Úloha III.V ... Hravě to přeskočím! 7 bodů; (chybí statistiky)

Jirka se jednoho dne vydal na menší plavbu po řece na voru. Cestou potkal Aleše, který dostal stejný nápad, a po chvilce se rozhodl, že by si s ním rád popovídal. Alešův vor se však nacházel až kousek za Jirkovým. Jirka je zdatný ve sportech a ví o sobě, že dokáže na zemi bez rozběhu snadno doskočit do vzdálenosti $D = 2\,\mathrm{m}$. Když Jirka odhadl, že vzdálenost, do níž musí skočit, aby bezpečně dopadl na Alešův vor, je $d = 1{,}8\,\mathrm{m}$, tak řekl: „Hravě to přeskočím!". Zapomněl však, že se nenachází na zemi, ale na řece, kde se vor může bez tření pohybovat.

1. *Podaří se Jirkovi bezpečně skočit na Alešův vor, pokud Jirka váží $m = 70\,\mathrm{kg}$ a vor $M = 400\,\mathrm{kg}$? Uvažujte, že je vor dost velký, takže se při odrazu nezmění jeho výška nad hladinou, ani nijak neovlivní svislou složku Jirkovy rychlosti.*

2. *Předpokládejme nyní, že vzdálenost vorů byla taková, že Jirka na Alešův vor doskočil. Jaký bude poměr rychlostí obou vorů (vůči hladině) poté, co Jirka dopadne na ten Alešův? Aleš váží také $m = 70\,\mathrm{kg}$ a hmotnost jeho voru je rovněž $M = 400\,\mathrm{kg}$.*

1. Jirkův skok považujeme za šikmý vrh, po odrazu má tedy Jirkova rychlost vodorovnou a svislou složku. Svislá složka určuje, jaký čas Jirka stráví ve vzduchu (mohli bychom spočítat, že tato doba je rovna $2v_y/g$, kde v_y je svislá složka rychlosti, ale v této úloze to nebudeme potřebovat). Ze zadání víme, že se svislá složka rychlosti nezmění, a tak se nezmění ani doba letu. Z této doby a vodorovné složky rychlosti spočítáme, jak daleko Jirka doskočí. Pokud označíme vodorovnou složku rychlosti u a dobu letu T, tak platí:

   $$D = uT\,,$$

   neboť pohyb ve vodorovném směru je rovnoměrný přímočarý.

   Zbývá vyřešit, jak velká je tato vodorovná složka rychlosti při odrazu na voru. K tomu si musíme rozmyslet, jak fungují svaly. Představme si, že házíme rukou různě těžké kameny. Velmi těžký kámen zvládneme urychlit jen na malou rychlost, neboť naše ruka zvládne působit jen omezeně velkou silou. Když budeme postupně hmotnost kamenů zmenšovat, tak se bude jejich rychlost zvětšovat. Od určitého okamžiku ale zjistíme, že už se nám kameny nedaří hodit rychleji. Je to proto, že zvládneme švihnout rukou jen omezenou maximální rychlostí. Podobně když se snažíme doskočit do co největší vzdálenosti, jsme omezeni jak maximální silou, tak rychlostí švihu.

   Nyní se zamysleme nad naší úlohou. Když se Jirka odráží od voru, tak se opět snaží doskočit do co největší vzdálenosti. Máme tedy dvě možnosti, buď švihne nohama stejně rychle a tedy získá stejnou rychlost vůči voru, nebo zvládne působit na vor stejnou silou (a tedy švihne nohama rychleji). V obou případech je však jeho výsledná vodorovná rychlost vůči hladině *menší* než na zemi. Je to proto, že se vor při odrazu posune dozadu, jak ukážeme za chvíli.

   Zdá se tedy, že máme dva různé předpoklady, ze kterých můžeme při řešení úlohy vycházet. Který z nich je správný? Nebo jsou správné oba? To záleží na člověku. Někteří lidé mají dost silné nohy, takže jsou při skoku na zemi omezeni pouze rychlostí švihu, jiní zase dokáží švihnout velmi rychle, ale síla jim chybí. V principu jsou tedy možné obě varianty.

Protože nemáme zadáno, jak silný Jirka je, budeme oba předpoklady považovat za správné. Získáme tak dvě různá řešení úlohy, která budeme obě považovat za správná (mohli bychom ještě přemýšlet například o tom, že je Jirka překvapen, že se vor rozpohybuje apod. a na základě toho dát přednost jednomu nebo žádnému z předpokladů, ale zde se spokojíme s tím, že jsou oba správné).

(a) Předpokládejme, že Jirka získá při skoku vždy stejnou rychlost vůči podložce. Poznamenejme, že slovní spojení „vůči podložce" je důležité, neboť při odrazu od voru se vor rozpohybuje. Ze zadání víme, že svislá složka Jirkovy rychlosti se nezmění, a nezmění se tak ani doba letu. Vodorovná složka rychlosti však bude vůči hladině vody menší o rychlost voru V, tedy:

$$v = u - V\,,$$

kde v je vodorovná složka Jirkovy rychlosti vůči hladině. Je to proto, že při odrazu se vor začne pohybovat rychlostí V opačným směrem, než Jirka skáče. Velikost této rychlosti dokážeme spočítat, neboť víme, že celková hybnost Jirky a voru byla před odrazem nulová. Na systém nepůsobí žádná výsledná vnější síla, hybnost Jirky a voru se tedy zachová, proto bude platit:

$$0 = MV - mv\,,$$
$$V = \frac{m}{M}v\,.$$

V rovnici se objevilo znaménko mínus, protože rychlosti mají navzájem opačný směr. O rychlosti voru V zároveň víme, že pro ni platí $v = u - V$, tedy:

$$v + \frac{m}{M}v = u\,,$$
$$v = \frac{M}{M+m}u\,.$$

Vodorovnou složku rychlosti už známe, zbývá spočítat vzdálenost, do které Jirka doskočí. Viděli jsme, že se doba letu nezmění a že je rovna $T = D/u$. Z toho získáme délku skoku s:

$$s = vT = \frac{v}{u}D$$
$$s = \frac{M}{M+m}D = 1{,}7\,\mathrm{m}\,.$$

Jirka tedy za těchto předpokladů na Alešův vor nedoskočí.

(b) Nyní předpokládejme, že Jirka zvládne při skoku švihnout nohama rychleji a při tom působit na vor stále stejnou silou. Znamená to, že při odrazu získá stejnou rychlost vůči hladině? Ne, protože část energie se předá voru. Uvědomme si proč. Na pevné zemi můžeme Jirkův skok chápat tak, že Jirka pokrčí nohy a při odrazu na něj působí síla, dokud se jeho nohy nenarovnají. Pokud bude tato síla konstantní (pomocí pokročilejší matematiky lze ukázat, že bychom dostali stejný výsledek i pro nekonstantní sílu), bude vykonaná práce rovna:

$$W = Fx\,,$$

kde F je působící síla a x je vzdálenost, o kterou se nohy pokrčí. Pokud však bude skok probíhat na voru, tak se při odrazu vor v důsledku zákona zachování hybnosti posune a na Jirku i na vor působí síla F podél kratší dráhy než x. Celková práce vykonaná v obou případech je však stále rovna $W = Fx$, a tedy platí:

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2\,,$$

kde u je vodorovná rychlost při skoku na zemi, v je vodorovná rychlost vůči hladině a V je rychlost voru. Tento zákon zachování energie ještě doplníme o zákon zachování hybnosti:

$$MV = mv\,,$$
$$V = \frac{m}{M}v\,,$$

podobně jako v části 1a. Zkombinováním těchto dvou rovnic získáme:

$$u^2 = v^2 + \frac{M}{m}\cdot\left(\frac{m}{M}v\right)^2\,,$$
$$v = \sqrt{\frac{M}{m+M}}u\,.$$

Vzdálenost, do které Jirka doskočí, je pak rovna:

$$s = vT = \frac{v}{u}D\,,$$
$$s = \sqrt{\frac{M}{M+m}}D = 1{,}85\,\mathrm{m}\,.$$

Skutečně vyšlo, že pokud Jirka zachová působící sílu, tak doskočí dále, v tomto případě dokonce až na vor. Tento výsledek je tedy v souladu s naší původní úvahou, že aby Jirka zvládl působit stejnou silou, musí švihnout nohama rychleji, a získat tak větší rychlost.

2. Uvažujeme, že se vory na počátku nepohybují ani vůči sobě, ani vůči hladině (není to sice v zadání specifikováno, ale bez tohoto předpokladu by úlohu nešlo vyřešit). Celková hybnost tohoto systému je tedy na počátku nulová a opět uvažujeme, že nepůsobí vnější síla, takže bude celková hybnost nulová i po Jirkově skoku.

Když označíme W rychlost Alešova voru a uvědomíme si, že na něm na konci stojí Jirka i Aleš (dohromady mají hmotnost $2m$), tak ze zákona zachování hybnosti dostaneme:

$$MV = (M + 2m)W\,,$$
$$\frac{V}{W} = \frac{2m + M}{M} = 1{,}35\,.$$

Poměr velikostí obou rychlostí je tedy roven 1,35 a rychlosti mají opačný směr.

Jiří Kohl
`jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.