Úloha I.V ... Energetická všehochuť

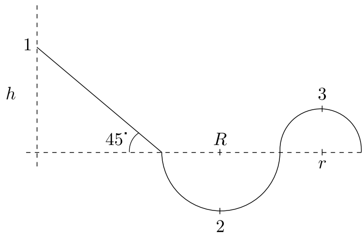
7 bodů; (chybí statistiky)

1. *Jirka se rozhodl jít na horskou dráhu, kterou si můžeme schematicky rozdělit na tři části: nakloněnou rovinu pod úhlem 45 ° vysokou h a dvě půlkružnice s poloměry R a r, viz obrázek. Do vozíku nasedl v bodě 1 a vyrazil s nulovou počáteční rychlostí.*

   (a) *Jaká bude Jirkova rychlost v bodě 2?*

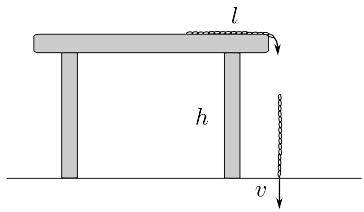
   (b) *Co musí platit pro r, aby se vozík mohl dostat do bodu 3?*

   Celková hmotnost vozíku a Jirky je m, vozík není nijak poháněn a v průběhu jízdy se nikdy neoddělí od kolejnic. Tření a odporové síly zanedbejte.



Obr. 1: Vozík na horské dráze

2. *Řetízek délky l se nachází v klidu na hraně stolu vysokého h. Jeden konec řetízku posuneme za hranu stolu tak, že řetízek začne bez tření klouzat dolů. Jaká bude rychlost spodního konce řetízku, když se zrovna dotkne země? Všechny odporové síly zanedbejte.*



Obr. 2: Řetízek na stole

3. *Klasické žárovky mají nízkou efektivitu a většinu své energie přeměňují na teplo, zbytek na světlo. Taková žárovka s účinností $4\,\%$ se nachází v místnosti o rozměrech $5\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$. Do žárovky přichází proud o velikosti $250\,\mathrm{mA}$ a efektivní napětí $240\,\mathrm{V}$.*

   (a) *Jakým výkonem je ohřívána místnost (tedy kolik tepla je místnosti předáno každou sekundu), jestliže je žárovka v tepelné rovnováze a veškeré světlo uniká z místnosti okny a žádnou energii jí nepředává?*

   (b) *Za jak dlouho se vzduch v místnosti ohřeje o $10\,^\circ\mathrm{C}$? Hustota vzduchu je $1{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a měrná tepelná kapacita vzduchu při konstantním objemu (což je náš případ) je $720\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. Předpokládejte, že stěny se neohřívají.*

(c) *Kolik kilogramů černého uhlí bychom museli spálit, aby došlo ke stejné změně teploty? Výhřevnost černého uhlí je* $26\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$.

1. (a) Při pohybu vozíku zanedbáváme veškeré tření, proto se zachovává jeho mechanická energie. Vozík vyráží z bodu 1 s nulovou počáteční rychlostí (a tedy i nulovou kinetickou energií) a na své cestě do bodu 2 celkově klesne o výšku $R + h$. Ztratí tedy potenciální energii o velikosti:

$$E_\mathrm{p} = mg(R + h)\,.$$

Veškerá tato energie se pak přemění na kinetickou energii. Odtud spočítáme výslednou rychlost v bodě 2 jako:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(R + h)\,,$$
$$v = \sqrt{2g(R + h)}\,.$$

Všimněme si, že výsledek nezávisí na hmotnosti vozíku. To je typická vlastnost pohybů v tíhovém poli bez tření.

(b) Fakt, že se mechanická energie zachovává, nám dá zajímavý výsledek – když se těleso při pohybech v tíhovém poli (bez působení jakýchkoli dalších sil) vrátí zpět do původní výšky, tak má stejnou kinetickou energii jako na začátku pohybu. Tento výsledek je zřejmý. Stačí si uvědomit, že ve stejné výšce má těleso i stejnou potenciální energii, proto se žádná energie nemohla přeměnit na kinetickou.

Použijme nyní tento výsledek k vyřešení naší úlohy. Vidíme, že pokud se bod 3 nachází níže než bod 1, tak v něm má vozík vždy nenulovou kinetickou energii, a do bodu 3 se tedy může bez problémů dostat. To, že v průběhu pohybu klesne do bodu 2, nic neovlivní, neboť energie uvolněná při klesání do bodu 2 je následně spotřebována na stoupání. Vozík takto zřejmě dokáže vystoupat až na úroveň bodu 1, pro polohu bodu 3 tedy musí platit:

$$r \leq h\,.$$

Do větších výšek se vozík dostat nedokáže, protože začíná s nulovou počáteční rychlostí a není nijak poháněn, nemá tedy k dispozici žádnou dodatečnou energii, která by ho do větších výšek dokázala dopravit.

2. Použijeme podobný postup jako v předchozí úloze, jen musíme věnovat větší pozornost výpočtu potenciální energie řetízku. Víme, že potenciální energii vypočítáme jako:

$$E_\mathrm{p} = mgy\,,$$

kde y je výška nad nějakou nulovou hladinou, kterou si sami zvolíme (v našem příkladě volíme jako nulovou hladinu zem). Hmotnost řetízku je rovnoměrně rozložena podél celé jeho délky, proto není správné uvažovat, že změna potenciální energie v okamžiku, kdy se první konec zrovna dotkne země, je

$$\Delta E_\mathrm{p} = mgh\,,$$

protože zatímco jeden konec skutečně klesl o výšku h, druhý konec klesl pouze o $h - l$. Místo toho tedy řekneme, že oba konce se přesunuly *průměrně* o $h - l/2$. Díky tomu, že je řetízek mezi konci rozložen rovnoměrně, můžeme tento argument použít na každé dva body, které jsou položeny symetricky vůči středu řetízku, a zjistíme, že celý řetízek průměrně klesl o $h - l/2$.

Co však rozumíme tím *průměrně*? Slovo průměrně zde má stejný význam, jako kdybychom řekli, že se *těžiště* řetízku přesune o $h - l/2$. Dá se ukázat, že tento zákon má obecnou platnost – pro těleso libovolného tvaru platí, že při pohybech v tíhovém poli je změna jeho potenciální energie rovna:

$$\Delta E_\mathrm{p} = mgy_\mathrm{T}\,,$$

kde y_T je změna výšky těžiště. Když tento zákon aplikujeme na náš příklad, tak dostaneme, že rychlost řetízku těsně před dopadem na zem je rovna:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(h - \frac{l}{2}\right)\,,$$

$$v = \sqrt{g(2h - l)}\,.$$

3. (a) Prostřednictvím elektrického proudu dodáváme žárovce výkon o velikosti:

$$P_0 = U \cdot I\,,$$

přičemž víme, že $\eta = 4\,\% = 0{,}04$ z dodaného výkonu se přemění na světlo. Místnost je proto ohřívána výkonem:

$$P = (1 - \eta)UI = 58\,\mathrm{W}\,.$$

(b) Na ohřev musíme vzduchu dodat teplo o velikosti:

$$Q = mc\Delta T = \rho V c\Delta T\,,$$

kde $m = \rho V$ je celková hmotnost vzduchu. Toto teplo dodáváme výkonem P, celé ohřívání tedy zabere dobu:

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{\rho V c\Delta T}{(1 - \eta)UI} = 12\,200\mathrm{s} \doteq 3{,}4\,\mathrm{h}\,.$$

(c) Výhřevnost vyjadřuje, kolik tepla se uvolní při spálení 1 kilogramu dané látky, neboli:

$$Q = Hm\,,$$

kde H je výhřevnost. Na dodání tepla Q z předchozí úlohy tedy musíme spálit uhlí o hmotnosti:

$$m = \frac{Q}{H} = 27\,\mathrm{g}\,.$$

Václav Verner
vasek@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.