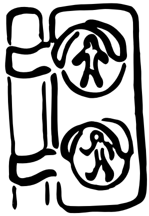
Úloha III.2 ... Aleš na přechodu

5 bodů; (chybí statistiky)



Aleš a Jirka jdou pěšky na setkání Výfuku, které se koná v Praze. Oba mají stejnou rychlost $v = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, mají to stejně daleko a vyjdou ve stejnou chvíli. Každých $d = 200\,\mathrm{m}$ je čeká na cestě přechod pro chodce (první přechod mají až $200\,\mathrm{m}$ od domu), na kterém je vždy zelená $8\,\mathrm{s}$ a červená $30\,\mathrm{s}$. Všechny přechody přebliknou z červené na zelenou ve chvíli, kdy Jirka s Alešem vyjdou z domu. O kolik déle než Jirkovi trvá cesta Alešovi, pokud Jirkovi trvá $t = 18\,\mathrm{min}$ a Aleš ze svého přesvědčení vždy čeká na přechodech na zelenou, zatímco Jirka chodí i na červenou? Jaká je optimální vzdálenost přechodů, aby oba došli ve stejnou chvíli?

Nejprve musíme zjistit, jak vypadá Alešova cesta. Zajímá nás, kolik je na ní přechodů. Víme, že Jirkovi cesta trvala $t = 18\,\mathrm{min} = 1\,080\,\mathrm{s}$ a že šel rychlostí $v = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Na základě toho můžeme spočítat, že Jirka (a tedy i Aleš) musel ujít $s = vt = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 1\,080\,\mathrm{s} = 2\,160\,\mathrm{m}$. Jelikož jsou od sebe přechody vzdálené $200\,\mathrm{m}$, znamená to, že jich každý po cestě potkal 10.

Zákona dbalý Aleš dorazil k prvnímu přechodu za $100\,\mathrm{s}$, neboť každou sekundu ušel dva metry a celkem musel ujít $200\,\mathrm{m}$. Tam ovšem zrovna v tu chvíli svítila červená. Jeden „cyklus" semaforu totiž trvá $T = 8 + 30 = 38\,\mathrm{s}$ a třetí zelená už zhasla ($2T + 8\,\mathrm{s} = 84\,\mathrm{s} \leq 100\,\mathrm{s}$), zatímco čtvrtá se ještě nerozsvítila ($3T = 114\,\mathrm{s} \geq 100\,\mathrm{s}$). Jinými slovy si Aleš musel počkat $114\,\mathrm{s} - 100\,\mathrm{s} = 14\,\mathrm{s}$.

Vzhledem k tomu, že druhý semafor je vzdálen opět $200\,\mathrm{m}$ a Aleš vyjde přesně v okamžiku, kdy na něm skočí zelená, rovnou víme, že bude čekat opět $14\,\mathrm{s}$. Stejně to bude zřejmě fungovat i pro všechny ostatní semafory. Aleš tedy čekal na každém semaforu $14\,\mathrm{s}$. Celkem potkal 10 semaforů a dorazil proto o $14\,\mathrm{s} \cdot 10 = 140\,\mathrm{s}$ později než Jirka. Cesta Alešovi trvala celkem $20\,\mathrm{min}$ a $20\,\mathrm{s}$.

Zbývá odpovědět na otázku optimální vzdálenosti semaforů. Pro jednoduchost předpokládejme, že Aleš se po přechodu vydá pouze tehdy, pokud mu zrovna padla zelená (pokud už zelená v okamžiku Alešova příchodu k přechodu nějakou chvíli svítí, tak to Aleš raději nebude riskovat).[1] Alešovi bude cesta trvat stejně dlouho jako Jirkovi v případě, že vždy, když dojde na přechod, na něm bude zrovna svítit zelená. To se stane v případě, že čas, který stráví na cestě mezi dvěma semafory, bude nějaký násobek délky „cyklu" semaforu a že k němu vždy dojde ve stejné „fázi". Nejkratší taková vzdálenost je vzdálenost, kterou Aleš ujde během jednoho „cyklu". Můžeme ji spočítat jako $s_2 = vT = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 38\,\mathrm{s} = 76\,\mathrm{m}$. Další přípustné vzdálenosti jsou potom po řadě $2s_2 = 152\,\mathrm{m}, 3s_2 = 228\,\mathrm{m}, \ldots$ Na závěr si můžete všimnout, že toto obecné řešení samozřejmě připouští i situaci, ve které by na cestě žádný semafor nebyl.

Viktor Materna
`materna@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

[1] Samozřejmě bychom výsledek mohli zobecnit tím, že bychom Alešovi dovolili mezi jednotlivými semafory získat malé zpoždění takové, že když ho sečteme pro všechny semafory, tak nebude větší než doba, po kterou svítí zelená.