěj Krivánek	ZŠ T. G. M. Mor. Budějovice	5	5	3	5	–	7	–	25	56
2. Adam Houdek	ZŠ a MŠ , Březová	5	5	3	6	–	–	–	19	52
3. Matěj Ondrušek	ZŠ Horácké náměstí, Brno	5	2	0	4	1	1	–	13	40
4. Květa Bouchalová	G, Olomouc-Hejčín	5	3	4	–	–	–	–	12	34
5. Hana Bayerová	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	–	–	–	–	–	–	–	33
6. Emma Burešová	Jiráskovo G, Náchod	3	2	–	–	–	–	–	5	32
7. Eliška Knopfová	ZŠ J. A. Komenského Hradec Králo	5	5	–	–	–	–	–	10	30
8.–9. Bartoloměj Stoklásek	ZŠ Troubelice	2	2	4	6	–	–	–	14	29
8.–9. Antonín Strída	ZŠ a MŠ Lutín	5	5	3	–	–	–	–	13	29
10. Daniel Stražil	G Christiana Dopplera, Praha	–	2	2	–	–	7	–	11	26
11. Jáchym Turner	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	25
12. Jáchym Šleška	ZŠ Haškova, Uničov	2	3	–	–	–	–	–	5	24
13.–15. Tereza Stražilová	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	–	–	–	–	–	–	–	20
13.–15. Matylda Svobodová	ZŠ Novoměstská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	20
13.–15. Klára Zíková	G J. Vrchlického, Klatovy	3	2	3	0	–	–	–	8	20
16. Klára Valentová	ZŠ Hálkova, Olomouc	–	2	3	–	–	–	–	5	19
17.–18. Dmitrij Petreckyj	Fakultní ZŠŠ PedF UK Praha 5 - S	–	–	–	–	–	–	–	–	18
17.–18. Kateřina Zubálová	ZŠ Stupkova, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	18
19. Sofie Desnicová	G, Litovel	–	2	–	–	–	–	–	2	17
20. Martin Maláč	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	16
21.–23. Erik Hojgr	ZŠ Hálkova, Olomouc	2	1	1	–	–	–	–	4	15
21.–23. Lukáš Lizůch	Masarykovo G, Vsetín	–	2	1	–	–	–	–	3	15
21.–23. Alexandra Sochorová	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	15
24. Beáta Mudráková	ZŠ a MŠ Husova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	13
25. Matyáš Churavý	EKO G, Brno	–	5	1	–	–	–	–	6	11
26.–28. Mikuláš Glozar	ZŠ Masarova, Brno	–	2	–	–	–	–	–	2	10
26.–28. Matěj Ilner	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	10
26.–28. Šimon Novák	Nový PORG, Praha	5	–	–	–	–	–	–	5	10
29. Sari Attar	ZŠ a MŠ Praha 5 - Hlubočepy	–	2	–	–	–	1	–	3	8
30. Marek Šoltés	ZŠ Svážná, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	7

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	43	86
31. Josef Povolný	ZŠ Školní ul., Hrádek nad Nisou	-	-	-	-	-	-	-	-	4
32. Ondřej Kulhánek	FZŠ prof. O. Chlupa, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	3

## Kategorie osmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	6	6	7	7	7	7	38	76
1. Jana Feldbabelová	ZŠ Jemnice	-	5	6	6	7	7	7	38	72
2. Max Menčík	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	-	2	2	6	7	2	5	24	57
3. Sámó Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	-	5	3	6	7	7	2	30	55
4.-5. Petr Barták	Slovanské G, Olomouc	-	5	3	0	0	6	3	17	42
4.-5. Filip Borkovec	G, Křenová, Brno	-	3	3	-	-	7	3	16	42
6. Dominik Kudr	ZŠ a MŠ Studenec	-	3	2	1	-	6	-	12	35
7. Patrik Piňos	ZŠ Gajdošova, Brno	-	2	2	-	-	4	-	8	32
8. Aneta Mičulková	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	2	-	-	-	4	-	6	28
9.-10. Tomáš Čanda	ZŠ J. A. Komenského Blatná	-	5	-	-	-	-	-	5	26
9.-10. Kateřina Hujová	G, Voděradská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	26
11. Magdaléna Křížová	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	-	-	-	-	-	-	-	-	25
12. Matěj Knop	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	23
13.-14. Zuzana Kýrová	ZŠ nám. Svornosti, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	22
13.-14. Juraj Štefina	ZŠ sv. Margity Púchov	-	2	3	-	-	3	-	8	22
15.-17. Aleš Antoň	G J. Heyrovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	21
15.-17. Adam Jurtík	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	-	21
15.-17. Julie Krčmařová	G Volgogradská 6a, Ostrava	-	2	2	-	-	-	-	4	21
18.-19. Karolína Kačalková	ŠpMNDaG, Bratislava	-	5	-	-	-	-	-	5	20
18.-19. Josef Turek	G, Šumperk	-	2	-	-	-	4	-	6	20
20. Štěpán Zajačik	ZŠ Školní, Chomutov	-	-	-	-	-	-	-	-	19
21.-22. Matěj Purkert	G, Písnická, Praha	-	2	-	-	-	-	-	2	18
21.-22. Linda Rokosová	G, Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	-	18
23. Lucie Kohoutková	Masarykovo G, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	17
24.-27. Ondřej Bohatý	G Opatov, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	16
24.-27. Josef Eliáš Formánek	G, Křenová, Brno	-	5	4	-	-	7	-	16	16
24.-27. Lukáš Hobza	G O. Havlové, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	16
24.-27. Renata Petlanová	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	-	2	0	-	-	-	-	2	16
28.-29. Filip Procházka	G J. Heyrovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	15
28.-29. Alžběta Sochorová	G, Blovice	-	2	-	-	-	7	-	9	15
30. Patrik Hřebínek	ZŠ Na Příkopech, Chomutov	-	-	-	-	-	-	-	-	14
31.-34. Filip Andrúši	G, Křenová, Brno	-	3	3	-	-	7	-	13	13
31.-34. Marek Petlan	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	-	-	-	-	-	-	-	-	13
31.-34. Tereza Vargová	ŠpMNDaG, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	13
31.-34. Timotej Vašina	ZŠ a MŠ Praha 6 - Dejvice	-	-	-	-	-	-	-	-	13
35.-36. Erik Rössler	PORG, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	11
35.-36. Šimon Václavík	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	-	11
37. Jakub Brázda	ZŠ Politických vězňů, Slaný	-	-	-	-	-	-	-	-	8
38. Vít Foltas	ZŠ a MŠ Spálov	-	-	1	-	-	-	-	1	7
39.-43. Tomáš Dolanský	G Týn nad Vltavou	-	-	-	-	-	-	-	-	6
39.-43. Michaela Chovancová	ŠpMNDaG, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	6
39.-43. Marína Kiliánová	ŠpMNDaG, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	6
39.-43. Eva Kundratová	ZŠ Komenského II Zlín	-	-	-	-	-	-	-	-	6
39.-43. Jiří Zakutanský	G, Šternberk	-	-	-	-	-	-	-	-	6
44. Valerie Labutová	G, Nový Bydžov	-	5	-	-	-	-	-	5	5
45. Lukáš Kulhánek	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	-	2

## Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	76
1. <i>Matej Karpáč</i>	ZŠ Jána Švermu	-	5	4	6	7	6	-	28	61
2. <i>Kamilo Tomáš</i>	G Jana Keplera, Praha	-	5	-	6	6	7	-	24	60
3. <i>Alena Mouchová</i>	G, Český Krumlov	-	3	4	6	4	4	7	28	59
4. <i>Kosma Šatánek</i>	ZŠ a MŠ Telecí	-	5	3	6	7	7	2	30	56
5. <i>David Laušman</i>	G Opatov, Praha	-	5	2	6	-	7	-	20	54
6. <i>Martin Motyčka</i>	ZŠ Nad Vodovodem, Praha 10	-	5	3	-	7	-	-	15	49
7. <i>Monika Dlouhá</i>	G Matyáše Lercha, Brno	-	3	6	1	4	6	4	24	47
8.-10. <i>Tereza Kubínová</i>	G, Litoměřická, Praha	-	-	5	6	-	-	-	11	46
8.-10. <i>Ondřej Porod</i>	G Týn nad Vltavou	-	3	3	-	6	7	2	21	46
8.-10. <i>Matěj Šebesta</i>	Masarykovo G, Vsetín	-	3	2	-	4	7	2	18	46
11. <i>Martin Vagner</i>	G, Voděradská, Praha	-	5	-	-	7	6	5	23	45
12. <i>Natálie Lászlóová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	-	4	2	3	2	6	-	17	41
13.-14. <i>Antonín Plašil</i>	G Dobruška	-	5	-	6	-	-	-	11	40
13.-14. <i>Michaela Urbanová</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	-	5	2	4	3	-	-	14	40
15. <i>Klaudie Zemene</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	-	5	1	6	-	-	-	12	39
16. <i>Kristýna Otevřelová</i>	ZŠ Brno, Sirotkova 26	-	5	5	6	-	-	-	16	37
17. <i>Denis Petka</i>	G J. Škody, Přerov	-	5	3	-	-	7	-	15	36
18.-19. <i>Jan Hrubec</i>	OPEN GATE Říčany	-	-	-	-	-	-	-	-	33
18.-19. <i>Marek Opluštil</i>	G, Litovel	-	2	-	-	-	-	-	2	33
20. <i>Vlasta Suchá</i>	Jiráskovo G, Náchod	-	2	4	-	-	4	-	10	32
21.-24. <i>Filip Groh</i>	ZŠ Liberec 10	-	-	-	-	-	-	-	-	30
21.-24. <i>Ondřej Kočur</i>	Wichterlovo G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	30
21.-24. <i>Vít Kubal</i>	G, Český Krumlov	-	0	0	-	-	7	5	12	30
21.-24. <i>Petra Prknová</i>	ZŠ Jemnice	-	2	-	-	-	-	-	2	30
25.-26. <i>Lucie Endlová</i>	G O. Havlové, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	29
25.-26. <i>Anežka Krčmová</i>	ZŠ Brno, Sirotkova 26	-	3	2	-	-	-	-	5	29
27. <i>Jana Pohořilská</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	-	2	3	-	-	-	-	5	28
28. <i>Michael Ambros</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	4	-	-	-	-	-	4	27
29. <i>Adam Ciešlar</i>	ZŠ Divišov	-	5	-	-	-	4	-	9	26
30.-31. <i>Filip Gašparín</i>	Wichterlovo G, Ostrava	-	5	5	-	-	-	-	10	25
30.-31. <i>Ondřej Rejman</i>	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	-	-	-	-	-	-	-	-	25
32. <i>Vojtěch Černý</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	24
33.-35. <i>Jana Fišerová</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	21
33.-35. <i>Leonard Lindvay</i>	G Grösslingová, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	21
33.-35. <i>Pavel Zachariáš</i>	G Tišnov	-	5	-	-	-	-	-	5	21
36.-39. <i>Max Denemarek</i>	G Matyáše Lercha, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	19
36.-39. <i>Natálie Jochová</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	-	-	-	-	-	-	-	-	19
36.-39. <i>Pavla Jurásková</i>	G Dobruška	-	-	-	-	-	-	-	-	19
36.-39. <i>Šimon Kloušek</i>	Wichterlovo G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	19
40.-42. <i>Martin Landík</i>	G Ústavní, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	17
40.-42. <i>David Manhalter</i>	EKO G, Brno	-	1	3	2	-	-	-	6	17
40.-42. <i>Ondřej Zapletal</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	17
43.-45. <i>Nicol Plšková</i>	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	16
43.-45. <i>Petra Šilerová</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	16
43.-45. <i>Vítek Vácha</i>	ZŠ a MŠ Wolkerova, Havl. Brod	-	-	-	-	-	-	-	-	16
46. <i>Klára Hašová</i>	G, Křenová, Brno	-	4	-	-	-	-	-	4	15
47.-51. <i>Šimon Hanák</i>	Cyrlomet. G a SOŠ pg., Brno	-	3	-	-	-	-	-	3	14
47.-51. <i>Ondřej Pavelka</i>	ZŠ a MŠ Pňovice, Litovel	-	2	1	-	-	2	-	5	14
47.-51. <i>Jakub Štěpánek</i>	ZŠ Nad Vodovodem, Praha 10	-	-	-	-	-	-	-	-	14
47.-51. <i>Petr Vaško</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	14

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
		5	6	6	7	7	7	7	38	76
47.–51. <i>Julie Vlčanová</i>	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	3	–	–	–	–	–	3	14
52.–54. <i>Josef Hugo Holub</i>	ZŠ Gajdošova, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	13
52.–54. <i>Natálie Manoušková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	2	2	–	–	–	–	4	13
52.–54. <i>Jan Motlák</i>	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	13
55. <i>Jan Herzig</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	12
56.–57. <i>Vojtěch Kužílek</i>	ZŠ Heyrovského, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	11
56.–57. <i>Julie Svobodová</i>	ZŠ Chomutovská, Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	–	11
58. <i>Kevin Nguyen</i>	ZŠ Chomutovská, Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	–	9
59. <i>Emá Vondráčková</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	8
60. <i>Barbora Barnatová</i>	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	–	–	–	–	–	–	–	7
61.–63. <i>Mikuláš Hořenek</i>	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	6
61.–63. <i>Lenka Hromádková</i>	G, Hlinsko	–	–	–	–	–	–	–	–	6
61.–63. <i>Klára Souza de Joo de</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	6
64. <i>Marek Hromada</i>	ŠpMNDAg, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	5
65.–66. <i>Marie Steinhäuserová</i>	ZŠ Strmilov	–	–	–	–	–	–	–	–	3
65.–66. <i>Šimon Tureček</i>	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	3
67. <i>Štěpán Železný</i>	ZŠ Hamry, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	1
68.–69. <i>Mikoláš Palouda</i>	G, Český Krumlov	–	0	–	–	–	–	–	0	0
68.–69. <i>Štěpán Petr</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	0



**Korespondenční seminář Výfuk  
UK, Matematicko-fyzikální fakulta  
V Holešovičkách 2  
180 00 Praha 8**

www: <https://vyfuk.mff.cuni.cz>  
e-mail: [vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz](mailto:vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz)

 /ksvyfuk  @ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.