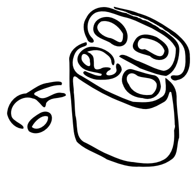
Úloha II.5 ... Bezdrátová sluchátka

7 bodů; průměr 4,94; řešilo 16 studentů



Viktor si koupil nová bezdrátová sluchátka. Výrobce uvádí, že při maximální hlasitosti bude sluchátko hrát v typické vzdálenosti $l = 0{,}01\,\mathrm{m}$ od ušního bubínku s hladinou intenzity $L_\mathrm{I} = 105\,\mathrm{dB}$.
Nápověda: Hladinu intenzity definujeme jako:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}\,,$$

kde I je intenzita zvuku, $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$ odpovídá přibližně intenzitě nejslabšího zvuku, který jsme schopni slyšet, (s hladinou intenzity $0\,\mathrm{dB}$) a $\log x$ je funkce logaritmus.

1. *Jaký bude akustický výkon sluchátka při maximální hlasitosti?*

2. *Jaký bude podíl energie využité na reprodukování hudby a celkové energie akumulátoru, jestliže sluchátko dokáže hrát na jedno nabití $t = 4\,\mathrm{h}$? Sluchátko má v sobě zabudovaný akumulátor s napětím $U = 3{,}7\,\mathrm{V}$ a nábojem $Q = 40\,\mathrm{mAh}$.*

3. *Viktor ztratil sluchátko někde na louce, která je $a = 350\,\mathrm{m}$ dlouhá a $b = 200\,\mathrm{m}$ široká. Jaká je pravděpodobnost, že Viktor stojící uprostřed louky sluchátko po zapnutí na maximální hlasitost uslyší, jestliže hladina intenzity zvuku ze sluchátka by musela být u Viktora alespoň $45\,\mathrm{dB}$?*

Sluchátka můžeme aproximovat bodovým všesměrovým zdrojem.

Známe hladinu intenzity sluchátek ve vzdálenosti l od ušního bubínku. Ta odpovídá nějaké intenzitě I, kterou můžeme spočítat podle vzorce, který se objevil v zadání. Zatím nebudeme do vzorce dosazovat konkrétní hodnoty, pouze si pomocí základních operací s logaritmy vyjádříme ze vzorce I.

$$\begin{aligned}
L_1 &= 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}\,,\\
\frac{L_1}{10} &= \log \frac{I}{I_0}\,,\\
10^{\frac{L_1}{10}} &= 10^{\log \frac{I}{I_0}}\,,\\
10^{\frac{L_1}{10}} &= \frac{I}{I_0}\,,\\
I &= I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10}}\,.
\end{aligned}$$

Potom už bude stačit vynásobit intenzitu I plochou S, do které se v této vzdálenosti zvuk sluchátek rozprostírá, a dostaneme hledaný akustický výkon P. Pro plochu S použijeme standardní vzorec pro povrch koule (v tomto případě o poloměru $r = l$).

$$P = S \cdot I = 4\pi r^2 \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10}}\,.$$

Jelikož nás zajímá číselný výsledek, musíme ještě do výsledného vzorce dosadit konkrétní hodnoty ze zadání:

$$P = 4\pi l^2 \cdot I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10}} = 4\pi \cdot (0{,}01\,\mathrm{m})^2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}} \cdot 10^{\frac{105\,\mathrm{dB}}{10}} \doteq 3{,}97 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W}\,.$$

Sluchátka tedy budou mít při maximální hlasitosti akustický výkon jen přibližně $4 \cdot 10^{-5}$W.

V druhé části úlohy chceme spočítat podíl mechanické energie zvuku E_m a elektrické energie akumulátoru E_e. Mechanickou energii zvuku zjistíme jako součin výkonu P, který jsme právě spočítali, a času t, po který zvládla sluchátka hrát na maximální hlasitost.

$$E_\mathrm{m} = P \cdot t\,.$$

V akumulátoru je energie uchována ve formě práce, kterou vykoná elektrické pole při přesunu náboje Q mezi místy s různými potenciály. Jelikož je napětí rovno rozdílu potenciálů, máme:

$$E_\mathrm{e} = U \cdot Q\,.$$

Musíme si ale dát pozor na jednotky. Naštěstí je náboj zadán v miliapérhodinách a čas v hodinách, takže se nám hodiny hezky vykrátí a bude stačit převést miliampéry na ampéry.

Zbývá vyjádřit výsledný poměr (rovnou dosadíme i konkrétní hodnoty ze zadání). Při dosazování konkrétních hodnot nezapomeneme za P dosadit přesnou nezaokrouhlenou hodnotu, kterou jsme získali v první části úlohy.

$$\frac{E_\mathrm{m}}{E_\mathrm{e}} = \frac{P \cdot t}{U \cdot Q} \doteq \frac{3{,}97 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W} \cdot 4\,\mathrm{h}}{3{,}7\,\mathrm{V} \cdot 40 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Ah}} \doteq 1{,}07 \cdot 10^{-3}\,.$$

Na mechanickou energii zvuku se tedy přemění jen asi desetina procenta energie uložené v akumulátoru.

Při řešení poslední části úlohy si více přiblížíme fungování logaritmických veličin, mezi které lze zařadit právě hladinu intenzity zvuku L. Hrají-li sluchátka ve vzdálenosti l s hladinou intenzity $L_1 = 105\,\mathrm{dB}$ a Viktor zvládne registrovat alespoň $L_2 = 45\,\mathrm{dB}$, znamená to, že je uslyší ještě na tisícinásobek vzdálenosti l. Proč? Mezi 45 dB a 105 dB je rozdíl 60 dB. Každých 10 dB znamená desetinásobný rozdíl intenzity zvuku. To znamená, že Viktor sluchátka uslyší ještě ve vzdálenosti, v níž bude mít zvuk milionkrát nižší intenzitu než ve vzdálenosti l. Intenzita ovšem klesá s druhou mocninou vzdálenosti, takže vzdálenost, ve které je hladina intenzity rovná L_2, nebude milionkrát větší než je l, ale jen tisíckrát větší ($\sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$). Tisícinásobek jednoho centimetru je deset metrů, pokud tedy označíme tuto vzdálenost l', máme $l' = 10\,\mathrm{m}$.

Mohli bychom postupovat i více „matematicky“ (tento přístup je s předchozím samozřejmě ekvivalentní) a využít základních pravidel pro počítání s logaritmy:

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y, \qquad \log\left(x^2\right) = 2 \log x\,.$$

Přejděme nyní k výpočtu. Známe hladinu intenzity L_1 pro vzdálenost l a chceme spočítat vzdálenost l', při které je hladina intenzity $L_2 = 45\,\mathrm{dB}$. Navíc víme, že intenzita zvuku klesá s druhou mocninou vzdálenosti, pro poměr intenzit tedy máme:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{l'}{l}\right)^2.$$

Tento poměr nyní dále využijeme k vyřešení úlohy. Všimněme si, že pokud vypočítáme rozdíl $L_1 - L_2$, tak dostaneme:

$$L_1 - L_2 = 10 \cdot \left(\log \frac{I_1}{I_0} - \log \frac{I_2}{I_0}\right) = 10 \log \left(\frac{\frac{I_1}{I_0}}{\frac{I_2}{I_0}}\right) = 10 \log \frac{I_1}{I_2}\,.$$

Z předchozího pak máme:

$$L_1 - L_2 = 10 \log \left(\frac{l'}{l}\right)^2 = 20 \log \frac{l'}{l}\,,$$

kde jsme využili obě zmíněná pravidla pro počítání s logaritmy. Z tohoto vztahu nyní stačí jen vyjádřit l' a dostaneme stejný výsledek, jako jsme dostali „méně matematickou“ úvahou, tedy:

$$l' = l \cdot 10^{\frac{L_1 - L_2}{20}} = 10\,\mathrm{m}\,.$$

Pravděpodobnost p, že Viktor uslyší uprostřed louky sluchátko, které se může nacházet kdekoliv, je potom rovna podílu ploch kruhu s poloměrem l' a plochy louky $a \cdot b$.

$$p = \frac{\pi r^2}{a \cdot b} = \frac{\pi (10\,\mathrm{m})^2}{350\,\mathrm{m} \cdot 200\,\mathrm{m}} = \frac{1}{700}\pi \doteq 4{,}49 \cdot 10^{-3}\,.$$

Viktor tedy sluchátko uslyší s pravděpodobností menší než půl procenta. Dobrou zprávou je, že v nejhorším případě mu k jeho nalezení bude stačit prohledat louku po pásech širokých $2 \cdot l' = 20\,\mathrm{m}$. To by znamenalo nachodit skoro $4\,\mathrm{km}$.

Viktor Materna
`materna@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.