Výfučtení: Hybnost

Úvod

K popisu světa kolem nás využíváme fyzikální veličiny a vztahy mezi nimi popisují fyzikální zákony. Důležitým příkladem těchto zákonů jsou zákony zachování. V prvním Výfučtení jsme se zabývali studiem zákona zachování energie, zde na toto Výfučtení navážeme a představíme si další důležitou veličinu nazývanou *hybnost*. Ukážeme, jaký má hybnost vztah k Newtonovým zákonům, podíváme se na to, kdy se hybnost zachovává a jak se tento zákon zachování dá prakticky využít, jak sám o sobě, tak v kombinaci se zákonem zachování energie.

Definice

Hybnost je v klasické mechanice definována jednoduše jako součin hmotnosti tělesa a jeho rychlosti, tedy:

$$p = mv\,.$$

Hybnost je přitom, podobně jako rychlost, *vektorová* veličina, má tedy velikost a směr. Pokud bychom se zabývali studiem pohybu tělesa v rovině nebo v prostoru, je výhodné si hybnost rozložit do složek ve směru souřadnicových os. Pro jednotlivé složky hybnosti pak platí:

$$p_x = mv_x\,, \qquad p_y = mv_y\,, \qquad p_z = mv_z\,.$$

Tyto tři rovnice se dají kompaktně zapsat jako jedna rovnice:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\,,$$

kde tučný symbol znamená, že se jedná o vektorovou veličinu. Další způsob, jak chápat tuto rovnici, je, že velikost hybnosti je rovna m krát velikost rychlosti a že hybnost má stejný směr jako rychlost, což bychom očekávali.

Nová formulace Newtonových zákonů

Na základní škole se můžeme setkat s následující (nebo velmi podobnou) formulací Newtonových zákonů:

1. Zákon setrvačnosti: Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud na něj nepůsobí síla.

2. Zákon síly: Zrychlení tělesa je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné jeho hmotnosti, matematicky:

$$F = ma\,.$$

3. Zákon akce a reakce: Kdykoliv působí jedno těleso na druhé silou, působí i druhé těleso na to první silou stejné velikosti a opačného směru.

Ukazuje se, že takováto formulace není obecně úplně vhodná. Například když budeme chtít popisovat systémy více těles nebo tělesa s proměnnou hmotností (například raketa urychlovaná vyletujícím palivem), tak se dostaneme do zbytečných obtíží. Sám Isaac Newton ve svém díle *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, vydaném v roce 1687, svůj druhý silový zákon formuloval takto:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}\,,$$

kde $\mathbf{F}$ je výsledná síla působící na libovolný systém těles a $\mathbf{\Delta p}$ je celková změna hybnosti tohoto systému, tedy (vektorový) součet změn hybnosti každého z těles ve zkoumaném systému. Jinak řečeno, působící síla je rovna časové změně hybnosti a směr změny hybnosti je stejný jako směr síly (opět tato vektorová rovnice obsahuje 3 rovnice pro jednotlivé složky).

V čem se však tato nová formulace liší od té původní? Vezměme jednoduchý jednorozměrný případ, kdy síla působí na jedno těleso. Původně jsme měli:

$$F = ma = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t}\,,$$

ale nyní máme:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta (mv)}{\Delta t}\,.$$

Newtonova definice síly se tedy liší v tom, že bere v úvahu i případy, kdy se mění hmotnost. Nyní tyto případy nebudeme uvažovat a vrátíme se k nim na konci dílu, proto pro nás bude zápis $F = ma$ ekvivalentní s novou formulací, kterou budeme dále výhradně používat. Pro nás je tedy druhý silový zákon:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}\,.$$

Podívejme se nyní na zákon setrvačnosti. Ten hovoří o situaci, kdy na těleso (nebo soustavu těles) působí nulová výsledná síla. Z druhého zákona jednoduše máme:

$$0 = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \implies \mathbf{p} = \mathrm{konst}\,.$$

Celková hybnost takovéto uzavřené soustavy nemění. Všimněme si zajímavého jevu, zákon setrvačnosti nám přímo vyplynul z 2. zákona. Mohli bychom ho tedy při budování mechaniky úplně vynechat, neboť je automaticky splněn díky silovému zákonu.[1]

Hybnost se zachovává

V předcházející kapitole jsme při formulaci zákonů tak nějak vynechali zákon akce a reakce. Je to proto, že nám vyplyne z obecnějšího zákona – ze zákona zachování hybnosti. Nejprve se však zamysleme nad tím, proč by se vůbec měla hybnost zachovávat.

Z prvního zákona rovnou víme, že se hybnost zachovává, pokud na uzavřenou soustavu nepůsobí síla. Co když však nějaká síla bude působit? Zamysleme se nad původem takovéto

[1] To, že nám zákon setrvačnosti nedává žádné nové výsledky, neznamená, že by byl úplně zbytečný. Umožňuje nám například definovat pojem *inerciální soustava*, tedy soustava, ve které platí zákon setrvačnosti = soustava, na kterou nepůsobí žádná vnější síla

síly. Může se jednat například o gravitaci Země, která neustále působí na Měsíc, a tím zakřivuje jeho dráhu, nebo o člověka, který zvedne tašku plnou nákupu, a tím urychlí všechny předměty uvnitř a podobně. Všechny tyto síly, ať už jakéhokoliv typu, který dokážeme vymyslet, mají společné, že jsou způsobeny nějakým dalším tělesem. Stačilo by nám tedy vždy tato tělesa zahrnout do naší studované soustavy a tento postup opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme soustavu, na kterou už žádná vnější síla nepůsobí.

V praxi jsme obvykle schopni najít poměrně malou uzavřenou soustavu, na níž sice ještě nějaká vnější síla působí, ale je obvykle buď tak malá, že ji můžeme zanedbat, nebo nijak neovlivňuje dynamiku systému, který studujeme. Například pokud budeme počítat úlohu, v níž se srazí na Zemi dvě tělesa, tak na naši uzavřenou soustavu sice ještě bude působit například gravitace Slunce, která je vnější silou, ale ovlivňuje pohyb všech předmětů skoro stejně[2] (celá Země obíhá kolem Slunce), takže výsledek srážky nijak neovlivní.

V obecném případě, kdy je pro nás vliv vnějších sil nezanedbatelný, formulujeme zákon zachování hybnosti například následovně:

> V soustavě, na kterou působí nulová vnější výsledná síla se hybnost zachovává, a pokud síla působí, pak se celková hybnost mění jako:
>
> $$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}\,.$$

Akce a reakce

Studujme nyní některé důsledky zákona zachování hybnosti. Uvažujme jednoduchou soustavu dvou těles, například Zemi a Měsíc, přičemž zanedbáme vlivy ostatních těles.

Víme, že Země působí na Měsíc gravitační silou F_{Z} a tato síla neustále mění jeho hybnost (mění její směr):

$$\frac{\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{M}}}{\Delta t} = \mathbf{F}_{\mathrm{Z}}\,.$$

Vzhledem k tomu, že je v této soustavě celková hybnost konstantní (zanedbali jsme všechny vnější síly), musí se měnit i hybnost Země,[3] a to navíc tak, aby byl součet změn hybností nulový. Musí tedy platit:

$$\frac{\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{Z}}}{\Delta t} = -\mathbf{F}_{\mathrm{Z}}\,.$$

Na Zemi tedy působí síla o stejné velikosti jako F_{Z}, ale v opačném směru. Jediné další těleso v této soustavě je Měsíc, ten tedy působí na Zemi silou stejné velikosti, ale opačného směru:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{M}} = -\mathbf{F}_{\mathrm{Z}}\,.$$

Tímto jsme v takto jednoduchém systému dostali zákon akce a reakce přímo ze zákona zachování hybnosti. Mohli bychom však argumentovat, že systém Země–Měsíc je příliš jednoduchý a že

[2] Gravitace Slunce je ve skutečnosti na bližší půlce Země nepatrně větší. Totéž zřejmě platí i pro gravitaci Měsíce a tato nehomogenita pole je například jedním z příčin přílivu a odlivu

[3] Představa, že je Země v klidu a Měsíc kolem ní obíhá, tedy není úplně přesná, ve skutečnosti Země i Měsíc obíhají kolem společného bodu v prostoru mezi nimi nazývaného *hmotný střed*. Kvůli větší hmotnosti Země je tento bod vzdálen od středu Země jen asi 4 500 km. Toto obíhaní je také jednou z dalších příčin přílivu a odlivu.

platnost tohoto zákona je pouze náhoda, nebo že funguje pouze pro síly dlouhého dosahu, jako je gravitace. Podívejme se, co se stane v o něco komplikovanějším systému.

Mějme člověka, který stojí na povrchu Země. Z předchozího odstavce už víme, že gravitační síly mezi člověkem a Zemí jsou stejné velikosti a opačného směru. Tentokrát tu však navíc máme sílu $F = F_\mathrm{g}$, kterou Země působí přímo na člověka tím, že na ní stojí. Tato síla nám zajišťuje, že člověk nepropadne podlahou. Když všechny tři síly sečteme, tak nám zbude výsledná síla (velikosti F_g) působící na člověka a ta by mohla měnit její hybnost. Protože však víme, že je celková hybnost konstantní, musí i na Zemi působit člověk stejnou dotykovou silou o velikosti $F = F_\mathrm{g}$ opačného směru, která zajistí naopak to, že se Země nebude přibližovat ke člověku. Máme tedy opět akci a reakci.

Podobným způsobem bychom mohli tuto argumentaci rozšířit na libovolně komplikovaný systém a vždy bychom nakonec dostali zákon akce a reakce. 3. Newtonův zákon tedy platí obecně a je přímým důsledkem zákona zachování hybnosti.

Pružná a nepružná srážka těles

Aplikujme nyní zákon zachování hybnosti na některé časté příklady. Prvním z takových příkladů jsou srážky, konkrétně dokonale *pružná* a *nepružná srážka*. Rozdělme si případy podle toho, jak přesně děj ovlivní pružnost tělesa.

Nepružná srážka

Začneme druhým případem, kde budeme počítat pouze s hybností. Uvažujme, že tělesa, která se sráží, se mohou deformovat pouze nevratně. Znamená to, že se tělesa po srážce sama nevrátí do původního tvaru. Tímto se nemohou sama od sebe odtlačit a jejich vzájemná rychlost je nulová. Jako příklad si můžeme představit plastelínu, která padá na zem. Při dopadu se deformuje a to tak, že již nevyskočí zpátky. Vzájemná rychlost plastelíny a Země je po srážce nulová.

Zákon zachování hybnosti (ZZH) si tedy můžeme zapsat v tomto tvaru:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u \; + m_2 u \,,$$

m značí hmotnosti jednotlivých těles, v rychlosti a u je společná rychlost po srážce. Pokud tedy známe hmotnosti a rychlosti těles před srážkou, tak ze ZZH snadno dopočítáme rychlost u po srážce. Poznamenejme ještě, že rychlost (i hybnost) je vektorová veličina, musíme tedy při počítání brát v úvahu její směr. To v tomto jednorozměrném případě zajistíme jednoduše pomocí znaménka.

Pokud bychom tedy chtěli například vypočítat čelní srážku osobního auta a autobusu při rychlosti $60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, tak dostaneme:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \,,$$

kde zvolíme například rychlost auta v kladném směru, tedy $v_1 = 60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, $v_2 = -60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Hmotnosti aut se pohybují kolem 2 tun, hmotnost některých autobusů kolem 14 tun. Po dosazení pro výslednou rychlost dostaneme:

$$u = -45\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \,.$$

Všimněme si, že rychlost vyšla záporná. To znamená, že po srážce se autobus i auto budou pohybovat stejným směrem jako autobus před srážkou (to bychom konec konců od takovéto srážky čekali). Opět došlo k deformaci těles, ta ale byla sama o sobě nevratná.

Představme si ještě jeden příklad nepružné srážky – dětské vláčky s magnetickými nárazníky. Pokud postavíme jeden vagon na koleje a druhý pošleme přímo proti němu, po spojení se rozpohybují oba vagony, ale menší rychlostí, kvůli zvýšení hmotnosti pohybující se soupravy.

Pružná srážka

Nyní si rozebereme další veličinu figurující v interakci těles, energii. Z prvního Výfučtení víme, že celková energie soustavy se (stejně jako hybnost) zachovává. V nepružném případě ale přenos energie není zcela bezztrátový, mezi tělesy může docházet například ke tření, zákon zachování mechanické energie tedy do výpočtu nepružné srážky zahrnout nelze (můžete si sami vyzkoušet vypočítat kinetickou energii těles před nepružnou srážkou a po ní a přesvědčit se, že se skutečně obecně nerovnají).

Opačná situace nastane v pružném případě, zde se tělesa po kontaktu dočasně pružně zdeformují, jejich společná energie se převede do této deformace, ale hned nato se začnou vracet do původních tvarů, čímž se budou navzájem odtlačovat. Deformace je zde vratná, její energie se tedy úplně převede zpět do kinetické formy, tělesa se tedy odpovídajícími (tentokrát ne nutně stejnými) rychlostmi oddělí. Příkladem budiž dokonalý hopík, který po odrazu od země vyletí znovu do původní výšky.

Zde se nám trochu komplikuje výpočet rychlostí. Na druhou stranu, k výpočtu nyní můžeme také použít rovnici vyplývající ze zákona zachování energie:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\,,\\
m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1u_1 + m_2u_2\,,
\end{aligned}
$$

kde u_1 a u_2 jsou rychlosti těles po srážce. Dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých, ze kterých se dají spočítat výsledné rychlosti, řešení této soustavy je poněkud náročné na úpravy výrazů, proto se jím zde zabývat nebudeme. Místo toho napíšeme rovnou výsledek, doporučujeme však čtenářům vyzkoušet si výsledek odvodit. Pro výsledné rychlosti vyjde:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_2\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\,,\\
u_2 &= v_1\frac{2m_1}{m_1 + m_2} + v_2\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,.
\end{aligned}
$$

Pružnou srážkou se dají modelovat i například srážky v částicových urychlovačích. V takovém případě již ale musíme kvůli velmi vysokým rychlostem počítat se speciální teorií relativity, jejímž autorem je Albert Einstein.

Rakety

V kapitole o Newtonových zákonech byla u zákona akce a reakce jako příklad uvedená raketa, která je urychlována palivovými spalinami, tuto situaci si nyní rozebereme podrobněji. Základní princip raketových pohonů vlastně spočívá ve spojení poznatků 2. a 3. Newtonova zákona. Tedy že síla je změna hybnosti za čas a že mezi ovlivňujícími se tělesy působí vzájemně opačné síly.

Představme si nyní stoupající raketu, stoupání bude evidentně probíhat díky tahové síle motorů. Její velikost si můžeme jednoduše spočítat z výše uvedených poznatků a vzorce:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}\,.$$

Ze zákona akce a reakce víme, že jsou spaliny urychlovány směrem dolů pod raketu stejně velkou silou, jakou je urychlována raketa směrem vzhůru. Předpokládejme, že každou sekundu vyletí z rakety spaliny o hmotnosti Δm rychlostí u. Spaliny tedy za $1\,\mathrm{s}$ získaly hybnost:

$$\Delta p = \Delta m \cdot u\,.$$

Musela na ně proto působit síla:

$$F = \frac{\Delta m \cdot u}{1\,\mathrm{s}}\,.$$

Z předchozích úvah víme, že stejná síla opačného směru působí na raketu a F je tedy hledaná tahová síla. Pomocí tohoto výsledku bychom pak mohli vypočítat zrychlení rakety. Je však třeba dávat si pozor, neboť pokud vypočítáme:

$$a = \frac{\Delta m \cdot u}{1\,\mathrm{s} \cdot m}\,,$$

tak hmotnost rakety m zřejmě není v čase konstantní. U dnešních raket tvoří většinu hmotnosti rakety právě palivo, jeho spalováním se tedy hmotnost rakety neustále mění. Proto pokud bude tok spalin stále stejně velký, pak pohyb rakety rozhodně nebude rovnoměrně zrychlený. Přesný výpočet toho, jak by pohyb vypadal, je však bohužel nad rámec tohoto textu.

Závěr

Hybnost hraje při formulaci zákonů ve fyzice velmi důležitou roli. V tomto textu jsme se seznámili s její definicí a představili jsme některé příklady jejího využití. Dále jsme viděli, že hybnost se, podobně jako energie, zachovává a kombinace těchto dvou zákonů zachování nám poskytuje důležitý nástroj jak k porozumění světa kolem nás, tak při počítání příkladů.

Jiří Kohl
`jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz`

Jakub Radim Zbončák
`zboncak@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.