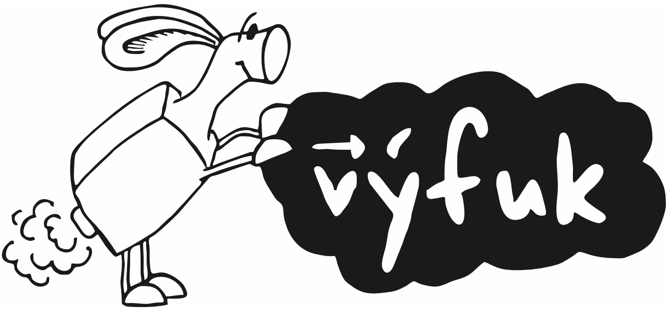


výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

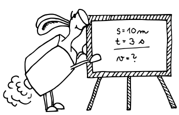
v rukou držíte brožurku třetí série. Najdete v ní zadání úloh, ve kterých se můžete těšit na Indiana Jonese a jeho bič, nabitou kuličku či experiment s povrchovým napětím kapky. Výfučtení se tentokrát bude zabývat užitečnou veličinou zvanou hybnost. V této brožurce naleznete také vzorová řešení 1. série spolu s průběžným pořadím.

Nedávno proběhlo také Podzimní setkání řešitelů, kde účastníci zažili mnoho zábavného programu. Fotky ze setkání se zanedlouho objeví na webu.

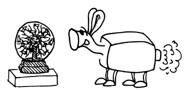
Pokud se vám setkání líbilo a rádi byste se v létě zúčastnili další Výfučí akce, můžete se přihlásit na Výfučí letní tábor. Ten se tentokrát bude konat od 29. července do 12. srpna v Uhelné Příbrami. Na webu se budou postupně objevovat bližší informace. Přihlásit se budete moci přes databázi.

Přejeme vám poklidné Vánoce a hodně štěstí a úspěchů v novém roce.

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



Zadání III. série



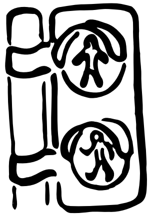
Termín odeslání: 23. 1. 2023 20.00

Úloha III.1 ... Matematická analýza ❻ ❼ — 5 bodů

David se učí matematickou analýzu a čeká ho zkouška. Analýza je ale těžký předmět, takže se musí učit dlouho. Na úspěšné složení početní části zkoušky se musí učit alespoň 24 hodin. Víme, že spočítat jeden příklad na derivace funkcí mu trvá v průměru 3 minuty, příkladů na integrály spočítá za hodinu 12 a za 3 hodiny spočítá 16 diferenciálních rovnic. Před zkouškou si spočítal celkově 75 příkladů na derivace, 150 integrálů a 40 diferenciálních rovnic. Je David dostatečně naučený, aby zvládl zkoušku?

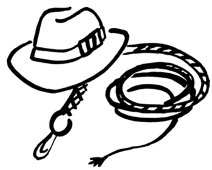
matfyz

Úloha III.2 ... Aleš na přechodu ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů



Aleš a Jirka jdou pěšky na setkání Výfuku, které se koná v Praze. Oba mají stejnou rychlost $v = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, mají to stejně daleko a vyjdou ve stejnou chvíli. Každých $d = 200\,\mathrm{m}$ je čeká na cestě přechod pro chodce (první přechod mají až 200 m od domu), na kterém je vždy zelená 8 s a červená 30 s. Všechny přechody přebliknou z červené na zelenou ve chvíli, kdy Jirka s Alešem vyjdou z domu. O kolik déle než Jirkovi trvá cesta Alešovi, pokud Jirkovi trvá $t = 18\,\mathrm{min}$ a Aleš ze svého přesvědčení vždy čeká na přechodech na zelenou, zatímco Jirka chodí i na červenou? Jaká je optimální vzdálenost přechodů, aby oba došli ve stejnou chvíli?

Úloha III.3 ... Jako když bičem mrská... ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů



Na vlaku jedoucím konstantní rychlostí $40\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ stojí zloděj Svatého grálu. Z věže vedle kolejí na něj číhá Indiana Jones připravený zkazit mu veškeré plány. V jisté chvíli mrskne svým bičem, který se namotá na most vedoucí přes koleje přesně v místě nad kolejnicemi. Nenamotaná část biče má délku 5 m. V jaké vzdálenosti bude nepřítel ve chvíli, kdy se Indy musí zhoupnout směrem kolmým na koleje, aby ho mohl srazit? Počítejte, že bič je nehmotný, úhlová výchylka napnutého biče od svislého směru je relativně malá a že Indyho už ze soubojů a bičování bolí ruce a chce tedy ve vzduchu strávit co nejméně času. Odpor vzduchu zanedbejte. Indy se aktivně neodráží, prostě se jen zhoupne.

Úloha III.4 ... Čočka a zrcadlo ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Jirka si hrál se spojnou čočku a bodovým zdrojem světla. Když umístil zdroj světla do vzdálenosti $a = 12\,\mathrm{cm}$ od čočky, vznikl za čočkou obraz ve vzdálenosti $a' = 6\,\mathrm{cm}$. Potom vzal čočku i zdroj a umístil čočku do vzdálenosti $l = 10\,\mathrm{cm}$ před zrcadlo, přičemž zachoval původní vzdálenost zdroje od čočky (zdroj se tedy nachází 22 cm od zrcadla). Paprsky ze zdroje prošly čočkou a opět vytvořily za čočkou první obraz. Poté se ale odrazily od zrcadla, znovu prošly čočkou a vytvořily druhý obraz. Jak daleko od čočky vznikl druhý obraz?
Nápověda: Může se vám hodit tužka a pravítko nebo zobrazovací rovnice.

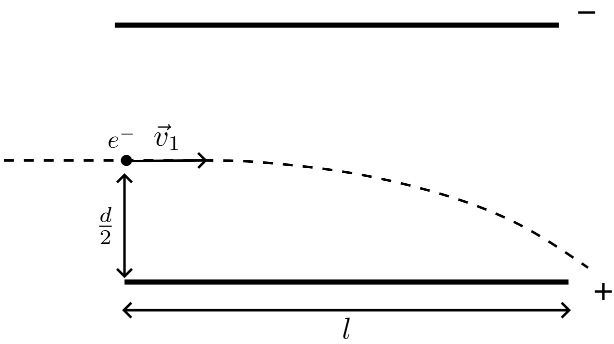
Úloha III.5 ... Gedankenexperiment ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Jelikož čekání na zelenou na semaforu je někdy opravdu dlouhé, má Aleš spoustu času přemýšlet o netradičních fyzikálních úlohách. Jednou tak přemýšlel o elektronech a napadla ho myšlenka, zda by bylo možné z velkého množství elektronů vybrat pouze ty, které se pohybují nějakou konkrétní rychlostí, jenom s pomocí deskového kondenzátoru. (Deskový kondenzátor je součástka, která je tvořena dvěma rovnoběžnými deskami, které jsou nabity opačným nábojem.)

V obou podúlohách uvažujte, že Aleš má zdroj elektronů, z něhož všechny elektrony vylétávají ve stejném místě a stejným směrem. Dále uvažujte, že vzdálenost desek Alešova imaginárního kondenzátoru je $d = 1\,\mathrm{mm}$, vzdálenost mezi konci kondenzátoru (tj. šířka kondenzátoru) je $l = 5\,\mathrm{cm}$ a že na kondenzátoru je udržováno konstantní napětí $U = 10\,\mathrm{mV}$. Také nejspíš budete potřebovat vědět, že hmotnost elektronu je $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ a jeho náboj je $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

1. Nejprve Aleše napadlo, že by kondenzátor mohl umístit tak, aby do něj elektrony vletěly rovnoběžně s jeho deskami přesně v polovině mezi nimi (obr. 1). Takto příliš pomalé elektrony narazí do kladně nabité desky. Jakou minimální rychlost v_1 musí elektron mít, aby vyletěl na druhé straně kondenzátoru?

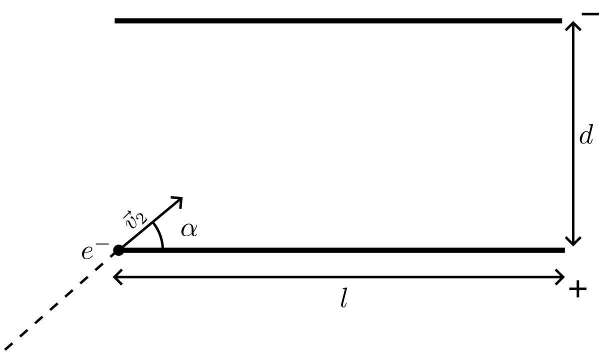
   Poznámka: Nelekněte se, když vám vyjde hodně velká rychlost.



Obr. 1: Elektrony letící rovnoběžně

2. Poté ovšem Aleš dostal mnohem lepší nápad, který mu umožní získat pouze elektrony s přesně danou rychlostí. Kondenzátor nyní trochu natočí a elektrony do něj budou vstupovat v místě, kde je okraj kladně nabité desky kondenzátoru, tak, že jejich rychlost bude s deskou svírat úhel α (obr. 2).

   Nejprve kvalitativně popište, jakým způsobem musíme zvolit úhel α, aby kondenzátorem proletěly pouze elektrony s danou rychlostí. (Tedy aby elektrony s rychlostí větší nebo menší narazily do jedné z desek kondenzátoru.) Následně vypočítejte úhel α a počáteční rychlost v_2 elektronů, které proletí.



Obr. 2: Elektrony letící pod úhlem α

Nápověda 1: K výpočtům by se vám teoreticky mohlo hodit vědět, že elektrickou intenzitu uvnitř kondenzátoru můžeme vypočítat jako

$$E = \frac{U}{d}$$

a že lze uvažovat, že všude mimo prostor mezi deskami kondenzátoru je intenzita elektrického pole nulová.
Nápověda 2: V druhé podúloze by se mohlo stát, že pro určení α a v_2 budete muset vyřešit soustavu dvou rovnic. V takovém případě doporučujeme, abyste se z nich nejprve pokusili vyjádřit hodnotu nějaké goniometrické funkce α. Také by se vám mohl hodit vztah:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,.$$

Úloha III.E ... Voda plná napětí ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Kapaliny se od plynů liší tím, že zatímco plyny se snaží rozprostřít do celého objemu nádoby, ve které se nachází, kapaliny se naopak shlukují do kapek. Příčinou tohoto shlukování jsou takzvané *povrchové síly*, které matematicky popisujeme pomocí veličiny nazývané *povrchové napětí*. Povrchové napětí se značí σ a je definováno jako množství práce ΔW, kterou musíme vykonat, abychom povrch kapaliny zvětšili o jednotkovou plochu $\Delta S = 1\,\mathrm{m}^2$, tedy:

$$\Delta W = \sigma \Delta S$$
$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S}\,.$$

V praxi to znamená, že kapaliny s velkým povrchovým napětím (například rtuť) se snaží tvořit takové kapky, které mají co nejmenší povrch, což platí pro kapky ve tvaru kuliček.

Dalším příkladem je pak velikost kapek při odkapávání. Při oddělení kapky od zbytku kapaliny se totiž zvětší celkový povrch kapaliny (můžete si to představit tak, že jedna větší kapka má menší povrch než dvě menší kapky dohromady) a síla, která tuto změnu zajišťuje a tedy i koná práci, je tíha kapek. Větší povrchové napětí pak znamená větší kapky. Konkrétně se dá odvodit vztah:

$$\sigma = \frac{mg}{\pi d}\,,$$

kde m je hmotnost jedné kapky, g je tíhové zrychlení a d je průměr krčku kapky těsně před odkápnutím, který můžeme aproximovat průměrem otvoru, ze kterého kapalinu odkapáváme.

Měření povrchového napětí s využitím tohoto vztahu se nazývá *kapková metoda*. Pomocí této metody změřte povrchové napětí vody.

Úloha III.V ... Hravě to přeskočím! ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Jirka se jednoho dne vydal na menší plavbu po řece na voru. Cestou potkal Aleše, který dostal stejný nápad, a po chvilce se rozhodl, že by si s ním rád popovídal. Alešův vor se však nacházel až kousek za Jirkovým. Jirka je zdatný ve sportech a ví o sobě, že dokáže na zemi bez rozběhu snadno doskočit do vzdálenosti $D = 2\,\mathrm{m}$. Když Jirka odhadl, že vzdálenost, do níž musí skočit, aby bezpečně dopadl na Alešův vor, je $d = 1{,}8\,\mathrm{m}$, tak řekl: „Hravě to přeskočím!“. Zapomněl však, že se nenachází na zemi, ale na řece, kde se vor může bez tření pohybovat.

1. Podaří se Jirkovi bezpečně skočit na Alešův vor, pokud Jirka váží $m = 70\,\mathrm{kg}$ a vor $M = 400\,\mathrm{kg}$? Uvažujte, že je vor dost velký, takže se při odrazu nezmění jeho výška nad hladinou, ani nijak neovlivní svislou složku Jirkovy rychlosti.

2. Předpokládejme nyní, že vzdálenost vorů byla taková, že Jirka na Alešův vor doskočil. Jaký bude poměr rychlostí obou vorů (vůči hladině) poté, co Jirka dopadne na ten Alešův? Aleš váží také $m = 70\,\mathrm{kg}$ a hmotnost jeho voru je rovněž $M = 400\,\mathrm{kg}$.

Výfučtení: Hybnost

Úvod

K popisu světa kolem nás využíváme fyzikální veličiny a vztahy mezi nimi popisují fyzikální zákony. Důležitým příkladem těchto zákonů jsou zákony zachování. V prvním Výfučtení jsme se zabývali studiem zákona zachování energie, zde na toto Výfučtení navážeme a představíme si další důležitou veličinu nazývanou *hybnost*. Ukážeme, jaký má hybnost vztah k Newtonovým zákonům, podíváme se na to, kdy se hybnost zachovává a jak se tento zákon zachování dá prakticky využít, jak sám o sobě, tak v kombinaci se zákonem zachování energie.

Definice

Hybnost je v klasické mechanice definována jednoduše jako součin hmotnosti tělesa a jeho rychlosti, tedy:

$$p = mv\,.$$

Hybnost je přitom, podobně jako rychlost, *vektorová* veličina, má tedy velikost a směr. Pokud bychom se zabývali studiem pohybu tělesa v rovině nebo v prostoru, je výhodné si hybnost rozložit do složek ve směru souřadnicových os. Pro jednotlivé složky hybnosti pak platí:

$$p_x = mv_x\,, \qquad p_y = mv_y\,, \qquad p_z = mv_z\,.$$

Tyto tři rovnice se dají kompaktně zapsat jako jedna rovnice:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\,,$$

kde tučný symbol znamená, že se jedná o vektorovou veličinu. Další způsob, jak chápat tuto rovnici, je, že velikost hybnosti je rovna m krát velikost rychlosti a že hybnost má stejný směr jako rychlost, což bychom očekávali.

Nová formulace Newtonových zákonů

Na základní škole se můžeme setkat s následující (nebo velmi podobnou) formulací Newtonových zákonů:

1. Zákon setrvačnosti: Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud na něj nepůsobí síla.

2. Zákon síly: Zrychlení tělesa je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné jeho hmotnosti, matematicky:

$$F = ma\,.$$

3. Zákon akce a reakce: Kdykoliv působí jedno těleso na druhé silou, působí i druhé těleso na to první silou stejné velikosti a opačného směru.

Ukazuje se, že takováto formulace není obecně úplně vhodná. Například když budeme chtít popisovat systémy více těles nebo tělesa s proměnnou hmotností (například raketa urychlovaná vyletujícím palivem), tak se dostaneme do zbytečných obtíží. Sám Isaac Newton ve svém díle *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, vydaném v roce 1687, svůj druhý silový zákon formuloval takto:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}\,,$$

kde $\mathbf{F}$ je výsledná síla působící na libovolný systém těles a $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p}$ je celková změna hybnosti tohoto systému, tedy (vektorový) součet změn hybnosti každého z těles ve zkoumaném systému. Jinak řečeno, působící síla je rovna časové změně hybnosti a směr změny hybnosti je stejný jako směr síly (opět tato vektorová rovnice obsahuje 3 rovnice pro jednotlivé složky).

V čem se však tato nová formulace liší od té původní? Vezměme jednoduchý jednorozměrný případ, kdy síla působí na jedno těleso. Původně jsme měli:

$$F = ma = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t}\,,$$

ale nyní máme:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta (mv)}{\Delta t}\,.$$

Newtonova definice síly se tedy liší v tom, že bere v úvahu i případy, kdy se mění hmotnost. Nyní tyto případy nebudeme uvažovat a vrátíme se k nim na konci dílu, proto pro nás bude zápis $F = ma$ ekvivalentní s novou formulací, kterou budeme dále výhradně používat. Pro nás je tedy druhý silový zákon:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}\,.$$

Podívejme se nyní na zákon setrvačnosti. Ten hovoří o situaci, kdy na těleso (nebo soustavu těles) působí nulová výsledná síla. Z druhého zákona jednoduše máme:

$$0 = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \implies \mathbf{p} = \mathrm{konst}\,.$$

Celková hybnost takovéto uzavřené soustavy nemění. Všimněme si zajímavého jevu, zákon setrvačnosti nám přímo vyplynul z 2. zákona. Mohli bychom ho tedy při budování mechaniky úplně vynechat, neboť je automaticky splněn díky silovému zákonu.[1]

[1] To, že nám zákon setrvačnosti nedává žádné nové výsledky, neznamená, že by byl úplně zbytečný. Umožňuje nám například definovat pojem *inerciální soustava*, tedy soustava, ve které platí zákon setrvačnosti = soustava, na kterou nepůsobí žádná vnější síla

Hybnost se zachovává

V předcházející kapitole jsme při formulaci zákonů tak nějak vynechali zákon akce a reakce. Je to proto, že nám vyplyne z obecnějšího zákona – ze zákona zachování hybnosti. Nejprve se však zamysleme nad tím, proč by se vůbec měla hybnost zachovávat.

Z prvního zákona rovnou víme, že se hybnost zachovává, pokud na uzavřenou soustavu nepůsobí síla. Co když však nějaká síla bude působit? Zamysleme se nad původem takovéto síly. Může se jednat například o gravitaci Země, která neustále působí na Měsíc, a tím zakřivuje jeho dráhu, nebo o člověka, který zvedne tašku plnou nákupu, a tím urychlí všechny předměty uvnitř a podobně. Všechny tyto síly, ať už jakéhokoliv typu, který dokážeme vymyslet, mají společné, že jsou způsobeny nějakým dalším tělesem. Stačilo by nám tedy vždy tato tělesa zahrnout do naší studované soustavy a tento postup opakovat tak dlouho, dokud nedostaneme soustavu, na kterou už žádná vnější síla nepůsobí.

V praxi jsme obvykle schopni najít poměrně malou uzavřenou soustavu, na níž sice ještě nějaká vnější síla působí, ale je obvykle buď tak malá, že ji můžeme zanedbat, nebo nijak neovlivňuje dynamiku systému, který studujeme. Například pokud budeme počítat úlohu, v níž se srazí na Zemi dvě tělesa, tak na naši uzavřenou soustavu sice ještě bude působit například gravitace Slunce, která je vnější silou, ale ovlivňuje pohyb všech předmětů skoro stejně[2] (celá Země obíhá kolem Slunce), takže výsledek srážky nijak neovlivní.

V obecném případě, kdy je pro nás vliv vnějších sil nezanedbatelný, formulujeme zákon zachování hybnosti například následovně:

> V soustavě, na kterou působí nulová vnější výsledná síla se hybnost zachovává, a pokud síla působí, pak se celková hybnost mění jako:
>
> $$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}\,.$$

Akce a reakce

Studujme nyní některé důsledky zákona zachování hybnosti. Uvažujme jednoduchou soustavu dvou těles, například Zemi a Měsíc, přičemž zanedbáme vlivy ostatních těles.

Víme, že Země působí na Měsíc gravitační silou F_Z a tato síla neustále mění jeho hybnost (mění její směr):

$$\frac{\Delta \mathbf{p}_\mathrm{M}}{\Delta t} = \mathbf{F}_\mathrm{Z}\,.$$

Vzhledem k tomu, že je v této soustavě celková hybnost konstantní (zanedbali jsme všechny vnější síly), musí se měnit i hybnost Země,[3] a to navíc tak, aby byl součet změn hybností nulový. Musí tedy platit:

$$\frac{\Delta \mathbf{p}_\mathrm{Z}}{\Delta t} = -\mathbf{F}_\mathrm{Z}\,.$$

[2] Gravitace Slunce je ve skutečnosti na bližší půlce Země nepatrně větší. Totéž zřejmě platí i pro gravitaci Měsíce a tato nehomogenita pole je například jedním z příčin přílivu a odlivu

[3] Představa, že je Země v klidu a Měsíc kolem ní obíhá, tedy není úplně přesná, ve skutečnosti Země i Měsíc obíhají kolem společného bodu v prostoru mezi nimi nazývaného *hmotný střed*. Kvůli větší hmotnosti Země je tento bod vzdálen od středu Země jen asi 4 500 km. Toto obíhaní je také jednou z dalších příčin přílivu a odlivu.

Na Zemi tedy působí síla o stejné velikosti jako F_{Z}, ale v opačném směru. Jediné další těleso v této soustavě je Měsíc, ten tedy působí na Zemi silou stejné velikosti, ale opačného směru:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{M}} = -\mathbf{F}_{\mathrm{Z}} \,.$$

Tímto jsme v takto jednoduchém systému dostali zákon akce a reakce přímo ze zákona zachování hybnosti. Mohli bychom však argumentovat, že systém Země–Měsíc je příliš jednoduchý a že platnost tohoto zákona je pouze náhoda, nebo že funguje pouze pro síly dlouhého dosahu, jako je gravitace. Podívejme se, co se stane v o něco komplikovanějším systému.

Mějme člověka, který stojí na povrchu Země. Z předchozího odstavce už víme, že gravitační síly mezi člověkem a Zemí jsou stejné velikosti a opačného směru. Tentokrát tu však navíc máme sílu $F = F_{\mathrm{g}}$, kterou Země působí přímo na člověka tím, že na ní stojí. Tato síla nám zajišťuje, že člověk nepropadne podlahou. Když všechny tři síly sečteme, tak nám zbude výsledná síla (velikosti F_{g}) působící na člověka a ta by mohla měnit její hybnost. Protože však víme, že je celková hybnost konstantní, musí i na Zemi působit člověk stejnou dotykovou silou o velikosti $F = F_{\mathrm{g}}$ opačného směru, která zajistí naopak to, že se Země nebude přibližovat ke člověku. Máme tedy opět akci a reakci.

Podobným způsobem bychom mohli tuto argumentaci rozšířit na libovolně komplikovaný systém a vždy bychom nakonec dostali zákon akce a reakce. 3. Newtonův zákon tedy platí obecně a je přímým důsledkem zákona zachování hybnosti.

Pružná a nepružná srážka těles

Aplikujme nyní zákon zachování hybnosti na některé časté příklady. Prvním z takových příkladů jsou srážky, konkrétně dokonale *pružná* a *nepružná srážka*. Rozdělme si případy podle toho, jak přesně děj ovlivní pružnost tělesa.

Nepružná srážka

Začneme druhým případem, kde budeme počítat pouze s hybností. Uvažujme, že tělesa, která se sráží, se mohou deformovat pouze nevratně. Znamená to, že se tělesa po srážce sama nevrátí do původního tvaru. Tímto se nemohou sama od sebe odtlačit a jejich vzájemná rychlost je nulová. Jako příklad si můžeme představit plastelínu, která padá na zem. Při dopadu se deformuje a to tak, že již nevyskočí zpátky. Vzájemná rychlost plastelíny a Země je po srážce nulová.

Zákon zachování hybnosti (ZZH) si tedy můžeme zapsat v tomto tvaru:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u \; + m_2 u \,,$$

m značí hmotnosti jednotlivých těles, v rychlosti a u je společná rychlost po srážce. Pokud tedy známe hmotnosti a rychlosti těles před srážkou, tak ze ZZH snadno dopočítáme rychlost u po srážce. Poznamenejme ještě, že rychlost (i hybnost) je vektorová veličina, musíme tedy při počítání brát v úvahu její směr. To v tomto jednorozměrném případě zajistíme jednoduše pomocí znaménka.

Pokud bychom tedy chtěli například vypočítat čelní srážku osobního auta a autobusu při rychlosti $60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, tak dostaneme:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \,,$$

kde zvolíme například rychlost auta v kladném směru, tedy $v_1 = 60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, $v_2 = -60\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Hmotnosti aut se pohybují kolem 2 tun, hmotnost některých autobusů kolem 14 tun. Po dosazení pro výslednou rychlost dostaneme:

$$u = -45\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Všimněme si, že rychlost vyšla záporná. To znamená, že po srážce se autobus i auto budou pohybovat stejným směrem jako autobus před srážkou (to bychom konec konců od takovéto srážky čekali). Opět došlo k deformaci těles, ta ale byla sama o sobě nevratná.

Představme si ještě jeden příklad nepružné srážky – dětské vláčky s magnetickými nárazníky. Pokud postavíme jeden vagon na koleje a druhý pošleme přímo proti němu, po spojení se rozpohybují oba vagony, ale menší rychlostí, kvůli zvýšení hmotnosti pohybující se soupravy.

Pružná srážka

Nyní si rozebereme další veličinu figurující v interakci těles, energii. Z prvního Výfučtení víme, že celková energie soustavy se (stejně jako hybnost) zachovává. V nepružném případě ale přenos energie není zcela bezztrátový, mezi tělesy může docházet například ke tření, zákon zachování mechanické energie tedy do výpočtu nepružné srážky zahrnout nelze (můžete si sami vyzkoušet vypočítat kinetickou energii těles před nepružnou srážkou a po ní a přesvědčit se, že se skutečně obecně nerovnají).

Opačná situace nastane v pružném případě, zde se tělesa po kontaktu dočasně pružně zdeformují, jejich společná energie se převede do této deformace, ale hned nato se začnou vracet do původních tvarů, čímž se budou navzájem odtlačovat. Deformace je zde vratná, její energie se tedy úplně převede zpět do kinetické formy, tělesa se tedy odpovídajícími (tentokrát ne nutně stejnými) rychlostmi oddělí. Příkladem budiž dokonalý hopík, který po odrazu od země vyletí znovu do původní výšky.

Zde se nám trochu komplikuje výpočet rychlostí. Na druhou stranu, k výpočtu nyní můžeme také použít rovnici vyplývající ze zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\,,$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2\,,$$

kde u_1 a u_2 jsou rychlosti těles po srážce. Dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých, ze kterých se dají spočítat výsledné rychlosti, řešení této soustavy je poněkud náročné na úpravy výrazů, proto se jím zde zabývat nebudeme. Místo toho napíšeme rovnou výsledek, doporučujeme však čtenářům vyzkoušet si výsledek odvodit. Pro výsledné rychlosti vyjde:

$$u_1 = v_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v_2\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\,,$$
$$u_2 = v_1\frac{2m_1}{m_1 + m_2} + v_2\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,.$$

Pružnou srážkou se dají modelovat i například srážky v částicových urychlovačích. V takovém případě již ale musíme kvůli velmi vysokým rychlostem počítat se speciální teorií relativity, jejímž autorem je Albert Einstein.

Rakety

V kapitole o Newtonových zákonech byla u zákona akce a reakce jako příklad uvedená raketa, která je urychlována palivovými spalinami, tuto situaci si nyní rozebereme podrobněji. Základní princip raketových pohonů vlastně spočívá ve spojení poznatků 2. a 3. Newtonova zákona. Tedy že síla je změna hybnosti za čas a že mezi ovlivňujícími se tělesy působí vzájemně opačné síly.

Představme si nyní stoupající raketu, stoupání bude evidentně probíhat díky tahové síle motorů. Její velikost si můžeme jednoduše spočítat z výše uvedených poznatků a vzorce:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}\,.$$

Ze zákona akce a reakce víme, že jsou spaliny urychlovány směrem dolů pod raketu stejně velkou silou, jakou je urychlována raketa směrem vzhůru. Předpokládejme, že každou sekundu vyletí z rakety spaliny o hmotnosti Δm rychlostí u. Spaliny tedy za $1\,\mathrm{s}$ získaly hybnost:

$$\Delta p = \Delta m \cdot u\,.$$

Musela na ně proto působit síla:

$$F = \frac{\Delta m \cdot u}{1\,\mathrm{s}}\,.$$

Z předchozích úvah víme, že stejná síla opačného směru působí na raketu a F je tedy hledaná tahová síla. Pomocí tohoto výsledku bychom pak mohli vypočítat zrychlení rakety. Je však třeba dávat si pozor, neboť pokud vypočítáme:

$$a = \frac{\Delta m \cdot u}{1\,\mathrm{s} \cdot m}\,,$$

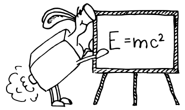
tak hmotnost rakety m zřejmě není v čase konstantní. U dnešních raket tvoří většinu hmotnosti rakety právě palivo, jeho spalováním se tedy hmotnost rakety neustále mění. Proto pokud bude tok spalin stále stejně velký, pak pohyb rakety rozhodně nebude rovnoměrně zrychlený. Přesný výpočet toho, jak by pohyb vypadal, je však bohužel nad rámec tohoto textu.

Závěr

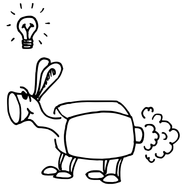
Hybnost hraje při formulaci zákonů ve fyzice velmi důležitou roli. V tomto textu jsme se seznámili s její definicí a představili jsme některé příklady jejího využití. Dále jsme viděli, že hybnost se, podobně jako energie, zachovává a kombinace těchto dvou zákonů zachování nám poskytuje důležitý nástroj jak k porozumění světa kolem nás, tak při počítání příkladů.

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz

Jakub Radim Zbončák
zboncak@vyfuk.mff.cuni.cz



Řešení I. série



Úloha I.1 ... Kombinatorická vejce

5 bodů; průměr 4,10; řešilo 41 studentů

Výfuček se rozhodl, že Luborovi upeče k narozeninám dort. Koupil si krabici šesti totožných vajec seřazených ve dvou řadách po třech. Rozmístění vajec ho zaujalo a začal uvažovat nad tím, která vejce by mohl odebrat, aby se neposunulo těžiště celé krabičky. Pomozte Výfučkovi a určete všechny možné kombinace odebraných vajec. Proč jiné kombinace nepřichází v úvahu?

Nejprve si musíme rozmyslet, kde je těžiště původně. Těžiště idealizované krabice naplněné šesti totožnými vejci bude uprostřed krabice (tedy v jejím středu souměrnosti). Abychom zachovali polohu těžiště, musíme vejce odebírat tak, aby rozmístění vajec v krabici zůstalo středově souměrné podle stejného bodu. Pokud tedy odebereme například vejce z pravé řady nahoře, musíme současně odebrat vejce i z levé řady dole. Tak dojdeme k výsledku, že vejce můžeme odebrat 7 různými způsoby (3 způsoby, jak odebrat 2 vejce, 3 způsoby, jak odebrat 4 vejce, a 1 způsob, jak odebrat všech 6 vajec). Je ovšem trochu sporné, zda bychom měli počítat možnost, že odebereme všechna vejce, neboť poté žádné těžiště existovat nebude (pokud bychom uvažovali, že krabice je nehmotná). Většina krabic na vejce je však symetrická tak, že jejich těžiště je skutečně v jejich středu, proto se nedopustíme žádné zásadní nepřesnosti, když budeme krabici uvažovat hmotnou a variantu s odebráním všech 6 vajec jako správné řešení úlohy.

Níže je graficky vyjádřeno všech 7 řešení. Odebraná vejce jsou znázorněna prázdným políčkem.

1		3
4		6

	2	3
4	5	

1	2	
	5	6

	2	
	5	

1		
		6

		3
4		

Jak by se dala tato úloha vyřešit ve větším měřítku? Jistě si dokážete představit, že kdybychom měli větší plato vajec, za určitých okolností bychom pak mohli odebrat i vejce, jejichž polohy nejsou středově souměrné – například jedno vejce z okraje krabice a dvě, která se nachází na druhé straně od středu souměrnosti, ale podstatně blíže k tomuto bodu. Z fyzikálního hlediska tento jev popisuje veličina nazvaná moment síly M. Jeho velikost určuje otáčivý účinek síly (v našem případě tíhové síly vejce) na těleso (krabice s vejci). Pro výpočet momentu síly platí: $M = Fd$, kde F je působící síla a d kolmá vzdálenost jejího působiště od osy otáčení tělesa. Jedná se o vektorovou veličinu (tzn. má působiště a směr) a její vektory můžeme navzájem sčítat. Pokud bude výsledný vektor nulový, těleso se otáčet nebude (to platí pro krabici s těžištěm uprostřed), v opačném případě se otáčet bude (např. krabice s jedním vejcem umístěným mimo těžiště). S těmito znalostmi už bychom byli schopni vyřešit úlohu i pro větší krabici s větším počtem vajec, bylo by to ale značně pracnější.

Veronika Bartáková
vercab@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.2 ... Zážitky z přednáškové noci 5 bodů; průměr 4,61; řešilo 122 studentů

Dva zoufalí organizátoři přednáškové noci si potřebují nechat rozměnit 5 000 *korun. Mají dvě dvoutisícikorunové a jednu tisícikorunovou bankovku. Rádi by sehnali 50 padesátikorun a 100 dvacetikorun. Po neúspěšné návštěvě pěti bank se rozhodli jít nakupovat do Tesca a rozměnit peníze tímto způsobem. Organizátoři si při jednom nákupu koupí právě jednu francouzskou bagetu v ceně* 9,90 *Kč. Paní prodavačka je však velmi zlomyslná, a tak vrátí vždy bankovky a mince o co nejvyšší hodnotě. Organizátoři mince požadované hodnoty již nadále nemění. Určete, kolik francouzských baget si organizátoři musí koupit, než seženou potřebné mince.*

Ze všeho nejdříve se zamyslíme nad tím, jaké mince a bankovky organizátoři dostanou zpět při koupi jedné bagety. Představme si, že platí nějakou bankovkou s vyšší hodnotou, například dvoutisícikorunovou. Paní prodavačka jim vrátí 1 990 korun. Tisíc devět set korun jim vrátí opět v bankovkách, v tomto případě to bude jedna tisícikorunová, jedna pětisetkorunová a dvě dvousetkorunové. Zbývajících devadesát korun jim již musí vrátit v mincích. Dostanou tedy jednu padesátikorunu a dvě dvacetikoruny.

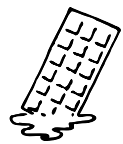
Důležité je uvědomit si, že při každém nákupu bude organizátorům vrácen počet stovek, které mají dostat, v nějakých bankovkách, se kterými mohou jít poté opět nakupovat, a také vždy dostanou jednu padesátikorunu a dvě dvacetikoruny. Můžeme tedy říci, že při každém nákupu získají za 100 korun jednu bagetu, dvě dvacetikoruny a jednu padesátikorunu. Jednoduše si tak můžeme spočítat, že pokud organizátoři provedou takovýchto nákupů padesát, bude jim celkem vráceno 50 padesátikorun a 100 dvacetikorun. Jelikož mají právě $50 \cdot 100 = 5\,000$ korun, peníze jim přesně vystačí. Aby si tedy organizátoři mohli rozměnit, musí si nakoupit 50 baget.

Kdybychom od počátku věděli, že organizátorům po rozměňování žádné peníze nezbudou, mohli bychom k nalezení řešení použít jednodušší způsob. Víme, že na počátku mají 5 000 korun a chtějí, aby jim v mincích zbylo $100 \cdot 20 + 50 \cdot 50 = 4\,500$ korun. Pokud by jim na konci žádné další peníze nezbyly, znamenalo by to, že 500 korun museli utratit za bagety, z čehož bychom mohli rovnou usoudit, že baget bylo 50. My jsme ovšem na počátku nevěděli, zda jim mimo mince nezbude ještě například stokorunová bankovka, a tak bychom si v případě, že bychom tento postup použili, nemohli být jistí správností našeho výsledku.

Aleš Opl
`ales@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.3 ... Roztopená čokoláda 6 bodů; průměr 5,42; řešilo 135 studentů

Když úžasný továrník Willy Wonka ukryl do svých čokolád pět zlatých výherních kupónů, vzrostla po Wonkově čokoládě prudce poptávka. Cena jedné tabulky odpovídá 35 Kč *a její hmotnost je* 100 g. *Vypočítejte, kolik korun na jedné tabulce děti ztratí, když se jejich čokoláda roztopí a* 10 ml *zůstane na obalu (děti ji tudíž nesní). Uvažujte, že hustota roztopené čokolády je* $1{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$.



Pro zjištění hodnoty, kterou má ztracená čokoláda, začneme výpočtem hmotnosti, která ulpí na obalu Wonkovy čokolády. Víme, že $10\,\mathrm{ml} = 10\,\mathrm{cm^3}$. Ztracenou hmotnost m_z tedy zjistíme ze známého vzorce $m = \rho V$ jako

$$m_z = 1{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}} \cdot 10\,\mathrm{cm^3} = 13\,\mathrm{g}\,.$$

Když známe hmotnost čokolády, která zůstala na obalu, a hmotnost celé čokolády i její cenu, snadno pomocí trojčlenky určíme cenu části čokolády, kterou nezužitkujeme. Hledanou cenu označíme x a dostáváme rovnici

$$\frac{x}{35\,\text{Kč}} = \frac{13\,\text{g}}{100\,\text{g}} \quad \Rightarrow \quad x = 35\,\text{Kč} \cdot \frac{13\,\text{g}}{100\,\text{g}} = 4{,}55\,\text{Kč}\,.$$

Vidíme, že pokud se dětem Wonkova čokoláda roztopí, část, která zůstane na obalu, vyjde na 4,55 korun.

Lukáš Linhart
lukasl@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... Odporná struna

6 bodů; průměr 4,45; řešilo 101 studentů

Bětka jednou cvičila na housle tak náruživě, až jí praskla jedna struna. Koupila si tedy novou, ocelovou. Při rozbalení ji napadlo změřit její elektrický odpor v nenataženém stavu a po napnutí na housle. Napnutím se struna prodlouží o 1% *své původní délky. Jaký odpor napnuté struny Bětka změřila, když u nenapnuté struny délky* $32\,\text{cm}$ *a poloměru* $0{,}25\,\text{mm}$ *naměřila odpor* $163{,}0\,\text{m}\Omega$*? Uvažujte, že napnutím se nezměnila hustota struny, změnil se pouze její tvar.*

Struna má tvar dlouhého válce. Její odpor lze určit pomocí vztahu pro odpor drátu

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}\,,$$

kde ρ je jeho měrný odpor, tzv. rezistivita, l délka drátu a S plocha jeho průřezu. Potřebujeme tedy zjistit hodnotu ρ struny a její délku a plochu průřezu po napnutí.

Klíčovou informací je pro nás to, že hustota struny je stále stejná, změnil se pouze její tvar. Vzhledem k tomu, že hmotnost struny se určitě nezměnila, je i její objem po natažení stejný jako v nenapnutém stavu. Můžeme tak psát

$$V_1 = V_2\,,$$

přičemž index 1 značí objem před napnutím a 2 po napnutí.

Aby se při natažení objem zachoval, musí se změnit nejen délka, ale i průřez drátu. Objem drátu se vypočítá podle vztahu pro objem válce:

$$V = l \cdot S\,,$$

kde l je jeho délka a S plocha jeho průřezu.

Podmínku zachování objemu lze zapsat jako

$$S_1 \cdot l_1 = S_2 \cdot l_2\,. \tag{1}$$

Délka struny se zvětší o $1\,\%$. Výsledná délka po natažení je tedy $1{,}01 \cdot l_1$. ($1\,\%$ odpovídá hodnotě 0,01, zvětšení o $1\,\%$ pak odpovídá $1 + 0{,}01 = 1{,}01$.) Ze vztahu (1) lze vyjádřit plochu průřezu struny po natažení jako

$$S_2 = S_1 \cdot \frac{l_1}{l_2} = S_1 \cdot \frac{l_1}{1{,}01 \cdot l_1} = S_1 \cdot \frac{1}{1{,}01}\,.$$

Jediný parametr, který zatím neznáme, je měrný elektrický odpor ρ. Ten ale můžeme určit ze známých parametrů pro nenataženou strunu (označme ji stejně jako u objemu indexem 1), neboť platí

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l_1}{S_1}\,. \qquad (2)$$

Rezistivitu pak můžeme vyjádřit ze vztahu (2) jako

$$\rho = R_1 \cdot \frac{S_1}{l_1}$$

a dosadit včetně vyjádření plochy průřezu do vztahu pro odpor napnuté struny (označíme ji analogicky indexem 2):

$$R_2 = R_1 \cdot \frac{S_1}{l_1} \cdot \frac{l_2}{S_1 \cdot \frac{1}{1{,}01}} = R_1 \cdot \frac{1}{l_1} \cdot \frac{1{,}01 \cdot l_1}{\frac{1}{1{,}01}}\,,$$

$$R_2 = 1{,}01^2 \cdot R_1 = 1{,}01^2 \cdot 0{,}163\,\Omega = 166{,}28\,\mathrm{m\Omega}\,.$$

Nejprve uvědomíme, že ve zlomcích můžeme zkrátit S_1 a že l_2 můžeme rozepsat jako $1{,}01 \cdot l_1$. V druhém kroku zkrátíme l_1 a upravíme složený zlomek.

Bětka po napnutí struny naměřila odpor $166{,}28\,\mathrm{m\Omega}$. Zajímavé je, že tento odpor vůbec nezávisí na počátečních rozměrech struny, ale pouze na tom, jak moc jsme ji natáhli a na jejím původním odporu. Na závěr si také všimněme, že díky prodloužení délky a zmenšení průřezu se odpor zvětšil.

Alžběta Andrýsková
`betka@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.5 ... Letadlová

7 bodů; průměr 3,62; řešilo 65 studentů

Letadlo stoupá pod úhlem 3° tak, aby se dostalo do požadované výšky $h = 10\,972\,\mathrm{m}$. Pokud u toho zrychluje se zrychlením $a = 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}{\cdot}min^{-1}}$ z $v_0 = 300\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ na $v_{\max} = 880\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, za jak dlouho dosáhne požadované výšky h a za jak dlouho rychlosti $v_{\max}$? Za jak dlouho by to bylo se stoupáním pod úhly 2° a 4°? Mění se pak čas pro tyto různé případy lineárně, nebo ne? A proč?

Letadlo se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem, proto čas, za který dosáhne maximální rychlosti, určíme jednoduše jako:

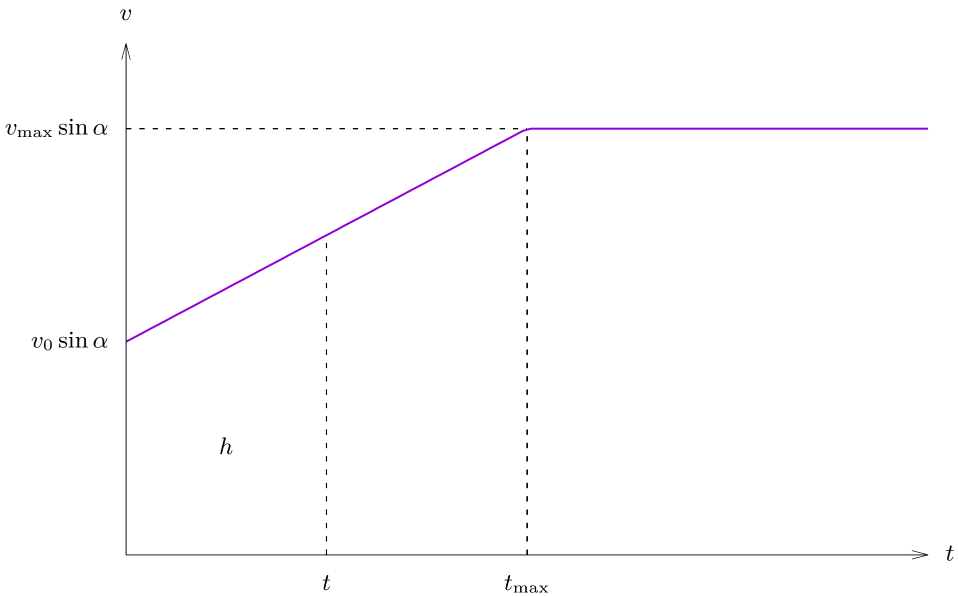
$$t_{\max} = \frac{v_{\max} - v_0}{a}\,.$$

Před dosazením číselných hodnot si ještě musíme rozmyslet, jak si poradit s jednotkami. Všimněme si, že když rychlosti i zrychlení ponecháme v zadaných jednotkách, vyjde výsledný čas v minutách:

$$t_{\max} = \frac{880 - 300}{20}\,\frac{\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}{\mathrm{km{\cdot}h^{-1}{\cdot}min^{-1}}} = 29\,\mathrm{min}\,.$$

Další výpočet je již o něco komplikovanější. Pohyb letadla si rozdělíme na dvě části. V první části se letadlo pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a, dokud nedosáhne rychlosti $v_{\max}$, a v druhé části už pokračuje v letu konstantní rychlostí $v_{\max}$. Přitom však bohužel nevíme, jestli se do výšky h dostane před dosažením maximální rychlosti, nebo až poté.

Zvolíme proto následující postup: nejprve budeme předpokládat, že pohyb letadla je rovnoměrně zrychlený po celou dobu stoupání, a vypočítáme pro toto stoupání čas letu. Pokud nám vyjde čas menší než $t_{\max}$, tak jsme hotovi, neboť letadlo v průběhu stoupání ještě nedosáhlo maximální rychlosti a pohyb byl proto skutečně v průběhu stoupání rovnoměrně zrychlený. Schématicky je tato možnost znázorněna na grafu 3.



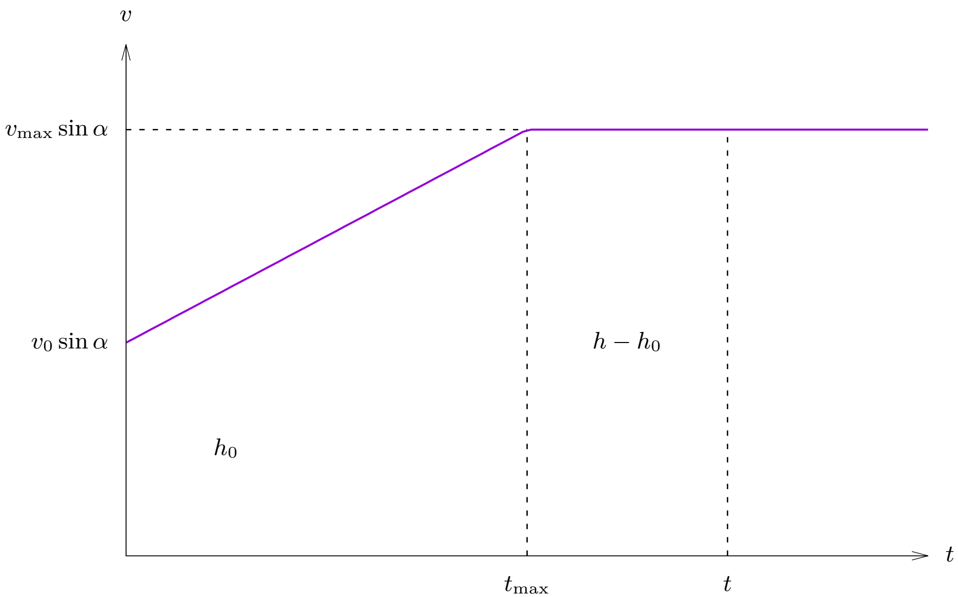
Obr. 3: Graf znázorňuje závislost svislé složky rychlosti letadla na čase, plocha pod tímto grafem pak vyjadřuje změnu výšky. V této možnosti uvažujeme, že se letadlo dostane do výšky h ještě před dosažením maximální rychlosti.

Na druhou stranu, pokud by nám vyšel větší čas, tak by to znamenalo, že je náš předpoklad chybný a letadlo dosáhne maximální rychlosti již v průběhu stoupání, viz graf 4.

Pak budeme muset náš vypočet změnit a napřed spočítat výšku h_0, do které se dostane při zrychlování, a poté počítat, že zbývající část výškového rozdílu $h - h_0$ se pohybuje rovnoměrně, a dobu tohoto pohybu přičíst k $t_{\max}$.

Přejděme nyní k výpočtům. Letadlo se pohybuje rychlostí v, nás však zajímá pouze jak rychle stoupá. Chceme tedy svislou složku tohoto pohybu, tu vypočítáme pomocí *goniometrické funkce* sinus jako:

$$v' = v \cdot \sin\alpha\,,$$



Obr. 4: Graf znázorňuje případ, kdy letadlo dosáhne maximální rychlosti (v čase $t_{\max}$) ještě před vystoupáním do výšky h. Zbytek cesty proto urazí rovnoměrným pohybem.

kde α je úhel stoupání. Svislá složka rychlosti je urychlována svislou složkou zrychlení a':

$$a' = a \cdot \sin \alpha \, .$$

Z toho spočítáme dobu letu pro rovnoměrně zrychlený pohyb (na základě našich předchozích úvah). Pro dráhu zrychleného pohybu s nenulovou počáteční rychlostí platí:

$$h = v_0' t + \frac{1}{2} a' t^2 \, ,$$

$$h = v_0 \sin \alpha \cdot t + \frac{1}{2} a \sin \alpha \cdot t^2 \, ,$$

$$0 = t^2 + \frac{2v_0}{a} t - \frac{2h}{a \sin \alpha} \, .$$

Vidíme, že se jedná o kvadratickou rovnici (chceme vypočítat čas t):

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \, .$$

Vyřešíme ji klasickým postupem, napřed spočítáme diskriminant:

$$D = B^2 - 4A\,C = \frac{4v_0^2}{a^2} + 4 \cdot \frac{2h}{a \sin \alpha} \, .$$

Řešení této rovnice je pak dáno (zajímá nás pouze kladné řešení, protože záporný čas zde nemá fyzikální význam):

$$t = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A}\,,$$
$$t = -\frac{v_0}{a} + \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} + \frac{2h}{a\sin\alpha}}\,.$$

Tentokrát již nemůžeme vše nechat v zadaných jednotkách. Je výhodnější pracovat v kilometrech a hodinách (protože pak nemusíme převádět rychlost), proto h a a převedeme na:

$$h = 10{,}972\,\mathrm{km} \qquad a = 1\,200\,\mathrm{km\cdot h^{-2}}\,.$$

Teď už můžeme všechny hodnoty dosadit do našeho vztahu pro t a vypočítat časy postupně pro všechny úhly stoupání:

$$t(2^\circ) = 30{,}1\,\mathrm{min}\,,$$
$$t(3^\circ) = 23{,}5\,\mathrm{min}\,,$$
$$t(4^\circ) = 19{,}2\,\mathrm{min}\,.$$

Pro úhly 3° a 4° jsme dostali menší čas než $t_{\mathrm{max}} = 29\,\mathrm{min}$, takže pro ně už další výpočty provádět nemusíme. Pro 2° však musíme čas vypočítat znovu. Na základě našeho postupu tedy spočítáme napřed výšku, do které se letadlo dostane před dosažením v_{max}. Použijeme k tomu stejnou rovnici pro rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$h_0 = v_0 \sin\alpha \cdot t_{\mathrm{max}} + \frac{1}{2} a \sin\alpha \cdot t_{\mathrm{max}}^2\,.$$

Zbývající část letu je již rovnoměrný pohyb rychlostí v_{max}, přičemž nás stále zajímá pouze její svislá složka. Čas tohoto pohybu je:

$$\tau = \frac{h - h_0}{v_{\mathrm{max}} \sin\alpha}\,,$$

z čehož získáme výsledný čas tím, že k τ přičteme t_{max} (doba první části letu):

$$t(2^\circ) = \tau + t_{\mathrm{max}}\,,$$
$$t(2^\circ) = t_{\mathrm{max}} + \frac{h}{v_{\mathrm{max}}\sin\alpha} - \frac{v_0}{v_{\mathrm{max}}} t_{\mathrm{max}} - \frac{a t_{\mathrm{max}}^2}{2 v_{\mathrm{max}}}\,,$$
$$t(2^\circ) = 31{,}0\,\mathrm{min}\,.$$

Opět jsme dosadili číselné hodnoty vyjádřené v kilometrech a hodinách. Doby letu pro jednotlivé úhly stoupání vyšly: 19,2 min, 23,5 min a 31,0 min. Z výpočtů a výsledků vidíme, že se čas letu v závislosti na úhlu rozhodně lineárně nemění.

Jiří Kohl
`jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.E ... Vlasatá

7 bodů; průměr 3,49; řešilo 73 studentů

Změřte co nejpřesněji tloušťku lidského vlasu. Postup měření důkladně popište a odhadněte jeho přesnost.

Naše měření je v principu jednoduché, máme změřit tloušťku vlasu, tedy jeden z jeho rozměrů. Při měření délky obvykle postupujeme tak, že použijeme metr, pravítko, nebo jiný druh délkového měřidla. S tloušťkou vlasu však máme problém. Je příliš malá na to, abychom ji mohli změřit například pravítkem, které má i nejmenší dílek výrazně větší než je námi měřená tloušťka. K přesnému měření malých rozměrů existuje zařízení zvané *posuvné měřítko* nebo lidově *šuplera*, které umožňuje měřit s přesností na zlomky milimetru. Přesto jsou i tato posuvná měřítka na vlas příliš hrubá. Můžeme ale použít jednoduchý postup, při němž zvětšíme měřenou vzdálenost na její několikanásobek. Tento konrétní případ lze realizovat namotáním vlasu hustě na tužku a následným změřením šířky několika „závitů“.

Výsledky měření

Měření jsme prováděli pro tři různé vlasy, které byly různě dlouhé, proto jsme u každého zvládli udělat rozdílný počet obtočení kolem tužky. Samozřejmě bychom mohli vždy počet omotání zastavit na deseti, ale vyšším počtem obtočení jsme dosahovali vyšší přesnosti měření. Získaná měření jsou uvedena v tabulce 1, kde je pro každý vlas pět měření pro pět nezávislých navinutí, kde je napsán počet závitů n, naměřená celková tloušťka d a naměřená tloušťka jednoho závitu d_0.

Tab. 1: Naměřené hodnoty tloušťky vlasu metodou navíjení vlasu na tužku

vlas 1			vlas 2			vlas 3		
n	$\frac{d}{\mathrm{mm}}$	$\frac{d_0}{\mathrm{mm}}$	n	$\frac{d}{\mathrm{mm}}$	$\frac{d_0}{\mathrm{mm}}$	n	$\frac{d}{\mathrm{mm}}$	$\frac{d_0}{\mathrm{mm}}$
13	1,45	0,112	20	2,30	0,115	15	1,40	0,093
12	1,55	0,129	10	1,40	0,140	15	1,45	0,097
12	1,40	0,117	15	1,60	0,107	15	1,20	0,080
13	1,65	0,127	21	2,60	0,124	15	1,40	0,093
12	1,35	0,113	24	2,85	0,119	15	1,15	0,077

Vidíme, že každé měření nám vyšlo jinak. Zkusíme se tedy zamyslet, jaká je výsledná naměřená hodnota tloušťky jednotlivých vlasů a jaká je její nejistota. Výslednou hodnotu několika měření spočítáme jako aritmetický průměr naměřených hodnot. Tedy tak, že všechny hodnoty sečteme a tento součet vydělíme počtem naměřených hodnot. Nejistotu měření můžeme určit dvěma způsoby, nejlepší je pak použít jejich kombinaci. První ze způsobů je jednodušší, protože bere v úvahu nejistotu použitého měřidla. Je nám jasné, že nemůžeme změřit nic menšího než nejmenší dílek použitého měřítka. Tato nejistota bude tedy polovinou nejmenšího dílku. V našem případě, kdy jsme použili posuvné měřítko s nejmenším dílkem 0,05 mm je tedy tato nejistota 0,025 mm. Tato nejistota je však platná pro měření daného počtu obtočení. Pro nejistotu měření jednoho vlasu ji musíme ještě vydělit počtem obtočení. Druhý způsob se týká náhodných chyb, které jsou způsobeny například různým navinutím vlasu nebo různým smáčknutím vlasu posuvným měřítkem. Tuto chybu spočítáme z naměřených dat tak, že každou naměřenou tloušťku odečteme od průměru a tento rozdíl umocníme na druhou. Tyto druhé mocniny sečteme, vydělíme $n(n-1)$, kde n je počet měření a na závěr odmocníme. Tento postup je detailněji popsán v textu `https://vyfuk.mff.cuni.cz/rady_a_tipy/hokus_pokus`. Chyby získané těmito dvěma způsoby sečteme ve druhých mocninách pod odmocninou $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pro jednotlivé vlasy pak dostáváme výsledky

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (0{,}119 \pm 0{,}004)\,\mathrm{mm}\,,\\
d_2 &= (0{,}121 \pm 0{,}005)\,\mathrm{mm}\,,\\
d_3 &= (0{,}088 \pm 0{,}004)\,\mathrm{mm}\,.
\end{aligned}
$$

Diskuse a závěr

Ačkoliv je vlas příliš tenký na změření průměru jednoho vlasu, můžeme poměrně přesně získat výsledek tak, že těchto průměrů změříme několik a výsledek vydělíme jejich počtem. Relativní nejistota tohoto měření byla pro všechny tři vlasy 3 %–5 %, což je na podmínky měření dost přesný výsledek. Nejistoty tohoto měření plynou především z různě hustého navinutí vlasu na tužku, různého smáčknutí vlasu posuvným měřítkem nebo i z nerovnoměrné tloušťky podél vlasu. Vidíme, že i různé vlasy jednoho člověka mohou mít různou tloušťku, vlasy různých lidí se mohou lišit ještě více. Některé internetové zdroje uvádí, že se tloušťka lidského vlasu pohybuje mezi 17 μm a 180 μm. Vidíme tedy, že výsledky našeho měření odpovídají skutečné tloušťce vlasu.

Bonus: Měření pomocí difrakce

Teorie Pro měření tloušťky vlasu je běžně používaná ještě další metoda: difrakce laserového paprsku na vlasu. Ta spočívá v tom, že tloušťka vlasu je řádově srovnatelná s vlnovou délkou světla. Tedy mezi částmi vlny, které procházely z různých stran vlasu je nezanedbatelný fázový rozdíl. Na stínítku za vlasem pak vzniká difrakční obrazec, který je systémem maxim a minim, kde maximum je v místech, kde se paprsky sejdou ve stejné fázi, a minimum naopak tam, kde se sejdou v opačné fázi. Ze vzdálenosti maxim (nebo minim) x pak můžeme vypočítat tloušťku vlasu d jako

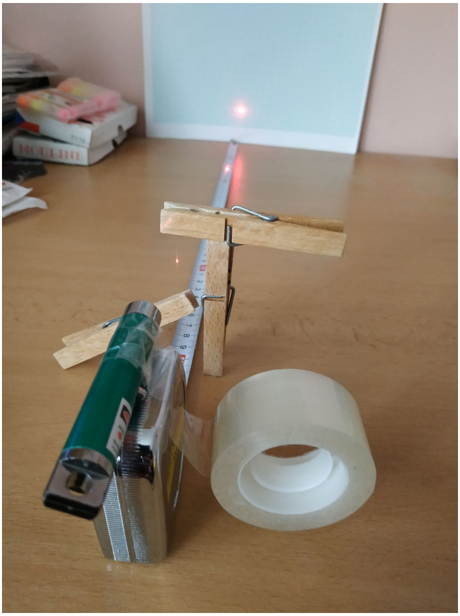
$$d = \frac{L\lambda}{x}\,,$$

přičemž L je vzdálenost vlasu od stínítka a λ je vlnová délka laseru. Přesné odvození si zájemci mohou přečíst na stránkách FYKOSu.[4]

Výsledky měření V našem měření touto metodou jsme použili stejné tři vlasy jako pro předchozí metodu, které jsme pomocí kolíčků na prádlo napnuli a svítili na ně laserem o vlnové délce $\lambda = (640 \pm 10)\,\mathrm{nm}$. Za vlasem ve vzdálenosti $L = (50{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{cm}$ máme umístěné stínítko pokryté milimetrovým papírem. Na tomto papíře měříme vzdálenost minim (jsou lépe identifikovatelná než maxima).

Pro zvýšení přesnosti postupujeme tak, že na papír vyznačíme polohy všech minim a pak počítáme vzdálenost sousedních dvou jako více těchto vzdáleností vydělených jejich počtem. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.

[4] `https://fykos.cz/_media/rocnik12/ulohy/pdf/uloha12_3_e.pdf?cache=`



Obr. 5: Fotografie aparatury

Nejistoty měření vzdálenosti mezi minimy x byly vypočteny, jak je popsáno v předchozí části. Nejistoty určení tloušťky vlasu d pak byly určeny tak, že relativní nejistota tloušťky vlasu je součtem relativních nejistot vzdálenosti minim, vlnové délky a vzdálenosti stínítka.

Diskuse a závěr Hodnoty naměřené touto metodou jsou řádově podobné předchozí metodě, ale jsou menší. Relativní přesnost tohoto měření je mezi 7 % a 10 %, což je menší přesnost než u jednoduchého měření předchozí metodou. To je dáno tím, že minima jsou hůře identifikovatelná, a tedy jejich polohu nemůžeme měřit s dostatečnou přesností posuvným měřítkem. Vyšší přesnosti experimentu bychom mohli dosáhnout například zvolením delší vzdálenost L, která by zajistila i větší vzdálenosti x, které by umožnily jejich měření s vyšší relativní přesností.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.V ... Energetická všehochuť

7 bodů; průměr 3,30; řešilo 50 studentů

1. *Jirka se rozhodl jít na horskou dráhu, kterou si můžeme schematicky rozdělit na tři části: nakloněnou rovinu pod úhlem 45° vysokou h a dvě půlkružnice s poloměry R a r, viz obrázek. Do vozíku nasedl v bodě 1 a vyrazil s nulovou počáteční rychlostí.*

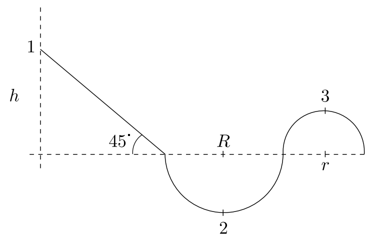
   (a) *Jaká bude Jirkova rychlost v bodě 2?*

   (b) *Co musí platit pro r, aby se vozík mohl dostat do bodu 3?*

Tab. 2: Naměřené hodnoty tloušťky vlasu metodou difrakce laseru

	Vlas 1	Vlas 2	Vlas 3
$\frac{x_1}{\mathrm{mm}}$	4,2	3,3	4,0
$\frac{x_2}{\mathrm{mm}}$	4,5	3,2	5,0
$\frac{x_3}{\mathrm{mm}}$	4,0	3,7	4,5
$\frac{x_4}{\mathrm{mm}}$	4,0	4,0	5,5
$\frac{x_5}{\mathrm{mm}}$	3,8	5,0	5,5
$\frac{x}{\mathrm{mm}}$	4,1	3,8	4,9
$\frac{\sigma(x)}{\mathrm{mm}}$	0,3	0,4	0,4
$\frac{d}{\mathrm{mm}}$	0,078	0,083	0,065
$\frac{\sigma(d)}{\mathrm{mm}}$	0,006	0,009	0,005

Celková hmotnost vozíku a Jirky je m, vozík není nijak poháněn a v průběhu jízdy se nikdy neoddělí od kolejnic. Tření a odporové síly zanedbejte.

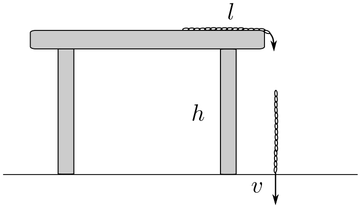


Obr. 6: Vozík na horské dráze

2. *Řetízek délky l se nachází v klidu na hraně stolu vysokého h. Jeden konec řetízku posuneme za hranu stolu tak, že řetízek začne bez tření klouzat dolů. Jaká bude rychlost spodního konce řetízku, když se zrovna dotkne země? Všechny odporové síly zanedbejte.*

3. *Klasické žárovky mají nízkou efektivitu a většinu své energie přeměňují na teplo, zbytek na světlo. Taková žárovka s účinností $4\,\%$ se nachází v místnosti o rozměrech $5\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$. Do žárovky přichází proud o velikosti $250\,\mathrm{mA}$ a efektivní napětí $240\,\mathrm{V}$.*

   (a) *Jakým výkonem je ohřívána místnost (tedy kolik tepla je místnosti předáno každou*



Obr. 7: Řetízek na stole

sekundu), jestliže je žárovka v tepelné rovnováze a veškeré světlo uniká z místnosti okny a žádnou energii jí nepředává?

(b) *Za jak dlouho se vzduch v místnosti ohřeje o* $10\,°\mathrm{C}$*? Hustota vzduchu je* $1{,}3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ *a měrná tepelná kapacita vzduchu při konstantním objemu (což je náš případ) je* $720\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$*. Předpokládejte, že stěny se neohřívají.*

(c) *Kolik kilogramů černého uhlí bychom museli spálit, aby došlo ke stejné změně teploty? Výhřevnost černého uhlí je* $26\,\mathrm{MJ\cdot kg^{-1}}$.

1. (a) Při pohybu vozíku zanedbáváme veškeré tření, proto se zachovává jeho mechanická energie. Vozík vyráží z bodu 1 s nulovou počáteční rychlostí (a tedy i nulovou kinetickou energií) a na své cestě do bodu 2 celkově klesne o výšku $R + h$. Ztratí tedy potenciální energii o velikosti:

$$E_\mathrm{p} = mg(R + h)\,.$$

Veškerá tato energie se pak přemění na kinetickou energii. Odtud spočítáme výslednou rychlost v bodě 2 jako:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(R + h)\,,$$
$$v = \sqrt{2g(R + h)}\,.$$

Všimněme si, že výsledek nezávisí na hmotnosti vozíku. To je typická vlastnost pohybů v tíhovém poli bez tření.

(b) Fakt, že se mechanická energie zachovává, nám dá zajímavý výsledek – když se těleso při pohybech v tíhovém poli (bez působení jakýchkoli dalších sil) vrátí zpět do původní výšky, tak má stejnou kinetickou energii jako na začátku pohybu. Tento výsledek je zřejmý. Stačí si uvědomit, že ve stejné výšce má těleso i stejnou potenciální energii, proto se žádná energie nemohla přeměnit na kinetickou.

Použijme nyní tento výsledek k vyřešení naší úlohy. Vidíme, že pokud se bod 3 nachází níže než bod 1, tak v něm má vozík vždy nenulovou kinetickou energii, a do bodu 3 se tedy může bez problémů dostat. To, že v průběhu pohybu klesne do bodu 2, nic neovlivní, neboť energie uvolněná při klesání do bodu 2 je následně spotřebována na stoupání. Vozík takto zřejmě dokáže vystoupat až na úroveň bodu 1, pro polohu bodu 3 tedy musí platit:

$$r \leq h\,.$$

Do větších výšek se vozík dostat nedokáže, protože začíná s nulovou počáteční rychlostí a není nijak poháněn, nemá tedy k dispozici žádnou dodatečnou energii, která by ho do větších výšek dokázala dopravit.

2. Použijeme podobný postup jako v předchozí úloze, jen musíme věnovat větší pozornost výpočtu potenciální energie řetízku. Víme, že potenciální energii vypočítáme jako:

$$E_\mathrm{p} = mgy\,,$$

kde y je výška nad nějakou nulovou hladinou, kterou si sami zvolíme (v našem příkladě volíme jako nulovou hladinu zem). Hmotnost řetízku je rovnoměrně rozložena podél celé jeho délky, proto není správné uvažovat, že změna potenciální energie v okamžiku, kdy se první konec zrovna dotkne země, je

$$\Delta E_\mathrm{p} = mgh\,,$$

protože zatímco jeden konec skutečně klesl o výšku h, druhý konec klesl pouze o $h - l$. Místo toho tedy řekneme, že oba konce se přesunuly *průměrně* o $h - l/2$. Díky tomu, že je řetízek mezi konci rozložen rovnoměrně, můžeme tento argument použít na každé dva body, které jsou položeny symetricky vůči středu řetízku, a zjistíme, že celý řetízek průměrně klesl o $h - l/2$.

Co však rozumíme tím *průměrně*? Slovo průměrně zde má stejný význam, jako kdybychom řekli, že se *těžiště* řetízku přesune o $h - l/2$. Dá se ukázat, že tento zákon má obecnou platnost – pro těleso libovolného tvaru platí, že při pohybech v tíhovém poli je změna jeho potenciální energie rovna:

$$\Delta E_\mathrm{p} = mgy_\mathrm{T}\,,$$

kde y_T je změna výšky těžiště. Když tento zákon aplikujeme na náš příklad, tak dostaneme, že rychlost řetízku těsně před dopadem na zem je rovna:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(h - \frac{l}{2}\right)\,,$$
$$v = \sqrt{g(2h - l)}\,.$$

3. (a) Prostřednictvím elektrického proudu dodáváme žárovce výkon o velikosti:

$$P_0 = U \cdot I\,,$$

přičemž víme, že $\eta = 4\,\% = 0{,}04$ z dodaného výkonu se přemění na světlo. Místnost je proto ohřívána výkonem:

$$P = (1 - \eta)UI = 58\,\mathrm{W}\,.$$

(b) Na ohřev musíme vzduchu dodat teplo o velikosti:

$$Q = mc\Delta T = \rho V c\Delta T\,,$$

kde $m = \rho V$ je celková hmotnost vzduchu. Toto teplo dodáváme výkonem P, celé ohřívání tedy zabere dobu:

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{\rho V c\Delta T}{(1-\eta)UI} = 12\,200\mathrm{s} \doteq 3{,}4\,\mathrm{h}\,.$$

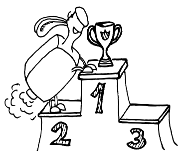
(c) Výhřevnost vyjadřuje, kolik tepla se uvolní při spálení 1 kilogramu dané látky, neboli:

$$Q = Hm\,,$$

kde H je výhřevnost. Na dodání tepla Q z předchozí úlohy tedy musíme spálit uhlí o hmotnosti:

$$m = \frac{Q}{H} = 27\,\mathrm{g}\,.$$

Václav Verner
vasek@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**43**
1.	*Valentýna Sochorová*	G, Olomouc-Hejčín	4	5	6	5	5	3	0	**28**	**28**
2.	*Agáta Húšťavová*	European School Luxembourg II	5	–	–	–	–	5	–	**10**	**10**
3.	*Tomáš Rataj*	ZŠ Stupkova, Olomouc	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**9**
4.	*Antonín Papoušek*	G Volgogradská 6a, Ostrava	4	–	–	–	–	–	–	**4**	**4**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**43**
1.–2.	*Hana Bayerová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	5	5	6	6	2	4	5	**33**	**33**
1.–2.	*Adam Houdek*	ZŠ a MŠ , Březová	5	5	6	6	4	–	7	**33**	**33**
3.	*Matěj Křivánek*	ZŠ T. G. M. Mor. Budějovice	5	5	6	6	5	4	–	**31**	**31**
4.–5.	*Emma Burešová*	Jiráskovo G, Náchod	5	5	6	1	3	4	3	**27**	**27**
4.–5.	*Matěj Ondrušek*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	4	5	6	4	1	3	4	**27**	**27**
6.–7.	*Vojtěch Reif*	ZŠ u sv. Štěpána Praha 2	4	5	6	5	–	5	–	**25**	**25**
6.–7.	*Jáchym Turner*	G J. Vrchlického, Klatovy	5	5	6	2	3	4	–	**25**	**25**
8.	*Květa Bouchalová*	G, Olomouc-Hejčín	5	5	6	6	–	–	–	**22**	**22**
9.–11.	*Eliška Knopfová*	ZŠ J. A. Komenského Hradec Králo	5	5	6	–	–	4	–	**20**	**20**
9.–11.	*Tereza Strašilová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	4	5	6	2	–	3	–	**20**	**20**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**43**
9.–11.	*Matylda Svobodová*	ZŠ Novoměstská, Brno	5	4	6	1	–	4	–	**20**	**20**
12.	*Jáchym Šleška*	ZŠ Haškova, Uničov	4	5	6	–	–	4	–	**19**	**19**
13.–14.	*Dmitrij Petreckyj*	Fakultní ZŠŠ PedF UK Praha 5 - S	5	5	6	1	–	1	–	**18**	**18**
13.–14.	*Kateřina Zubálová*	ZŠ Stupkova, Olomouc	5	5	5	2	0	1	–	**18**	**18**
15.–16.	*Martin Maláč*	PORG, Praha	5	5	6	–	–	–	–	**16**	**16**
15.–16.	*Antonín Střída*	ZŠ a MŠ Lutín	5	5	6	–	–	–	–	**16**	**16**
17.–21.	*Sofie Desnicová*	G, Litovel	4	5	6	–	–	–	–	**15**	**15**
17.–21.	*Jan Foldyna*	Anglofonní základní škola, z. ú.	3	5	6	–	–	1	0	**15**	**15**
17.–21.	*Alexandra Sochorová*	G Christiana Dopplera, Praha	4	5	4	1	0	1	0	**15**	**15**
17.–21.	*Bartoloměj Stoklásek*	ZŠ Troubelice	4	5	6	–	–	–	–	**15**	**15**
17.–21.	*Daniel Strašil*	G Christiana Dopplera, Praha	4	5	6	–	–	–	–	**15**	**15**
22.	*Klára Valentová*	ZŠ Hálkova, Olomouc	3	5	6	–	–	–	–	**14**	**14**
23.	*Beáta Mudráková*	ZŠ a MŠ Husova, Brno	3	5	5	–	–	–	–	**13**	**13**
24.–25.	*Lukáš Lizúch*	Masarykovo G, Vsetín	4	5	3	–	–	–	–	**12**	**12**
24.–25.	*Klára Zíková*	G J. Vrchlického, Klatovy	4	5	–	–	–	3	–	**12**	**12**
26.	*Erik Hojgr*	ZŠ Hálkova, Olomouc	5	3	3	0	–	–	–	**11**	**11**
27.	*Matěj Illner*	G Christiana Dopplera, Praha	4	0	3	0	0	3	0	**10**	**10**
28.	*Mikuláš Glozar*	ZŠ Masarova, Brno	4	0	4	–	–	–	–	**8**	**8**
29.	*Marek Šoltés*	ZŠ Svážná, Brno	4	3	0	–	–	–	–	**7**	**7**
30.–32.	*Sari Attar*	ZŠ a MŠ Praha 5 - Hlubočepy	3	–	–	–	–	2	–	**5**	**5**
30.–32.	*Matyáš Churavý*	EKO G, Brno	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**5**
30.–32.	*Šimon Novák*	Nový PORG, Praha	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**5**
33.	*Josef Povolný*	ZŠ Školní ul., Hrádek nad Nisou	4	–	–	–	–	–	–	**4**	**4**
34.	*Ondřej Kulhánek*	FZŠ prof. O. Chlupa, Praha	3	–	–	–	–	–	–	**3**	**3**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
1.	*Jana Feldbabelová*	ZŠ Jemnice	–	5	6	6	5	6	6	**34**	**34**
2.	*Max Menčík*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	5	6	6	5	5	6	**33**	**33**
3.–4.	*Filip Borkovec*	G, Křenová, Brno	–	5	6	5	7	3	–	**26**	**26**
3.–4.	*Kateřina Hujová*	G, Voděradská, Praha	–	5	6	6	5	4	–	**26**	**26**
5.–7.	*Petr Barták*	Slovanské G, Olomouc	–	5	6	6	–	5	3	**25**	**25**
5.–7.	*Magdaléna Křížová*	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	–	5	6	6	5	–	3	**25**	**25**
5.–7.	*Sámo Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	3	3	2	**25**	**25**
8.	*Patrik Piňos*	ZŠ Gajdošova, Brno	–	5	6	4	6	3	–	**24**	**24**
9.–10.	*Matěj Knop*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	6	5	7	–	–	**23**	**23**
9.–10.	*Dominik Kudr*	ZŠ a MŠ Studenec	–	5	6	3	2	5	2	**23**	**23**
11.–12.	*Zuzana Kýrová*	ZŠ nám. Svornosti, Brno	–	5	6	6	–	5	–	**22**	**22**
11.–12.	*Aneta Mičulková*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	6	6	–	5	–	**22**	**22**
13.–15.	*Aleš Antoň*	G J. Heyrovského, Praha	–	5	5	3	2	3	3	**21**	**21**
13.–15.	*Tomáš Čanda*	ZŠ J. A. Komenského Blatná	–	5	6	5	5	–	–	**21**	**21**
13.–15.	*Adam Jurtík*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	6	6	2	2	–	**21**	**21**
16.	*Štěpán Zajačik*	ZŠ Školní, Chomutov	–	4	6	6	3	–	–	**19**	**19**
17.	*Linda Rokosová*	G, Jihlava	–	5	6	4	–	3	0	**18**	**18**
18.–19.	*Lucie Kohoutková*	Masarykovo G, Plzeň	–	5	6	5	1	–	–	**17**	**17**
18.–19.	*Julie Krčmařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	–	1	5	–	**17**	**17**
20.–22.	*Ondřej Bohatý*	G Opatov, Praha	–	5	6	5	–	–	–	**16**	**16**
20.–22.	*Lukáš Hobza*	G O. Havlové, Ostrava	–	2	4	5	2	3	–	**16**	**16**
20.–22.	*Matěj Purkert*	G, Písnická, Praha	–	4	6	5	–	–	1	**16**	**16**
23.–24.	*Karolína Kačalková*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	5	6	–	4	–	–	**15**	**15**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
23.–24.	*Filip Procházka*	G J. Heyrovského, Praha	–	5	6	4	–	–	–	**15**	**15**
25.–28.	*Patrik Hrebinec*	ZŠ Na Příkopech, Chomutov	–	4	6	2	–	2	–	**14**	**14**
25.–28.	*Renata Petlanová*	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	–	5	5	4	–	–	–	**14**	**14**
25.–28.	*Juraj Štefina*	ZŠ sv. Margity Púchov	–	4	6	2	–	2	–	**14**	**14**
25.–28.	*Josef Turek*	G, Šumperk	–	5	6	–	–	3	–	**14**	**14**
29.–31.	*Marek Petlan*	ZŠ Mendelova, Praha 4 - Jižní Mě	–	5	6	2	–	–	–	**13**	**13**
29.–31.	*Tereza Vargová*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	5	6	–	2	–	–	**13**	**13**
29.–31.	*Timotej Vašina*	ZŠ a MŠ Praha 6 - Dejvice	–	5	6	–	–	2	–	**13**	**13**
32.–33.	*Erik Rössler*	PORG, Praha	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
32.–33.	*Šimon Václavík*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
34.	*Jakub Brázda*	ZŠ Politických vězňů, Slaný	–	5	3	–	–	–	–	**8**	**8**
35.–41.	*Tomáš Dolanský*	G Týn nad Vltavou	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**6**
35.–41.	*Vít Foltas*	ZŠ a MŠ Spálov	–	–	4	2	–	–	–	**6**	**6**
35.–41.	*Michaela Chovancová*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**6**
35.–41.	*Marína Kiliánová*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**6**
35.–41.	*Eva Kundratová*	ZŠ Komenského II Zlín	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**6**
35.–41.	*Alžběta Sochorová*	G, Blovice	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**6**
35.–41.	*Jiří Zakuťanský*	G, Šternberk	–	3	3	–	–	–	–	**6**	**6**
42.	*Lukáš Kulhánek*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	0	–	–	–	2	–	**2**	**2**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
1.	*Kamilo Tomáš*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	6	5	7	7	**36**	**36**
2.	*Tereza Kubínová*	G, Litoměřická, Praha	–	5	6	6	6	5	7	**35**	**35**
3.–4.	*David Laušman*	G Opatov, Praha	–	5	6	6	6	5	6	**34**	**34**
3.–4.	*Martin Motyčka*	ZŠ Nad Vodovodem, Praha 10	–	5	6	6	6	5	6	**34**	**34**
5.–6.	*Jan Hrubec*	OPEN GATE Říčany	–	5	6	6	7	4	5	**33**	**33**
5.–6.	*Matej Karpáč*	ZŠ Jána Švermu	–	5	6	5	6	4	7	**33**	**33**
7.–8.	*Alena Mouchová*	G, Český Krumlov	–	5	6	4	5	5	6	**31**	**31**
7.–8.	*Marek Opluštil*	G, Litovel	–	5	6	5	3	7	5	**31**	**31**
9.–10.	*Filip Groh*	ZŠ Liberec 10	–	5	6	6	6	3	4	**30**	**30**
9.–10.	*Ondřej Kočur*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	6	6	6	3	4	**30**	**30**
11.–12.	*Lucie Endlová*	G O. Havlové, Ostrava	–	5	6	6	5	4	3	**29**	**29**
11.–12.	*Antonín Plašil*	G Dobruška	–	5	6	6	6	–	6	**29**	**29**
13.–14.	*Petra Prknová*	ZŠ Jemnice	–	5	6	6	3	5	3	**28**	**28**
13.–14.	*Matěj Šebesta*	Masarykovo G, Vsetín	–	5	6	5	4	5	3	**28**	**28**
15.	*Klaudie Zemene*	G a ZUŠ, Šlapanice	–	5	6	6	3	4	3	**27**	**27**
16.–17.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	3	3	3	**26**	**26**
16.–17.	*Michaela Urbanová*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	6	6	3	6	–	**26**	**26**
18.–19.	*Ondřej Porod*	G Týn nad Vltavou	–	5	6	6	–	4	4	**25**	**25**
18.–19.	*Ondřej Rejman*	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	4	6	6	5	–	4	**25**	**25**
20.–22.	*Vojtěch Černý*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	6	7	–	–	**24**	**24**
20.–22.	*Anežka Krčmová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	5	6	4	1	4	4	**24**	**24**
20.–22.	*Natálie Lászlóová*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	6	6	5	–	2	**24**	**24**
23.–25.	*Michael Ambros*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	4	4	–	4	**23**	**23**
23.–25.	*Monika Dlouhá*	G Matyáše Lercha, Brno	–	5	6	4	2	4	2	**23**	**23**
23.–25.	*Jana Pohořilská*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	6	6	6	–	–	**23**	**23**
26.–27.	*Vlasta Suchá*	Jiráskovo G, Náchod	–	5	6	5	1	2	3	**22**	**22**
26.–27.	*Martin Vagner*	G, Voděradská, Praha	–	–	6	6	4	–	6	**22**	**22**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
28.–31.	*Jana Fišerová*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	6	–	4	–	**21**	**21**
28.–31.	*Leonard Lindvay*	G Grösslingová, Bratislava	–	5	6	6	–	4	–	**21**	**21**
28.–31.	*Kristýna Otevřelová*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	5	5	5	6	–	–	**21**	**21**
28.–31.	*Denis Peťka*	G J. Škody, Přerov	–	5	6	6	–	–	4	**21**	**21**
32.–35.	*Max Denemarek*	G Matyáše Lercha, Brno	–	5	6	4	3	1	0	**19**	**19**
32.–35.	*Natálie Jochová*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	6	6	2	–	–	**19**	**19**
32.–35.	*Pavlína Jurásková*	G Dobruška	–	0	6	6	7	–	–	**19**	**19**
32.–35.	*Šimon Klousek*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	6	6	–	2	–	**19**	**19**
36.	*Vít Kubal*	G, Český Krumlov	–	5	6	1	–	4	2	**18**	**18**
37.–39.	*Adam Cieślar*	ZŠ Divišov	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**17**
37.–39.	*Martin Landík*	G Ústavní, Praha	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**17**
37.–39.	*Ondřej Zapletal*	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	5	6	5	1	–	–	**17**	**17**
40.–43.	*Nicol Plšková*	G J. Škody, Přerov	–	5	6	–	–	5	–	**16**	**16**
40.–43.	*Petra Šilerová*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	5	6	5	–	–	–	**16**	**16**
40.–43.	*Vítek Vácha*	ZŠ a MŠ Wolkerova, Havl. Brod	–	5	6	4	–	1	–	**16**	**16**
40.–43.	*Pavel Zachariáš*	G Tišnov	–	5	6	5	–	–	–	**16**	**16**
44.	*Filip Gašparín*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	4	6	–	–	–	**15**	**15**
45.–46.	*Jakub Štěpánek*	ZŠ Nad Vodovodem, Praha 10	–	–	6	–	2	4	2	**14**	**14**
45.–46.	*Petr Vaško*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	5	6	–	–	–	3	**14**	**14**
47.–48.	*Josef Hugo Holub*	ZŠ Gajdošova, Brno	–	0	0	5	3	3	2	**13**	**13**
47.–48.	*Jan Motlík*	G Opatov, Praha	–	5	6	2	–	–	–	**13**	**13**
49.	*Jan Herzig*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	6	6	–	–	–	**12**	**12**
50.–55.	*Šimon Hanák*	Cyrilomet. G a SOŠ pg., Brno	–	–	6	5	–	–	–	**11**	**11**
50.–55.	*Klára Hašová*	G, Křenová, Brno	–	5	2	2	2	–	–	**11**	**11**
50.–55.	*Vojtěch Kužílek*	ZŠ Heyrovského, Olomouc	–	–	6	5	–	–	–	**11**	**11**
50.–55.	*David Manhalter*	EKO G, Brno	–	5	3	3	–	–	–	**11**	**11**
50.–55.	*Julie Svobodová*	ZŠ Chomutovská, Kadaň	–	4	4	3	–	–	–	**11**	**11**
50.–55.	*Julie Vlčanová*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
56.–58.	*Natálie Manoušková*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	5	–	4	–	–	–	**9**	**9**
56.–58.	*Kevin Nguyen*	ZŠ Chomutovská, Kadaň	–	5	4	0	0	0	0	**9**	**9**
56.–58.	*Ondřej Pavelka*	ZŠ a MŠ Pňovice, Litovel	–	3	3	0	1	2	–	**9**	**9**
59.	*Ema Vondráčková*	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	6	2	–	–	–	**8**	**8**
60.	*Barbora Barnatová*	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	5	–	–	–	2	0	**7**	**7**
61.–63.	*Mikuláš Hořenek*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	0	6	0	–	–	**6**	**6**
61.–63.	*Lenka Hromádková*	G, Hlinsko	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**6**
61.–63.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**6**
64.	*Marek Hromada*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	5	–	–	–	–	**5**	**5**
65.–66.	*Marie Steinhauserová*	ZŠ Strmilov	–	–	–	–	–	3	–	**3**	**3**
65.–66.	*Šimon Tureček*	G, Karviná	–	–	3	0	–	–	–	**3**	**3**
67.	*Štěpán Železný*	ZŠ Hamry, Brno	–	0	0	0	–	1	0	**1**	**1**
68.	*Štěpán Petr*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	0	–	–	–	–	**0**	**0**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

/ksvyfuk ***@ksvyfuk***

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.