Úloha VI.5 ... Kuličková dráha

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček si koupil novou kuličkovou dráhu, jejíž jednotlivé dílky byly spojené kolejemi. Občas se mu ale stalo, že na vodorovných kolejích se kuličky v důsledku působení tření zastavily, přestože si myslel, že by se to stávat nemělo. Jak to tedy vlastně s tímto problémem je?

Nejdříve si musíme ujasnit to, že na kuličky tření stále působí. I když je třecí plocha mezi kolejí a kuličkou velmi malá, je pro samotný proces kutálení naprosto zásadní. Kdyby nám kuličky o kolej netřely, mohly by klidně projet celou kuličkovou dráhu bez toho, aby se otáčely – jely by jako kvádr po nakloněné plošině! Toto tření je ale pro zastavování kuliček zanedbatelné – mnohem více nám naše kuličky bude zastavovat tzv. valivý odpor. To je veličina, která nám v závislosti na materiálech povrchu kuličky i koleje a průměru tělesa řekne, jaká síla působí proti pohybu kuličky. Můžeme ji spočítat jako:

$$F_\mathrm{v} = \frac{F_n \cdot e}{r}\,,$$

kde F_v je náš valivý odpor, F_n normálová síla (na vodorovné koleji shodná s gravitační silou, jinak je to ale síla působící v kolmém směru na kolej – vzniká při vektorovém rozkladu gravitační síly na posuvnou a právě normálovou), e je tzv. rameno valivého odporu, které je analogem koeficientu tření u třecí síly (je to experimentálně změřená hodnota závislá na vnitřním tření materiálu, tuhosti a struktuře povrchu[1]) a r je v tomto vzorci poloměr našeho tělesa – naší kuličky.

Pokud již tedy víme, jak valivý odpor funguje, můžeme si s ním zkusit něco vypočítat.

1. *Mějme kuličku o poloměru $1\,\mathrm{cm}$ a vodorovnou kolej o délce x. Kolej má rozpětí kolejnic $9\,\mathrm{mm}$. Pokud je kulička ocelová (má hustotu $7\,850\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$) a kolej také (s ramenem valivého odporu o hodnotě $0{,}005\,\mathrm{mm}$), jak daleko dojede kulička (jak dlouhé je x), pokud ji na tuto vodorovnou dráhu vypustíme rychlostí $v_0 = 10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$? Kuličku vypustíme tak, že má rychlost v_0, ale zpočátku se neotáčí.*

   Bonus: Jak dlouho bude trvat kuličce, než se zastaví? Pro výpočet tohoto času budeme muset uvažovat nejen translační, ale i rotační energii kuličky.

   Nápověda: Kdyby kulička neměla rotační energii, jednalo by se o jednoduchou úlohu. Pokud se pořádně zamyslíte nad tvarem energie kuličky, přijdete však na to, že se dá upravit. Tím můžete vysvětlit, jak rotační energie ovlivní pohyb kuličky.

2. *Jaké nejmenší klesání musí mít lineární trať pro stejnou kuličku na stejné koleji jako v otázce 1, aby její rychlost vzniklá klesáním překonala valivý odpor, který bude kuličku zpomalovat?*

1. Podívejme se nejdříve na to, jakými způsoby můžeme tento příklad spočítat. Jedním ze způsobů je, že budeme počítat s energií kuličky. Jak píšeme v zadání, kulička začíná pouze s kinetickou energií (hmotnost kuličky získáme díky tomu, že známe vzorec pro výpočet objemu koule s využitím znalosti jejího poloměru) o velikosti:

$$E_\mathrm{k} = m\frac{v^2}{2} = \left(\frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}01^3\right) \cdot 7\ 850 \cdot \frac{\left(\frac{10}{3{,}6}\right)^2}{2}\ \mathrm{J} \doteq 0{,}126\,86\,\mathrm{J}\,.$$

[1] Problematika valivého odporu je velmi zajímavá, nebojte se zjistit si o ní více.

Protože veškerá tato energie se musí ztratit ve valivém odporu a energie je síla na dráze, bude nám platit, že $E_\mathrm{k} = F_\mathrm{v} x$ a $x = E_\mathrm{k}/F_\mathrm{v}$. Pokud dosadíme za F_v, získáme:

$$x = \frac{E_\mathrm{k}}{F_\mathrm{n}\frac{e}{r}} = \frac{E_\mathrm{k}}{mg\frac{e}{r}} = \frac{E_\mathrm{k} r}{mge}\,.$$

Nyní již tedy známe vše kromě poloměru valení. V kuličce nalézáme pravoúhlý trojúhelník, ze kterého jsme schopni získat náš r, protože tento trojúhelník má jako odvěsny právě r a $1/2$ rozpětí kolejnic (rozpětí děleno dvěma – 4,5 mm) a přeponou je poloměr naší kuličky – 1 cm. Pak již tedy dopočítáme hledané x:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{10^2 - 4{,}5^2}\ \mathrm{mm} \doteq 8{,}93\,\mathrm{mm} = 0{,}008\,93\,\mathrm{m}\,,\\ x &= \frac{0{,}126\,86 \cdot 0{,}008\,93}{\frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}01^3 \cdot 7\ 850 \cdot 9{,}8 \cdot (5\cdot 10^{-6})}\ \mathrm{m} \doteq 700\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Naše kulička tedy za působení pouze valivého odporu dojede přibližně do vzdálenosti 700 metrů. Vidíme, že v případě pevných povrchů, jako je ocelová kolej, je působení valivého odporu naprosto zanedbatelné v porovnání s jinými odporovými silami. V praxi se s valivým odporem setkáme spíše v situacích, jako je jízda na kole po zablácené cestě.

Bonus Zkusme se dle nápovědy podívat na to, jaký tvar má energie kuličky. Celková energie je součtem posuvné a rotační, tedy:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2}\,,$$

kde jsme využili, že $\omega = v/r$ přičemž ω je úhlová rychlost a J moment setrvačnosti. Toto můžeme dále upravit:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)v^2\,.$$

Vidíme, že kinetická energie má stejný tvar jako pro hmotný bod bez rotační energie, jen místo hmotnosti m máme $m' = m + J/r^2$. Vzhledem k tomu, že energie nám poskytují úplný popis situace, můžeme situaci počítat stejně, jako by se jednalo o hmotný bod s hmotností m', na nějž působí síla F_v.

Musíme si akorát ještě uvědomit, že počáteční rychlost v našich výpočtech nebude v_0, neboť tuto rychlost má kulička ve chvíli, kdy se ještě neotáčí. Nechť je v' skutečná počáteční rychlost poté, co část energie přeteče do otáčení. Můžeme ji následně určit ze zákona zachování energie. Stačí si uvědomit, že rychlostní veličina v_0 tvoří čistě posuvnou kinetickou energii, zatímco do skutečné počáteční rychlosti musíme započítat i rotační energii. Uděláme to následovně:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}J\frac{v'^2}{r^2}\,,\\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)v'^2\,. \end{aligned}$$

A nyní již jen vyjádříme v':

$$v' = \sqrt{\frac{m}{m + \frac{J}{r^2}}} v_0 = \sqrt{\frac{m}{m'}} v_0 \,.$$

Čas t potřebný na zastavení spočítáme pomocí počáteční rychlosti v' a zrychlení a. Pro čas zastavení totiž platí, že

$$at = v' \,.$$

Zrychlení vyjádříme pomocí 2. Newtonova zákona (nesmíme zapomenout, že počítáme s hmotností m') a následně vyjádříme čas t:

$$\frac{F_\mathrm{v}}{m'} t = v' \,,$$
$$t = \frac{v'm'}{F_\mathrm{v}} \,.$$

Nyní dosadíme za v' a F_v a poté i za m' a dostaneme výsledek:

$$\frac{F_\mathrm{v}}{m'} t = v' \,,$$
$$t = \sqrt{\frac{m}{m'}} v_0 \frac{m'r}{mge} \,,$$
$$t = \sqrt{\frac{m'}{m}} \frac{rv_0}{ge} = \sqrt{\frac{m + \frac{J}{r^2}}{m}} \frac{rv_0}{ge} \,.$$

Moment setrvačnosti J pro kouli je $J = r_0^2 \cdot 2/5$, kde r_0 je poloměr koule (musíme si dát pozor, abychom nezaměnili poloměr koule r_0 a poloměr otáčení r). Po jeho dosazení tedy konečně dostáváme výsledek

$$t = \sqrt{1 + \frac{2r_0^2}{5r^2}} \frac{rv_0}{ge} \doteq 2\,230\,\mathrm{s} \doteq 37\,\mathrm{min} \,.$$

2. Znovu provedeme stejné výpočty jako v sekci 1), ale tentokrát se nám musí rovnat složka tíhové síly vodorovná s kolejnicemi ($F_\mathrm{G} = mg \sin(\alpha)$) a valivý odpor, v němž je nyní tíhová síla vynásobená kosinem sklonu kolejnic, abychom získali pouze složku, která je na kolejnice kolmá. ($F_\mathrm{v} = F_\mathrm{n} \cdot e/r = mg \cos(\alpha) \cdot e/r$):

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{v} \,,$$
$$mg \sin(\alpha) = \frac{F_\mathrm{n} e}{r} \,,$$
$$mg \sin(\alpha) = \frac{mg \cos(\alpha) e}{r} \,,$$
$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{e}{r} \,,$$
$$\alpha = \mathrm{arctg} \left(\frac{5 \cdot 10^{-6}}{0{,}008\,93} \right) \doteq 0{,}032^\circ \,.$$

Aby se nám tedy kulička nikdy nezastavila (pokud započítáváme jen valivý odpor), tak sklon naší dráhy musí být alespoň 0,032 stupně (ano, valivý odpor je opravdu tak malý).

Václav Verner
vasek@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.