Úloha I.5 ... Letadlová

7 bodů; (chybí statistiky)

Letadlo stoupá pod úhlem 3° tak, aby se dostalo do požadované výšky $h = 10\,972\,\mathrm{m}$. Pokud u toho zrychluje se zrychlením $a = 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}{\cdot}min^{-1}}$ z $v_0 = 300\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ na $v_{\mathrm{max}} = 880\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, za jak dlouho dosáhne požadované výšky h a za jak dlouho rychlosti v_{max}? Za jak dlouho by to bylo se stoupáním pod úhly 2° a 4°? Mění se pak čas pro tyto různé případy lineárně, nebo ne? A proč?

Letadlo se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem, proto čas, za který dosáhne maximální rychlosti, určíme jednoduše jako:

$$t_{\mathrm{max}} = \frac{v_{\mathrm{max}} - v_0}{a}\,.$$

Před dosazením číselných hodnot si ještě musíme rozmyslet, jak si poradit s jednotkami. Všimněme si, že když rychlosti i zrychlení ponecháme v zadaných jednotkách, vyjde výsledný čas v minutách:

$$t_{\mathrm{max}} = \frac{880 - 300}{20}\,\frac{\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}{\mathrm{km{\cdot}h^{-1}{\cdot}min^{-1}}} = 29\,\mathrm{min}\,.$$

Další výpočet je již o něco komplikovanější. Pohyb letadla si rozdělíme na dvě části. V první části se letadlo pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a, dokud nedosáhne rychlosti v_{max}, a v druhé části už pokračuje v letu konstantní rychlostí v_{max}. Přitom však bohužel nevíme, jestli se do výšky h dostane před dosažením maximální rychlosti, nebo až poté.

Zvolíme proto následující postup: nejprve budeme předpokládat, že pohyb letadla je rovnoměrně zrychlený po celou dobu stoupání, a vypočítáme pro toto stoupání čas letu. Pokud nám vyjde čas menší než t_{max}, tak jsme hotovi, neboť letadlo v průběhu stoupání ještě nedosáhlo maximální rychlosti a pohyb byl proto skutečně v průběhu stoupání rovnoměrně zrychlený. Schématicky je tato možnost znázorněna na grafu 1.

Na druhou stranu, pokud by nám vyšel větší čas, tak by to znamenalo, že je náš předpoklad chybný a letadlo dosáhne maximální rychlosti již v průběhu stoupání, viz graf 2.

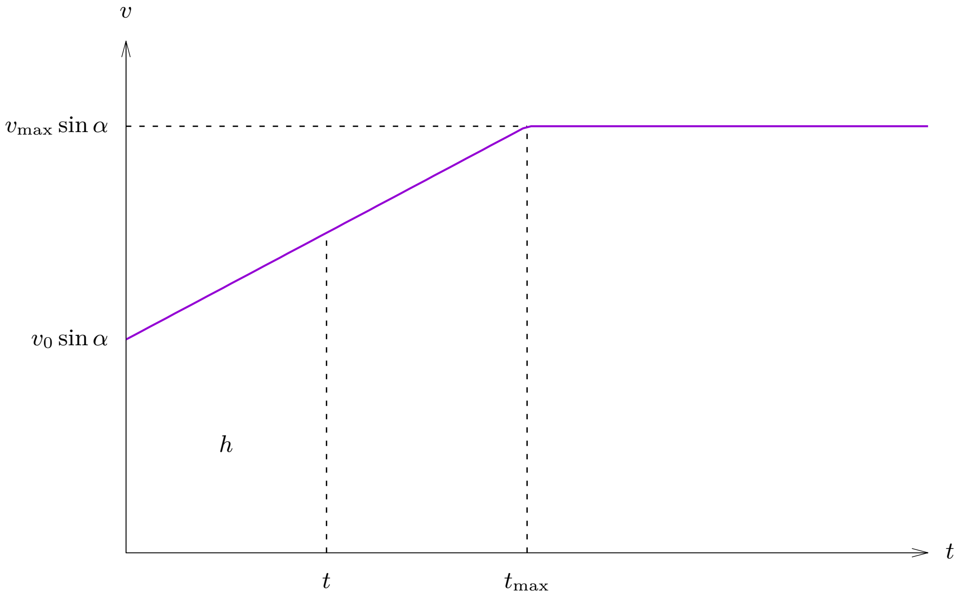
Pak budeme muset náš vypočet změnit a napřed spočítat výšku h_0, do které se dostane při zrychlování, a poté počítat, že zbývající část výškového rozdílu $h - h_0$ se pohybuje rovnoměrně, a dobu tohoto pohybu přičíst k t_{max}.

Přejděme nyní k výpočtům. Letadlo se pohybuje rychlostí v, nás však zajímá pouze jak rychle stoupá. Chceme tedy svislou složku tohoto pohybu, tu vypočítáme pomocí *goniometrické funkce* sinus jako:

$$v' = v \cdot \sin\alpha\,,$$

kde α je úhel stoupání. Svislá složka rychlosti je urychlována svislou složkou zrychlení a':

$$a' = a \cdot \sin\alpha\,.$$



Obr. 1: Graf znázorňuje závislost svislé složky rychlosti letadla na čase, plocha pod tímto grafem pak vyjadřuje změnu výšky. V této možnosti uvažujeme, že se letadlo dostane do výšky h ještě před dosažením maximální rychlosti.

Z toho spočítáme dobu letu pro rovnoměrně zrychlený pohyb (na základě našich předchozích úvah). Pro dráhu zrychleného pohybu s nenulovou počáteční rychlostí platí:

$$h = v_0' t + \frac{1}{2} a' t^2 \,,$$

$$h = v_0 \sin \alpha \cdot t + \frac{1}{2} a \sin \alpha \cdot t^2 \,,$$

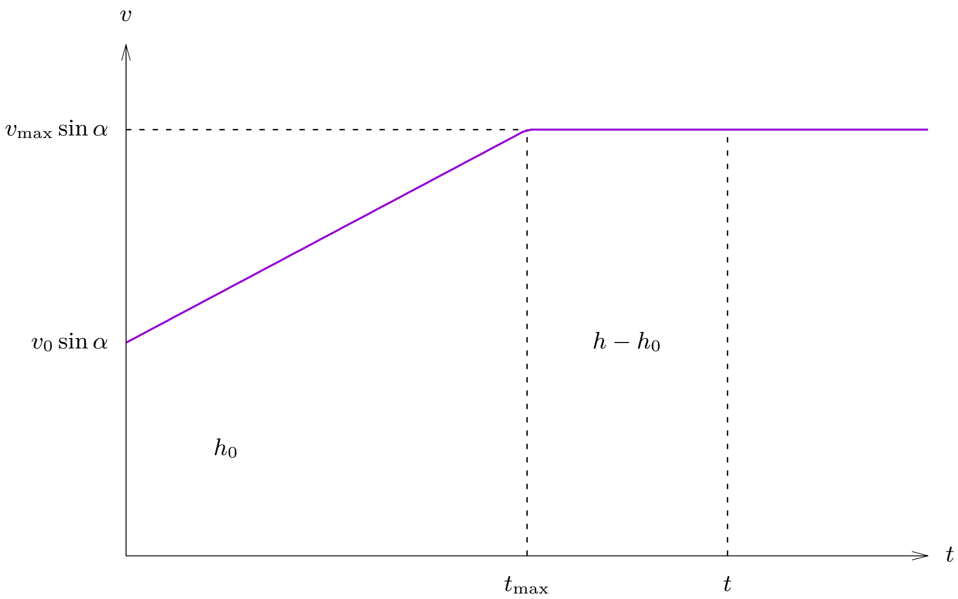
$$0 = t^2 + \frac{2v_0}{a} t - \frac{2h}{a \sin \alpha} \,.$$

Vidíme, že se jedná o kvadratickou rovnici (chceme vypočítat čas t):

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \,.$$

Vyřešíme ji klasickým postupem, napřed spočítáme diskriminant:

$$D = B^2 - 4A\,C = \frac{4v_0^2}{a^2} + 4 \cdot \frac{2h}{a \sin \alpha} \,.$$



Obr. 2: Graf znázorňuje případ, kdy letadlo dosáhne maximální rychlosti (v čase $t_{\max}$) ještě před vystoupáním do výšky h. Zbytek cesty proto urazí rovnoměrným pohybem.

Řešení této rovnice je pak dáno (zajímá nás pouze kladné řešení, protože záporný čas zde nemá fyzikální význam):

$$t = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A}\,,$$

$$t = -\frac{v_0}{a} + \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} + \frac{2h}{a \sin \alpha}}\,.$$

Tentokrát již nemůžeme vše nechat v zadaných jednotkách. Je výhodnější pracovat v kilometrech a hodinách (protože pak nemusíme převádět rychlost), proto h a a převedeme na:

$$h = 10{,}972\,\mathrm{km} \qquad\qquad a = 1\,200\,\mathrm{km \cdot h^{-2}}\,.$$

Teď už můžeme všechny hodnoty dosadit do našeho vztahu pro t a vypočítat časy postupně pro všechny úhly stoupání:

$$t(2^\circ) = 30{,}1\,\mathrm{min}\,,$$

$$t(3^\circ) = 23{,}5\,\mathrm{min}\,,$$

$$t(4^\circ) = 19{,}2\,\mathrm{min}\,.$$

Pro úhly 3° a 4° jsme dostali menší čas než $t_{\max} = 29\,\mathrm{min}$, takže pro ně už další výpočty provádět nemusíme. Pro 2° však musíme čas vypočítat znovu. Na základě našeho postupu tedy spočítáme napřed výšku, do které se letadlo dostane před dosažením v_{max}. Použijeme k tomu stejnou rovnici pro rovnoměrně zrychlený pohyb:

$$h_0 = v_0 \sin\alpha \cdot t_{\mathrm{max}} + \frac{1}{2} a \sin\alpha \cdot t_{\mathrm{max}}^2 \,.$$

Zbývající část letu je již rovnoměrný pohyb rychlostí v_{max}, přičemž nás stále zajímá pouze její svislá složka. Čas tohoto pohybu je:

$$\tau = \frac{h - h_0}{v_{\mathrm{max}} \sin\alpha} \,,$$

z čehož získáme výsledný čas tím, že k τ přičteme t_{max} (doba první části letu):

$$\begin{aligned} t(2^\circ) &= \tau + t_{\mathrm{max}} \,, \\ t(2^\circ) &= t_{\mathrm{max}} + \frac{h}{v_{\mathrm{max}} \sin\alpha} - \frac{v_0}{v_{\mathrm{max}}} t_{\mathrm{max}} - \frac{a t_{\mathrm{max}}^2}{2 v_{\mathrm{max}}} \,, \\ t(2^\circ) &= 31{,}0\,\mathrm{min} \,. \end{aligned}$$

Opět jsme dosadili číselné hodnoty vyjádřené v kilometrech a hodinách. Doby letu pro jednotlivé úhly stoupání vyšly: 19,2 min, 23,5 min a 31,0 min. Z výpočtů a výsledků vidíme, že se čas letu v závislosti na úhlu rozhodně lineárně nemění.

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.