Úloha II.4 ... Stav beztíže

6 bodů; průměr 4,73; řešilo 22 studentů

Jirka se vydal na večerní procházku s přáteli. V průběhu večera si všiml, že přes oblohu přeletěla Mezinárodní vesmírná stanice (ISS). Jeden z kamarádů se jej zeptal, jak vysoko nad povrchem ISS obíhá. Jirka si však výšku nepamatuje a on, ani žádný z jeho přátel, nemají signál, proto si údaj nemohou vyhledat na internetu. Rozhodl se tedy, že výšku h ISS nad povrchem spočítá. Pozoroval proto noční oblohu a na hodinkách změřil, že další přelet ISS nastal o $T = 93\,\mathrm{min}$ později. Dále si vzpomněl, že poloměr Země je $R = 6\,378\,\mathrm{km}$ a gravitační zrychlení na povrchu je $a_\mathrm{g} = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Spočítejte, stejně jako Jirka, výšku ISS nad zemským povrchem s využitím pouze těchto tří údajů, když víte, že dvě tělesa o hmotnostech m a M, ve vzájemné vzdálenosti r na sebe působí gravitační silou o velikosti:

$$F_\mathrm{g} = \frac{GMm}{r^2}\,,$$

kde G je konstanta, jejíž číselnou hodnotu si Jirka rovněž nepamatuje.

Nejdříve se zamysleme nad tím, z jakého vztahu by bylo možné výšku ISS nad povrchem vyjádřit. Využít můžeme toho, že na této výšce bude určitě záviset velikost gravitační síly, která na ISS působí. Dále víme, že gravitační síla drží ISS na kruhové dráze. Hraje tedy roli dostředivé síly, pro kterou platí vztah:

$$F_\mathrm{d} = \frac{mv^2}{r}\,,$$

kde m je hmotnost tohoto tělesa a v jeho rychlost.

Gravitační sílu mezi Zemí a stanicí můžeme určit pomocí vztahu ze zadání. Označme si h výšku ISS nad povrchem a m_S její hmotnost. Celková vzdálenost ISS od středu Země je poté $R+h$ a vztah pro gravitační sílu tedy bude mít tvar

$$F_\mathrm{g} = \frac{Gm_\mathrm{S}M}{(R+h)^2}\,,$$

kde používáme stejné značení jako v zadání.

Nyní můžeme, jak jsme již naznačili dříve, využít toho, že gravitační síla v této úloze odpovídá dostředivé síle, čímž dostáváme rovnici

$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{g}\,,$$

$$\frac{m_\mathrm{S}v^2}{r} = \frac{Gm_\mathrm{S}M}{(R+h)^2}\,. \tag{1}$$

Prvně si všimněme, že se nám zkrátí hmotnost stanice, což je velmi důležité, neboť ta není v zadání uvedena. Následně je také důležité si uvědomit, že v této rovnici, z níž chceme nakonec vyjádřit h, ještě neznáme tři další veličiny – rychlost stanice v, poloměr dráhy r, po které obíhá Země, a součin gravitační konstanty a hmotnosti Země GM (místo jejich součinu bychom též samozřejmě mohli uvažovat každou veličinu zvlášť, ale jak se za chvíli ukáže, zvolený přístup je výhodnější).

Začněme od nejjednodušší otázky. Jaký je poloměr dráhy, po které stanice obíhá? Z jednoduché představy dojdeme k tomu, že se opět jedná o vzdálenost mezi středem Země a ISS, tedy $r = R + h$.

O nepříliš těžší je určení rychlosti stanice v. Stačí nám využít základní vztah $v = s/t$. Z Jirkova pozorování víme, že celou planetu stanice oběhla za čas T. Již víme, že obíhá po kružnici o poloměru $r = R + h$, tím pádem je uražená vzdálenost $s = 2\pi(R + h)$. Rychlost je tedy

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi(R+h)}{T}\,.$$

Nyní nám již jen zbývá určit součin GM. K tomu využijeme poslední zadaný údaj, kterým je gravitační zrychlení na povrchu Země a_g. To totiž můžeme s využitím druhého Newtonova zákona a vztahu pro gravitační sílu vypočítat jako

$$a_\mathrm{g} = \frac{F_\mathrm{g}}{m} = \frac{GM}{R^2}$$

a z této rovnice již můžeme vyjádřit hledaný součin GM:

$$GM = a_\mathrm{g} R^2\,.$$

V tuto chvíli nám již jen zbývá vše dosadit do rovnice (1) a poté vyjádřit výšku h:

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{r} &= \frac{GM}{(R+h)^2}\\ \frac{4\pi^2(R+h)^2}{T^2(R+h)} &= \frac{a_\mathrm{g}R^2}{(R+h)^2}\,.\end{aligned}$$

Výšku h je nyní nejjednodušší vyjádřit tak, že nejprve vyjádříme $(R + h)$ a následně odečteme R, čímž získáme výsledný vztah pro výšku h:

$$h = \sqrt[3]{\frac{a_\mathrm{g}R^2T^2}{4\pi^2}} - R\,.$$

Po dosazení číselných hodnot ze zadání dostáváme tedy výsledek $h \doteq 4{,}22 \cdot 10^5\,\mathrm{m} = 422\,\mathrm{km}$, což velmi dobře odpovídá skutečnosti, neboť ISS obvykle obíhá Zemi ve výšce 418 až 422 km.

Zajímavost

Za povšimnutí také stojí, že v průběhu řešení této úlohy jsme v podstatě odvodili třetí Keplerův zákon pro kruhový pohyb. Pokud dosadíme do rovnice (1) odvozené vztahy pro rychlost v a poloměr r, ale již nedosadíme za součin GM a následně provedeme několik úprav, dostaneme právě jednu z podob třetího Keplerova zákona

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM}\,. \qquad (2)$$

Dostat se z tohoto tvaru na více známou podobu

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3}$$

již jen vyžaduje uvědomit si, že výraz na pravé straně rovnice (2) je stejný pro všechna tělesa obíhající dané těleso (v našem případě Zemi), a tak se musí i pro libovolná dvě obíhající tělesa rovnat jejich levé strany, neboli:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^2}\,.$$

Z toho, že jsme v průběhu řešení úlohy tento zákon odvodili, také vyplývá, že jsme si jeho použitím mohli výpočty značně zjednodušit. Jeho užitím bychom ale zároveň přišli o velkou část chápání toho, o co v úloze vlastně jde. Také vzhledem k tomu, co vše Jirka zapomněl, je těžké věřit tomu, že by si vzpomněl zrovna na potřebnou podobu třetího Keplerova zákona.

Aleš Opl
ales@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.