Úloha VI.4 ... Láva

6 bodů; (chybí statistiky)

Lubor pozoroval, jak po výbuchu islandské sopky Fagradalsfjall stéká láva do moře, a zaujalo ho, jak z moře stoupá obrovské množství páry. Zamyslel se proto, jaké množství vody je potřeba na schlazení magmatu.

Představme si, že nalijeme do vody roztavené železo o celkové hmotnosti $10\,\mathrm{g}$. *Jaký objem vody bychom potřebovali, aby se při schlazení železa všechna odpařila (železo tedy bude mít na konci experimentu teplotu právě* $100\,^\circ\mathrm{C}$*)? Teplota roztaveného železa je* $1\,500\,^\circ\mathrm{C}$*, teplota tuhnutí* $1\,200\,^\circ\mathrm{C}$*, voda má pokojovou teplotu* $20\,^\circ\mathrm{C}$*. Měrná tepelná kapacita železa je* $450\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$*, skupenské teplo tuhnutí* $2{,}72\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$*, měrná tepelná kapacita vody* $4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$*, skupenské teplo varu* $2\,257\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$*.*

Pozn.: ve skutečnosti se měrná tepelná kapacita železa s ohřátím převážně zvyšuje až do bodu tání, kdy pak zůstává převážně konstantní. Tento výpočet tedy berte jako spodní hranici objemu vody.

Abychom mohli vyřešit tuto úlohu, musíme provést jednoduchou úvahu. Železo nám do vody uvolní teplo, které se bez jakýchkoliv ztrát vstřebá. Díky tomu se voda ohřeje a vypaří. Naopak železo se bude ochlazovat, pak ztuhne a následně bude chladnout dál. Pomocí kalorimetrické rovnice dokážeme přepočítat změnu teploty na změnu tepelné energie a zároveň víme, kolik tepla je třeba na skupenskou přeměnu jednotlivých látek. Můžeme tedy spočítat celý příklad.

Nejprve zjistěme, kolik energie (tepelné) nám odevzdá železo. Víme, že se zchladí na $100\,^\circ\mathrm{C}$, teplotu varu vody. Díky tomu můžeme z kalorimetrické rovnice $E = m_\text{ž} \cdot c_\text{ž} \cdot \Delta t$ (kde $m_\text{ž}$ je hmotnost, $c_\text{ž}$ měrná tepelná kapacita a Δt změna teploty) dopočítat právě tuto odevzdanou energii. Protože v teplotním intervalu $100\,^\circ\mathrm{C}$ až $1\,500\,^\circ\mathrm{C}$ uvažujeme konstantní měrnou tepelnou kapacitu železa $450\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, změna teploty je $1\,400\,\mathrm{K}$ a hmotnost železa je $0{,}01\,\mathrm{kg}$, získáme, že železo odevzdá celkem

$$E = 0{,}01\,\mathrm{kg} \cdot 450\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}} \cdot 1\,400\,\mathrm{K} = 6\,300\,\mathrm{J}\,.$$

Nesmíme ale zapomenout, že během tohoto procesu nám železo i ztuhne, čímž nám uvolní další energii. Jak můžeme poznat z jednotky skupenského tepla tuhnutí železa, tuto energii spočítáme jako:

$$E = m_\text{ž} \cdot l_\mathrm{t}\,,$$

kde l_t je právě skupenské teplo. Získáme tedy: $E = 0{,}01\,\mathrm{kg} \cdot 2\,720\,000\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}} = 27{,}200\,\mathrm{kJ}$. Celkem nám tedy železo odevzdá $6{,}300\,\mathrm{kJ} + 27{,}200\,\mathrm{kJ} = 33{,}500\,\mathrm{kJ}$. Nyní se tedy již jen ptáme, kolik vody jsme schopni touto energií ohřát k varu a vypařit. Tento proces si opět můžeme představit jako dva jednotlivé děje – ohřátí vody o $80\,^\circ\mathrm{C}$ a pak její vypaření. Spotřebujeme tedy celkovou energii $E = m_\mathrm{v} \cdot c_\mathrm{v} \cdot \Delta t + m_\mathrm{v} \cdot l_\mathrm{v}$. Z toho si vyjádříme námi hledanou hmotnost:

$$\begin{aligned}
E &= m_\mathrm{v} \cdot (c_\mathrm{v} \cdot \Delta t + l_\mathrm{v})\,,\\
m &= \frac{E}{c_\mathrm{v} \cdot \Delta t + l_\mathrm{v}}\,,\\
m &= \frac{33\,500\,\mathrm{J}}{4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}} \cdot 80\,\mathrm{K} + 2\,257\,000\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}} \doteq 0{,}012\,9\,\mathrm{kg}\,.
\end{aligned}$$

Potřebujeme vypočítat objem vody, což můžeme udělat poměrně jednoduše, neboť známe její hustotu:

$$\rho_{\mathrm{v}} = \frac{m_{\mathrm{v}}}{V_{\mathrm{v}}}$$

$$V_{\mathrm{v}} = \frac{m_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{v}}} \doteq \frac{12{,}9\,\mathrm{g}}{1{,}0\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}} \doteq 13\,\mathrm{cm^3}\,.$$

Potřebujeme tedy $13\,\mathrm{cm^3}$ vody.

Václav Verner
vasek@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.