Úloha III.5 ... Gedankenexperiment

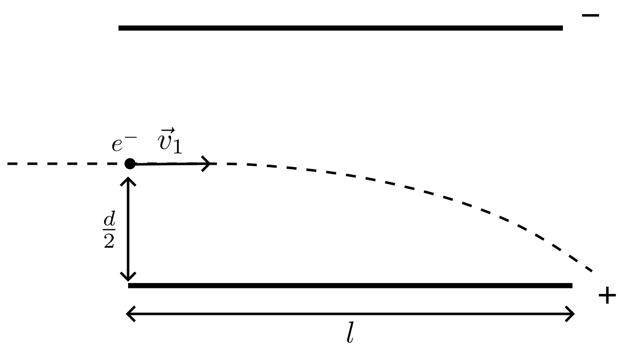
7 bodů; průměr 3,80; řešilo 15 studentů

Jelikož čekání na zelenou na semaforu je někdy opravdu dlouhé, má Aleš spoustu času přemýšlet o netradičních fyzikálních úlohách. Jednou tak přemýšlel o elektronech a napadla ho myšlenka, zda by bylo možné z velkého množství elektronů vybrat pouze ty, které se pohybují nějakou konkrétní rychlostí, jenom s pomocí deskového kondenzátoru. (Deskový kondenzátor je součástka, která je tvořena dvěma rovnoběžnými deskami, které jsou nabity opačným nábojem.)

V obou podúlohách uvažujte, že Aleš má zdroj elektronů, z něhož všechny elektrony vylétávají ve stejném místě a stejným směrem. Dále uvažujte, že vzdálenost desek Alešova imaginárního kondenzátoru je $d = 1\,\mathrm{mm}$, *vzdálenost mezi konci kondenzátoru (tj. šířka kondenzátoru) je* $l = 5\,\mathrm{cm}$ *a že na kondenzátoru je udržováno konstantní napětí* $U = 10\,\mathrm{mV}$. *Také nejspíš budete potřebovat vědět, že hmotnost elektronu je* $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ *a jeho náboj je* $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

1. *Nejprve Aleše napadlo, že by kondenzátor mohl umístit tak, aby do něj elektrony vletěly rovnoběžně s jeho deskami přesně v polovině mezi nimi (obr. 1). Takto příliš pomalé elektrony narazí do kladně nabité desky. Jakou minimální rychlost* v_1 *musí elektron mít, aby vyletěl na druhé straně kondenzátoru?*

   Poznámka: *Nelekněte se, když vám vyjde hodně velká rychlost.*



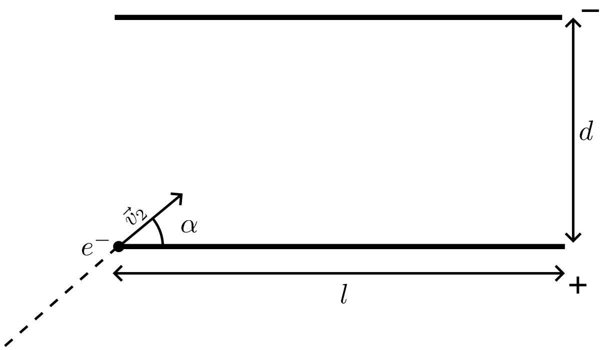
Obr. 1: Elektrony letící rovnoběžně

2. *Poté ovšem Aleš dostal mnohem lepší nápad, který mu umožní získat pouze elektrony s přesně danou rychlostí. Kondenzátor nyní trochu natočí a elektrony do něj budou vstupovat v místě, kde je okraj kladně nabité desky kondenzátoru, tak, že jejich rychlost bude s deskou svírat úhel* α *(obr. 2).*

   Nejprve kvalitativně popište, jakým způsobem musíme zvolit úhel α*, aby kondenzátorem proletěly pouze elektrony s danou rychlostí. (Tedy aby elektrony s rychlostí větší nebo menší narazily do jedné z desek kondenzátoru.) Následně vypočítejte úhel* α *a počáteční rychlost* v_2 *elektronů, které proletí.*

Nápověda 1: *K výpočtům by se vám teoreticky mohlo hodit vědět, že elektrickou intenzitu uvnitř kondenzátoru můžeme vypočítat jako*

$$E = \frac{U}{d}$$



Obr. 2: Elektrony letící pod úhlem α

a že lze uvažovat, že všude mimo prostor mezi deskami kondenzátoru je intenzita elektrického pole nulová.
Nápověda 2: V druhé podúloze by se mohlo stát, že pro určení α a v_2 budete muset vyřešit soustavu dvou rovnic. V takovém případě doporučujeme, abyste se z nich nejprve pokusili vyjádřit hodnotu nějaké goniometrické funkce α. Také by se vám mohl hodit vztah:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

První úloha

Síla působící na elektron Nejprve bychom se měli zamyslet nad tím, co se vůbec s elektronem stane poté, co vletí do kondenzátoru. V první nápovědě je zmíněno, že intenzitu elektrického pole uvnitř kondenzátoru můžeme vypočítat pomocí vztahu

$$E = \frac{U}{d}\,,$$

a tak by bylo dobré zvážit, jaký vliv to bude mít na elektron. Elektrická intenzita nám říká, jaká síla by v daném bodě prostoru působila na jednotkový náboj. Zároveň víme, že elektrická síla působící na těleso je vždy přímo úměrná jeho náboji. Tyto poznatky můžeme shrnout rovnicí

$$F = EQ\,,$$

která nám říká, jak pomocí náboje tělesa Q a elektrické intenzity E v daném místě vypočítáme sílu F, která na těleso kvůli elektrickému poli působí.

Pokud tedy použijeme značení ze zadání, tak síla působící na elektron v kondenzátoru bude

$$F = Eq = \frac{Uq}{d}\,.$$

Zamyšlení nad vztahem pro sílu[1] Nyní je poměrně důležité se zamyslet nad tím, co tento výsledek znamená. Nejprve si všimněme toho, že síla F nijak nezávisí na tom, kde v kondenzátoru se elektron nachází. Toto je opravdu pozoruhodné, neboť Coulombův zákon, který je jedním ze základních zákonů elektrostatiky, říká, že pro sílu mezi dvěma bodovými náboji platí $F \sim 1/r^2$. To znamená, že při vzdalování nábojů od sebe se síla rychle zmenšuje. Jak ale pozorujeme, tak v kondezátorech síla nijak nezávisí na tom, kde mezi deskami se náboj nachází. Tato podivnost je způsobena tím, jak se obvykle na kondenzátory v elektrostatice pohlíží.

Vzdálenost desek kondenzátoru je obvykle velmi malá v porovnání s jeho ostatními rozměry. Je tedy možné uvažovat, že se náboje pohybují velmi blízko u nabitých desek. Tím pádem neuděláme velkou chybu, když si představíme, že jsou desky nekonečné. Ač se na první pohled zdá, že si tímto vše jen zkomplikujeme, není tomu tak. V případě nekonečných desek je totiž situace dokonale symetrická, z čehož plyne mnoho výhod.[2] Například je již zřejmé, že síla musí působit směrem k jedné z desek, neboť všechny síly ve směru rovnoběžném s deskou se zřejmě navzájem vyruší. To, že elektron bude přitahován ke kladné desce, již poté vyplývá jednoduše z faktu, že má záporný náboj, a je tedy přitahován kladným nábojem a odpuzován záporným.

Přijít na to, proč se síla nemění se vzdáleností, je poněkud obtížnější, ale pokusme se najít alespoň nějaké odůvodnění. Aby se síla zmenšovala se vzdáleností, musely by se v nějakém místě rozbíhat siločáry. To by pak ale nutně znamenalo, že v nějakém vedlejším bodě musí siločáry mířit šikmo, a tedy mít i nějakou složku rovnoběžnou s deskou. To ovšem nedává smysl, jelikož v tomto bodě (stejně jako v každém jiném) bude deska v libovolném horizontálním směru vypadat stejně. Není proto možné, aby v některém takovém směru působila větší přitažlivá síla než ve směrech jiných.

Minimální rychlost Celkem tedy víme, že na elektron po celou dobu, co prolétá kondenzátorem, působí konstantní síla F směrem kolmo na desky kondenzátoru. Můžeme si všimnout, že tato situace je v podstatě stejná u vrhu, a můžeme ji tedy obdobným způsobem počítat. Zrychlení působící na elektron je podle druhého Newtonova zákona

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Uq}{md}\,.$$

Na počátku se elektron pohybuje v horizontálním směru rychlostí v_1, kterou chceme určit. Pro minimální rychlost, kterou musí elektron na průlet kondenzátorem mít, bude jeho trajektorie taková, že po uražení horizontální vzdálenosti l (tedy „na konci“ kondenzátoru) se bude nacházet ve stejné výšce jako kladně nabitá deska kondenzátoru, tedy urazí vertikální vzdálenost $d/2$. Horizontální pohyb je rovnoměrný, platí pro něj

$$l = v_1 t_1\,,$$

a vertikální odpovídá volnému pádu se zrychlením a, z čehož plyne

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2} a t_1^2\,.$$

Vyjádříme-li dobu letu kondenzátorem t_1 z druhé rovnice a dosadíme do první, dostaneme

$$l = v_1 \sqrt{\frac{d}{a}}\,.$$

[1] Není zcela nezbytné k vyřešení úlohy

[2] Následující úvahy fungují úplně stejně i pro jednu desku, což je jednodušší pro představu, tudíž doporučujeme si situaci představit nejprve takto.

Nyní jen vyjádříme v_1 a dosadíme za a, čímž získáme výsledek

$$v_1 = l\sqrt{\frac{a}{d}} = l\sqrt{\frac{Uq}{md^2}} = 2{,}1 \cdot 10^6 \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Druhá úloha

Volba úhlu α Nejprve se máme opět zamyslet nad tvarem trajektorie elektronu, což úzce souvisí s volbou úhlu α. Pokud vyžadujeme, aby proletěly pouze elektrony s přesně danou rychlostí, je celkem zřejmé, že pomalejší elektrony musí narazit do kladně nabité desky a rychlejší do záporně nabité desky. Zařízení nemůže fungovat tak, že by elektrony s rychlostí o málo větší i menší narazily do stejné desky, neboť poté by do ní musely narazit i elektrony se správnou rychlostí.

Jak již víme z řešení první úlohy, na elektron působí konstantní zrychlení a směrem ke kladně nabité desce, a tak můžeme k úloze přistupovat podobně jako k vrhu. Z toho mimo jiné plyne, že se elektron v kondenzátoru bude pohybovat po parabole. Představme si nyní, že pod určitým úhlem vletí do kondenzátoru tři elektrony, přičemž první bude mít menší rychlost než druhý a ten bude mít menší rychlost než třetí. Díky podobnosti s vrhy víme, že elektron s největší rychlostí doletí do největší vzdálenosti a dosáhne největší výšky. Naopak elektron s nejmenší rychlostí dosáhne nejmenší výšky a doletí do nejmenší vzdálenosti. Pro trajektorie z toho plyne, že trajektorie prvního elektronu bude „pod“ trajektorií druhého (blíže ke kladné desce) a že trajektorie třetího bude „nad“ trajektorií druhého (blíže k záporné desce). Aby tedy všechny elektrony s jinou rychlostí než v_2 narazily do některé desky, musí se všechny trajektorie „nad“ tou správnou protínat se zápornou deskou a všechny „pod“ ní s tou kladnou. Správná trajektorie se tedy v nejvyšším bodě bude téměř dotýkat záporné desky a v nejnižším (tedy na konci kondenzátoru) se téměř dotkne okraje kladné desky.

Zbývá otázka, jak úhel α a rychlost v_2 vypočítat. Z úvah o tvaru trajektorie jsme zjistili, že máme dvě podmínky – v nejvyšším bodě trajektorie se elektron téměř dotkne „horní“ desky, dosáhne tedy výšky d, a elektron ve vzdálenosti l se bude nacházet v nulové výšce (v úrovni „spodní“ desky). Tyto dvě podmínky představují dvě rovnice, které můžeme sestavit. Povede-li se nám je sestavit tak, aby obsahovaly pouze dvě neznámé (rychlost v_2 a úhel α), pak by tuto soustavu s trochou štěstí mělo být i možné vyřešit. Proto se nyní budeme snažit zbavit závislosti na čase.

Rovnice plynoucí z první podmínky Zabývejme se nejdříve první podmínkou, která mluví o maximální výšce. Víme, že při vrhu z nulové výšky (tedy když těleso vyletí ze stejné výšky do níž dopadne) dosáhne elektron maximální výšky v polovině doby letu, kdy bude mít nulovou vertikální složku rychlosti. Vertikální složku počáteční rychlosti můžeme vypočítat jako

$$v_y = v_2 \sin\alpha\,.$$

Víme, že za čas $t_2/2$ zpomalí elektron právě o rychlost v_y (na nulovou rychlost), ze vztahu pro zrychlení tak dostaneme

$$a\frac{t_2}{2} = v_y = v_2 \sin\alpha\,.$$

Zároveň víme, že v tuto chvíli urazil elektron ve vertikálním směru vzdálenost d. Abychom si zjednodušili výpočty, můžeme zde využít poměrně často používaného triku: místo uvažování elektronu, který zpomaluje na nulovou rychlost, si představíme děj pozpátku, tedy elektron zrychlující z nulové rychlosti na počáteční. To odpovídá rovnoměrně zrychlenému pohybu s nulovou počáteční rychlostí. Pro vzdálenost d tedy dostáváme rovnici

$$d = \frac{1}{2} a \left(\frac{t_2}{2}\right)^2 .$$

Dosazením za čas $t_2/2$ z předcházející rovnice dostáváme rovnici vyjadřující první podmínku

$$d = \frac{1}{2} a \left(\frac{v_2 \sin\alpha}{a}\right)^2 = \frac{v_2^2 \sin^2\alpha}{2a} . \tag{1}$$

Rovnice plynoucí z druhé podmínky Zkusme nyní tedy ještě najít rovnici plynoucí z druhé podmínky. V nulové výšce se elektron bude nacházet v čase t_2. V horizontálním směru se jedná o rovnoměrný pohyb, pro vzdálenost l tedy bude platit

$$l = v_x t_2 = v_2 t_2 \cos\alpha .$$

Čas t_2 jsme však již používali v odvozování rovnice pro první podmínku, a můžeme ho tedy vyjádřit například z použitého vztahu pro zrychlení

$$t_2 = \frac{2 v_2 \sin\alpha}{a} .$$

Dosazením do předcházející rovnice pro vzdálenost l dostáváme rovnici vyjadřující druhou podmínku

$$l = \frac{2 v_2^2 \cos\alpha \sin\alpha}{a} . \tag{2}$$

Řešení soustavy rovnic Nyní nám jen zbývá vyřešit soustavu těchto dvou rovnic. Postupujme dle nápovědy a snažme se nejprve nalézt hodnotu goniometrické funkce úhlu α. Zkusme použít tradiční dosazovací metodu, kdy si z jedné rovnice vyjádříme v_2 a tento výraz poté dosadíme za v_2 do druhé rovnice. Pro mírné zjednodušení výpočtů si můžeme všimnout, že v obou rovnicích se vyskytuje pouze v_2^2. Stačí nám tedy vyjádřit si v_2^2. Vyjádřeme si tedy druhou mocninu rychlosti z rovnice (1)

$$v_2^2 = \frac{2ad}{\sin^2\alpha}$$

a dosaďme tento výraz do rovnice (2)

$$l = \frac{4ad}{\sin^2\alpha} \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{a} = \frac{4d}{\operatorname{tg}\alpha} ,$$

kde jsme mimo jiné využili vztah pro podíl sinu a kosinu z druhé nápovědy. Nyní již konečně můžeme přímo vyjádřit α

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4d}{l} \doteq 4{,}6\,^\circ$$

a dosadit tuto hodnotu do vztahu pro v_2^2. Ten nám již stačí odmocnit a dosadit v něm za a a α

(vztah pro a jsme odvodili již v první podúloze)[3]

$$v_2 = \sqrt{\frac{2ad}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2Uq}{m \sin^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{4d}{l}\right)}} \doteq 7{,}4 \cdot 10^5 \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

Aleš Opl
ales@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

[3] Nabízí se zde ještě otázka, zda by kombinaci $\sin \operatorname{arctg} x$ nebylo možné vyjádřit nějak elegantněji. Možné to skutečně je. Ptáte-li se jak, doporučujeme vám, abyste se zkusili zamyslet nad tím, co tento výraz vlastně znamená.