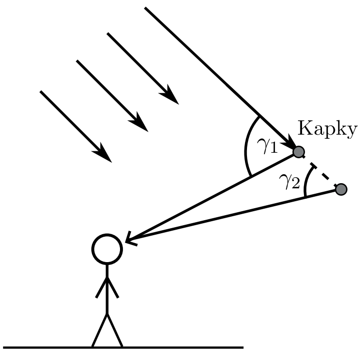
Výfučtení: Duha

Každý z nás již asi někdy v životě viděl duhu. Barevný oblouk, ve kterém se postupně střídají barvy od červené přes žlutou a zelenou po modrou, znají již malé děti, avšak my si zde vysvětlíme její původ fyzikálně. Jak asi víte, duha vzniká tehdy, když zároveň prší a svítí slunce. To nám může signalizovat, že duha bude mít něco společného s lomem slunečních paprsků ve vodních kapkách. Sluneční paprsek vchází do vodní kapky a láme se zpátky do směru, ze kterého přiletěl, pod úhlem γ_0. To, o jak moc velký úhel se paprsek zlomí při průchodu do vodní kapky, popisuje veličina nazvaná *index lomu* značená n. Tento index lomu má různou hodnotu pro světlo různých barev, proto je úhel γ_0 různý pro různé barvy. Vidíme tedy duhu jako posloupnost barev.

Tvar duhy

Když si představíme, že světelný paprsek dopadá ve vzdálenosti h od osy kapky a odklání se o úhel γ_0, tvoří všechny možné vzdálenosti okolo osy kapky kružnici, tedy i odkloněné paprsky budou tvořit kružnici. Dle tohoto předpokladu by tedy duha měla být kruhová. Proč tedy kruhovou duhu nevidíme? Protože je její část zakrytá Zemí. Popišme si to podrobněji. Kdyby se paprsky po průchodu vodou neodkláněly, pak prochází rovně přímo na místo naproti Slunci. Odkloněním o úhel γ tak vzniká kružnice o daném průměru kolem bodu přímo naproti Slunce. Proto tedy duhu nikdy nevidíme celou, ale pouze tu část, kterou nezakrývá Země. Abychom duhu viděli celou, musel by být bod naproti Slunci alespoň o úhel γ_0 nad obzorem, a tedy Slunce o úhel γ_0 pod obzorem. Proto také vidíme duhu častěji ráno a večer, když je Slunce nízko a bod naproti Slunci tak není příliš hluboko pod obzorem.

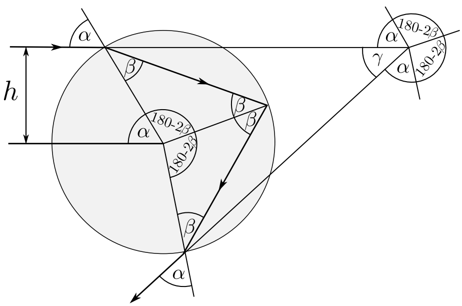


Obr. 1: Schématické znázornění vzniku duhy. Sluneční paprsky dopadají na kapky pod nějakým úhlem daným výškou Slunce nad obzorem a po průchodu kapkou se odkloní o úhel γ. Když tedy pozorujeme duhu, díváme se na zlomené sluneční paprsky. Jak uvidíme v následující sekci, úhel γ závisí na vlnové délce (barvě) světla, proto na duze vidíme různé barvy v různých výškách nad obzorem.

Výpočet úhlu γ_0

Začneme tím, že vyjádříme závislost úhlu odklonu γ na výšce h, ve které paprsek do kapky vody vstupuje.

Sluneční paprsek vstupuje do kapky nahoře vlevo ve výšce h nad vodorovnou osou, která prochází středem kapky, pod úhlem α vzhledem k normále (kolmici na bod vstupu procházející středem kruhu). Následně se láme pod úhlem β, odráží se na protější stěně kapky a vystupuje z kapky ven (viz obr. 2).[1] Původní paprsek svírá s odraženým paprskem úhel γ.



Obr. 2: Lom paprsku kapkou vody

Prvně se musíme zamyslet nad velikostmi všech úhlů. Bod vstupu, bod odrazu a střed kruhu tvoří rovnoramenný trojúhelník. Pro rovnoramenný trojúhelník platí, že úhly při jeho základně jsou shodné. Polovina úhlu, který svírá paprsek před odrazem s paprskem po odrazu je β. Protože platí, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°, bude velikost vrcholového úhlu zmíněného rovnoramenného trojúhelníku $(180^\circ - 2\beta)$. Protažením paprsku dál přes bod vstupu a zpět přes bod výstupu dostaneme vrchol úhlu γ. Úhly okolo tohoto vrcholu budou totožné s těmi okolo středu. Teď už známe všechny úhly potřebné na to, abychom mohli vyjádřit velikost úhlu γ:

$$\gamma = 360^\circ - 2\alpha - 2(180^\circ - 2\beta)\,.$$

Úpravou rovnice získáme

$$\gamma = 4\beta - 2\alpha\,.$$

Nyní potřebujeme vyjádřit tyto úhly pomocí výšky vstupu paprsku h. K tomu budeme potřebovat Snellův zákon, ve kterém vystupuje funkce sinus. Představme si na chvíli funkce jako krabičky, do kterých dáme nějaké číslo a ony nám vrátí jiné číslo. Pokud funkci sinus (sin) dáme velikost nějakého úhlu, tak nám vrátí nějaké číslo (konkrétně poměr odvěsny protilehlé tomuto úhlu ku přeponě v pravoúhlém trojúhelníku). Pokud toto číslo dáme funkci arkus sinus (arcsin), vrátí nám velikost úhlu, kterou jsme předtím dali sinu. Funkcím, jako je arkus sinus, se říká inverzní goniometrická (cyklometrická) funkce. Pokud se chcete o tomto tématu dozvědět víc, doporučujeme přečíst si Výfučtení o goniometrických a cyklometrických funkcích[2]

Z definice goniometrické funkce sin v pravoúhlém trojúhelníku

$$\sin\alpha = \frac{\text{protilehlá/odvěsna}}{\text{přepona}}$$

[1] Při každém dopadu paprsku světla se část světla odrazí a část zlomí. Nás nyní zajímají ty části, které mají popsaný průběh. Proto jsou pak duhy vyšších řádů slabší, protože již větší část paprsku „utekla“ jinam.

[2] 2. ročník, 6. série, `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r2/vyfucteni/vyfucteni_4.pdf`

lze pro kapku s poloměrem r odvodit, že

$$\sin \alpha = \frac{h}{r}\,.$$

Pro zjištění velikosti úhlu α použijeme inverzní funkci arkus sinus (arcsin).

$$\arcsin\left(\sin \alpha\right) = \arcsin \frac{h}{r}$$

Z předchozí definice jste určitě pochopili, že $\arcsin\left(\sin \alpha\right) = \alpha$.

Tedy

$$\alpha = \arcsin \frac{h}{r}\,.$$

Pro výpočet velikosti úhlu β použijeme Snellův zákon pro lom světla

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n\,.$$

Relativní index lomu světla n je poměr rychlostí šíření světla v 1. a 2. prostředí. Z tohoto vztahu vyjádříme $\sin \beta$.

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$$

Za $\sin \alpha$ dosadíme h/r a opět použijeme inverzní funkci arkus sinus:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{h}{rn} \\ \arcsin\left(\sin \beta\right) &= \arcsin\left(\frac{h}{rn}\right) \\ \beta &= \arcsin\left(\frac{h}{rn}\right)\,. \end{aligned}$$

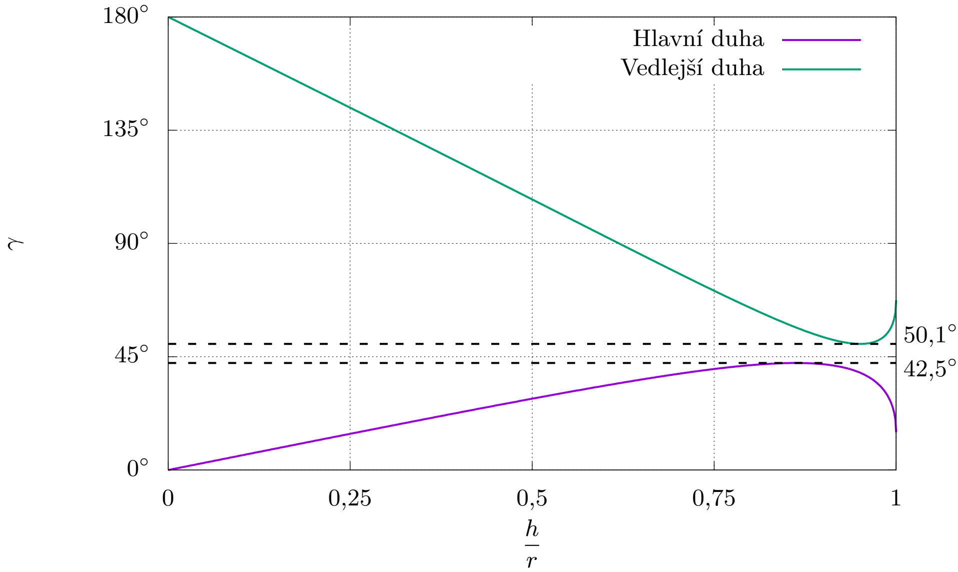
Teď dosadíme velikosti úhlů α a β do našeho původního vzorce pro velikost úhlu γ

$$\begin{aligned} \gamma &= 4\beta - 2\alpha \\ \gamma &= 4\arcsin\left(\frac{h}{rn}\right) - 2\arcsin\left(\frac{h}{r}\right)\,. \end{aligned}$$

Pokud si tuto funkci vykreslíme jako závislost úhlu γ na h (viz obr. 3, zjistíme, že má jedno maximum, jehož polohu můžeme určit podle vzorce

$$\gamma_0 = 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}}{n}\right) - 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right),$$

kde úhel γ závisí pouze na indexu lomu n. Pro naše podmínky platí, že relativní index lomu vody je $n \approx 1,33$, tedy maximum této funkce má hodnotu $\gamma_0 \doteq 42,5^\circ$. Proč nás však zajímá maximum funkce? Z dalších vlastností světla, které jsou nad rámec tohoto Výfučtení, víme, že největší intenzita světla se odrazí právě do těchto extrémních úhlů, tedy to jsou ty úhly, pod kterými duhu vidíme.



Obr. 3: Závislost úhlu γ na poměru h/r pro primární a sekundární duhu

Sekundární duha

V předchozím úseku jsme vypočítali duhu pro případ, že se paprsek uvnitř kapky odrazí jednou. Pokud se paprsek uvnitř kapky odrazí dvakrát, vzniká takzvaná sekundární duha. V tomto případě by závislost úhlu na vzdálenosti h měla naopak minimum, a to přibližně pro úhel 51°. Sekundární duha tedy vzniká vně primární duhy a často ji můžeme na obloze taktéž pozorovat. Při jejím pozorování si můžete všimnout, že červená barva je tentokrát nejníže, nikoliv nejvýš. To je dáno právě tím, že se jedná o minimum funkce, a ne o maximum jako u primární duhy. Jelikož paprsky po jednom vnitřním odrazu se odrážejí uvnitř primární duhy a paprsku po dvou odrazech vně sekundární duhy, je prostor mezi duhami viditelně tmavší. Jistě vás teď napadne, jestli budou existovat i další duhy, když se paprsek uvnitř kapky odrazí vícekrát. Tyto duhy skutečně mohou existovat, ale jsou zpravidla příliš málo jasné na to, aby byly viditelné. Duha se třemi odrazy by se pak navíc ukazovala kolem slunce.

Halové jevy

Kromě vodních kapiček se v atmosféře běžně vyskytují také ledové krystalky. Odraz na nich není tak jednoduchý, jako na kapičkách vody, protože ledové krystalky nejsou sféricky symetrické, závisí tedy na jejich tvaru a orientaci. Ledové krystalky mívají obvykle tvar šestibokých hranolů, světlo tak může vstoupit a vystoupit buď některou ze stěn, nebo jednou z podstav. Který ze způsobů lomu paprsku se konkrétně odehraje záleží na orientaci krystalu i na jeho tvaru (například na výšce hranolu). Protože těchto možností je mnoho, je mnoho i možných tvarů a poloh halových jevů, z nichž u některých se objevuje celé barevné spektrum, jiné se projevují jen jako bílé pruhy. Mezi nejběžnější halové jevy patří malé halo, které má podobu bílého kruhu

Obr. 4: Dvojitá duha

ve vzdálenosti 22° od Slunce, velké halo ve vzdálenosti 46° od Slunce nebo boční Slunce na stranách ve stejné vzdálenosti, jako malé halo. Celkový přehled halových jevů můžete nalézt například na webu.[3]

Vojtěch Kubrycht
`kubrycht@vyfuk.mff.cuni.cz`

Kateřina Rosická
`kackar@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

[3] `http://ukazy.astro.cz/halo-seznam.php`