výfuk

výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

školní rok se pomalu chýlí ke konci a s ním přichází i letošní poslední sada úloh Výfuku. Těšit se můžete na vytahování Titanicu ze dna oceánu nebo na úlohu o kuličkové dráze. Nesmí chybět ani Výfučtení, které se tentokrát týká termodynamiky. V brožurce také naleznete vzorová řešení 5. série a průběžné pořadí po 4. sérii. Do konce školního roku se ještě můžete těšit na poslední brožurku, ve které budou vzorová řešení šesté série a konečné pořadí Výfuku.

S poslední sérií máte také jednu z posledních příležitostí k získání odměn ve Výfučím bingu, tak si je nenechte ujít.

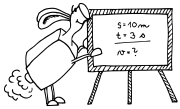
Aby se vám po nás přes prázdniny nestýskalo, chystáme opět dvě prázdninové série a již tradiční letní tábor, na kterém máme ještě stále volná místa, takže pokud vy nebo vaši kamarádi chcete jet, tak se určitě ozvěte.

Ještě před prázdninami pro vás chystáme jarní setkání, které se uskuteční 13.–15. května v Brně a na které se můžete přihlašovat na našem webu. Těšíme se na vás

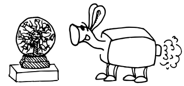
Organizátoři

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

matfyz



Zadání VI. série

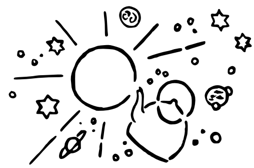


Termín odeslání: 16. 5. 2022 20.00

Úloha VI.1 ... Stříhání papíru ❻ ❼ 5 bodů

Lubor si hrál s nůžkami a zamyslel se, jak vlastně funguje dělení papíru a běžně používané formáty jako například A4. Rozměry klasického papíru ale všichni znají, proto začal přemýšlet nad tím, jak velké by byly netradiční formáty. Rozstříhal tedy jeden papír A4 na několik částí. Všiml si, že plocha jednoho ze vzniklých kusů má stejnou plochu jako papír, který se běžně označuje jako A7. Jakou má tento kus plochu? Další kus papíru změřil, spočítal jeho plochu a vyšlo mu, že papír má velikost $4{,}8\,\mathrm{cm}^2$. Jaké označení by měl papír s takovou plochou, pokud by měl zároveň správný poměr stran $(1 : \sqrt{2})$?

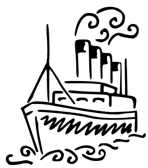
Úloha VI.2 ... Schovávaná na kružnici ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů



Když byl Výfuček malý, tak si myslel, že kolem Slunce obíhá po stejné dráze jako Země i konvice na čaj. Na jak velké části orbity (vyjádřete v jednotkách úhlu i vzdálenosti) by musela konvice obíhat, abychom ji ze Země nemohli vidět, tedy aby byla skrytá za Sluncem?

Dráhu Země považujte za kruhovou, poloměr této dráhy i rozměry Slunce si dohledejte. Poloměr Země zanedbejte – uvažujte bodového pozorovatele.

Úloha VI.3 ... Vytažení Titanicu ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů



Odhadněte, kolik pingpongových míčků by bylo třeba, aby vyzdvihly potopený vrak lodi Titanic na hladinu. Uvažujte, že Titanic je stále „v jednom kuse“ a pingpongových míčků na něj můžeme připevnit neomezené množství. Ostatní údaje dohledejte či odhadněte. Zkuste odhadnout, zda by se všechny tyto míčky vešly přímo do lodi, nebo zda bychom je museli připevňovat i na ni.

Úloha VI.4 ... Láva ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Lubor pozoroval, jak po výbuchu islandské sopky Fagradalsfjall stéká láva do moře, a zaujalo ho, jak z moře stoupá obrovské množství páry. Zamyslel se proto, jaké množství vody je potřeba na schlazení magmatu.

Představme si, že nalijeme do vody roztavené železo o celkové hmotnosti 10 g. Jaký objem vody bychom potřebovali, aby se při schlazení železa všechna odpařila (železo tedy bude mít na konci experimentu teplotu právě 100 °C)? Teplota roztaveného železa je 1 500 °C, teplota tuhnutí 1 200 °C, voda má pokojovou teplotu 20 °C. Měrná tepelná kapacita železa je $450\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, skupenské teplo tuhnutí $2{,}72\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$, měrná tepelná kapacita vody $4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, skupenské teplo varu $2\,257\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$.

Pozn.: ve skutečnosti se měrná tepelná kapacita železa s ohřátím převážně zvyšuje až do bodu tání, kdy pak zůstává převážně konstantní. Tento výpočet tedy berte jako spodní hranici objemu vody.

Úloha VI.5 ... Kuličková dráha ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Výfuček si koupil novou kuličkovou dráhu, jejíž jednotlivé dílky byly spojené kolejemi. Občas se mu ale stalo, že na vodorovných kolejích se kuličky v důsledku působení tření zastavily, přestože si myslel, že by se to stávat nemělo. Jak to tedy vlastně s tímto problémem je?

Nejdříve si musíme ujasnit to, že na kuličky tření stále působí. I když je třecí plocha mezi kolejí a kuličkou velmi malá, je pro samotný proces kutálení naprosto zásadní. Kdyby nám kuličky o kolej netřely, mohly by klidně projet celou kuličkovou dráhu bez toho, aby se otáčely – jely by jako kvádr po nakloněné plošině! Toto tření je ale pro zastavování kuliček zanedbatelné – mnohem více nám naše kuličky bude zastavovat tzv. valivý odpor. To je veličina, která nám v závislosti na materiálech povrchu kuličky i koleje a průměru tělesa řekne, jaká síla působí proti pohybu kuličky. Můžeme ji spočítat jako:

$$F_v = \frac{F_n \cdot e}{r}\,,$$

kde F_v je náš valivý odpor, F_n normálová síla (na vodorovné koleji shodná s gravitační silou, jinak je to ale síla působící v kolmém směru na kolej – vzniká při vektorovém rozkladu gravitační síly na posuvnou a právě normálovou), e je tzv. rameno valivého odporu, které je analogem koeficientu tření u třecí síly (je to experimentálně změřená hodnota závislá na vnitřním tření materiálu, tuhosti a struktuře povrchu[1]) a r je v tomto vzorci poloměr našeho tělesa – naší kuličky.

Pokud již tedy víme, jak valivý odpor funguje, můžeme si s ním zkusit něco vypočítat.

1. Mějme kuličku o poloměru 1 cm a vodorovnou kolej o délce x. Kolej má rozpětí kolejnic 9 mm. Pokud je kulička ocelová (má hustotu $7\,850\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$) a kolej také (s ramenem valivého odporu o hodnotě 0,005 mm), jak daleko dojede kulička (jak dlouhé je x), pokud ji na tuto vodorovnou dráhu vypustíme rychlostí $v_0 = 10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$? Kuličku vypustíme tak, že má rychlost v_0, ale zpočátku se neotáčí.

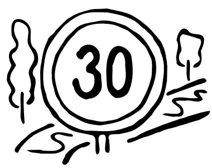
   Bonus: Jak dlouho bude trvat kuličce, než se zastaví? Pro výpočet tohoto času budeme muset uvažovat nejen translační, ale i rotační energii kuličky.

   Nápověda: Kdyby kulička neměla rotační energii, jednalo by se o jednoduchou úlohu. Pokud se pořádně zamyslíte nad tvarem energie kuličky, přijdete však na to, že se dá upravit. Tím můžete vysvětlit, jak rotační energie ovlivní pohyb kuličky.

2. Jaké nejmenší klesání musí mít lineární trať pro stejnou kuličku na stejné koleji jako v otázce 1, aby její rychlost vzniklá klesáním překonala valivý odpor, který bude kuličku zpomalovat?

Úloha VI.E ... Jezdi podle předpisů ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Změřte **průměrnou** rychlost (myšlena jako podíl celkové vzdálenosti a celkového času) libovolného druhu transportního zařízení někde ve vašem okolí. Změřenou hodnotu porovnejte s hodnotou určenou např. dopravní značkou pro daný úsek silnice nebo jiným předpisem či nařízením a pokuste se vysvětlit případné odlišnosti.



[1] Problematika valivého odporu je velmi zajímavá, nebojte se zjistit si o ní více.

Jako transportní zařízení můžete použít vše od aut přes koně až po eskalátor. Také nezapomeňte uvést, které záchytné body jste použili k naměření vzdálenosti. Pokuste se také odhadnout nepřesnosti měření.

Úloha VI.V ... Tepelný výtah ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Jirka se uprostřed léta rozhodl vyrazit na průzkum jeskyně, která byla $h = 20\,\mathrm{m}$ hluboko pod povrchem. Protože se mu nechtělo při zpáteční cestě šplhat 20 metrů nahoru, připravil si na návrat zpět tepelný stroj. Jirkův stroj dokáže přijímat teplo z povrchu při teplotě $T_1 = 30\,^\circ\mathrm{C}$ a odevzdává teplo na dně jeskyně, kde teplota klesla až na $T_2 = 8\,^\circ\mathrm{C}$. U zvedacího mechanismu stroje se však bohužel vyskytuje tření, proto je jeho účinnost pouze $\eta = 0{,}01$.

1. Kolik tepla musí minimálně stroj odebrat z povrchu, jestliže má vyzvednout Jirku až na povrch? Hmotnost Jirky spolu s částí konstrukce stroje, která je zvedána, je $m = 90\,\mathrm{kg}$.

2. Jak se po ukončení celého procesu změní entropie stroje? Uvažujte, že všechny přesuny tepla probíhají vratným způsobem při konstantních teplotách a že ke ztrátám dochází pouze u zvedacího mechanismu, který je umístěn na povrchu (a jeho teplota je tedy T_1).

Výfučtení: Termodynamika

Úvod

Dostáváte do rukou poslední Výfučtení tohoto školního roku, jehož ústředním tématem je oblast fyziky nazývaná termodynamika. Termodynamika se zabývá popisem procesů a chování látek spojených s předáváním tepla a jinými tepelnými jevy. K popisu používá takzvaný *fenomenologický* přístup, což znamená, že její základní zákony jsou založeny pouze na výsledcích experimentů. Tato skutečnost však nijak nesnižuje důležitost termodynamiky. Naopak, jak se v tomto textu snad sami přesvědčíte, termodynamika nám umožňuje dozvědět se mnoho o chování látky bez jakékoliv znalosti její vnitřní struktury nebo vnitřních mechanismů. Úvahy a argumenty, které používáme, mohou být náročné na porozumění, proto jsme se rozhodli některé příslušné odstavce označit jako dobrovolné a ponecháváme na čtenářích, jestli se ponoří do náročnějších úvah, nebo pouze přijmou uvedené výsledky, které sice stačí k vypočítání příkladů, ale neumožňují pohlédnout hlouběji až k samotné podstatě chování našeho světa.

Stav systému

V termodynamice objekt našeho studia nazýváme *termodynamický systém* a k popisu jeho vnějšího (makroskopického) stavu používáme tzv. *stavové fyzikální veličiny.* Často přitom požadujeme, aby všechny procesy v našem systému byly v rovnováze, tedy aby se stav našeho systému bez přítomnosti nějakých vnějších změn neměnil. Za těchto podmínek už jsme schopni měřit příslušné stavové veličiny.

Jako příklad termodynamického systému si můžete představit třeba hélium v nafukovacím balónku. Stavové veličiny takového systému jsou například tlak, objem a teplota. K těmto veličinám si sice nejspíše každý čtenář dokáže vytvořit nějakou intuitivní představu, i přesto si je však pro úplnost pečlivěji vysvětlíme.

Tlak se definuje jako síla působící kolmo na nějakou plochu. Co je však skutečným původcem tlaku v našem balónku, kde se síla bere? Tlak vzniká v důsledku nárazů atomů a molekul dané látky na podložku (stěnu balonku). Tyto molekuly a atomy mají svoji hybnost a při nárazu do podložky se odrážejí. Ze zákona akce a reakce vyplývá, že tím působí na stěnu silou, kterou přepočítáváme na jednotku plochy. Dostáváme tak tlak. Krom balónku se s tlakem setkáme třeba u atmosférického tlaku v předpovědi počasí, ale nemusíme se omezovat jen na plyny, stejně to platí i u hydrostatického tlaku, který působí např. na ponorku.

Objem je jednoduše definován jako velikost prostoru, který systém zabírá. Toto si lze představit opravdu jednoduše.

Dalšími důležitými pojmy jsou *teplo* a *teplota*. Teplem rozumíme množství energie chaotických pohybů částic uvnitř látky. Pokud mezi dvěma navzájem spojenými systémy dochází k samovolnému přesunu tepla, pak říkáme, že mají různou teplotu. U dvou systémů v rovnováze říkáme, že mají navzájem stejnou teplotu. V této definici teploty hovoříme pouze o relativních teplotách, ale nestanovili jsme žádnou absolutní stupnici. Každému systému lze však vskutku přiřadit nějaké číslo (jeho teplotu) a systémy se stejným číslem (stejnou teplotou) jsou navzájem v rovnováze. Jedno praktické provedení tohoto konceptu je v praxi hodně používaná Celsiova stupnice, jejíž počátek je v bodě tuhnutí vody a používá se, protože je pro nás jednoduše pochopitelná a jsme na ni zvyklí.

V termodynamice se pro teplotu používá Kelvinova stupnice, tzv. termodynamická teplota, které se budeme věnovat později v textu. Zatím jen řekneme, že v případě rozdílu teplot se stupnice chovají stejně, tedy pokud je látka o $1\,^\circ\mathrm{C}$ teplejší, pak je teplejší i o $1\,\mathrm{K}$ a její nula v Celsiově stupnici odpovídá teplotě $-273{,}15\,^\circ\mathrm{C}$. Také prozradíme, že tato teplota souvisí s množstvím uloženého tepla (energie chaotických pohybů částic) v látce a nulová teplota pak odpovídá stavu, kdy už nemůžeme žádné další teplo látce odebrat. V tomto textu a tím pádem i ve všech příslušných výpočtech budeme používat výhradně Kelvinovu teplotní stupnici.

Vnitřní energie

Výše jsme se již bavili o energii molekul v tělese a o jejím příměru k termodynamické teplotě. S tím souvisí i pojem *vnitřní energie*. Vnitřní energie tělesa je součtem kinetických i potenciálních energií všech molekul tělesa. Můžeme na ní skvěle demonstrovat první termodynamický zákon – zákon zachování energie – například při brzdění. Těleso mající určitou hmotnost m se nejprve pohybuje průměrnou rychlostí v a působí na něj třecí síla F_t, těleso tedy zpomaluje, což podle vzorce $E_\mathrm{k} = mv^2/2$ znamená, že se snižuje i jeho kinetická energie. Jenže první termodynamický zákon říká, že energie se nemůže jen tak někam ztratit. Proto místo toho, aby se ztratila, se jen přemění, a to do vnitřní energie. Takže díky tření se při brzdění ohřeje jak těleso samotné, tak podložka, o kterou se tře.

První termodynamický zákon

Měli bychom si zrekapitulovat, co praví první termodynamický zákon:

> Celkové množství energie (všech druhů) izolovaného termodynamického systému zůstává zachováno, jednotlivé druhy energií se mezi sebou mohou převádět.

Příklad převodu energií, kde se kinetická energie měnila na teplo, byl uveden výše. Můžeme se setkat i s další formulací:

> Nelze sestrojit stroj, který by trvale dodával mechanickou energii, aniž by spotřeboval odpovídající množství energie jiného druhu.

Tato formulace říká, že neexistuje tepelný stroj (stroj využívající k práci teplo, např. parní stroj, který budeme více rozebírat níže), který by porušoval zákon zachování energie tím, že by cyklicky vykonával mechanickou práci bez přísunu energie. Takový stroj by se označoval jako *perpetuum mobile* prvního druhu.

Takže pokud chceme změnit vnitřní energii U tělesa, musíme tak učinit přidáním, případně odebráním energie v podobě tepla Q nebo konáním práce W.

Zapsáno matematicky v případě, když my konáme práci na tělese:

$$\Delta U = Q + W$$

a v případě, když těleso samo koná práci:

$$\Delta U = Q - W\,.$$

Z posledního vzorce je vidět, že když těleso koná práci, tak chladne. Zapsáno jedním obecným vzorcem:

$$\Delta U = \pm\left|Q\right| \pm \left|W\right|\,,$$

kde znaménko minus volíme, pokud těleso teplo ztrácí, resp. práci koná, a znaménko plus pokud okolí teplo dodává, resp. okolí práci koná.

Druhý termodynamický zákon

Viděli jsme, že při procesech, u kterých se vyskytuje tření (například brzdění auta), dokážeme přeměnit veškerou mechanickou energii na teplo. Je však možné takový proces obrátit? Neboli je možné odebrat látce teplo a vykonat pomocí něj práci? Ukazuje se, že taková zařízení skutečně existují, můžeme si to ověřit například na chování obyčejného gumového pásku.[2] Když pásek natáhneme, tak můžeme pocítit jeho lehké zahřátí, a naopak když ho povolíme, tak pocítíme lehké ochlazení: natažením jsme vyměnili mechanickou energii za tepelnou energii (zahřátí). Důvodem je uspořádání molekul v pásku. Toto uspořádání si můžeme představit jako svazek velké spousty molekulárních řetězců, ty se při natažení nahustí a zapletou. To způsobí, že molekuly do sebe začnou rychleji narážet, a uvolní se tedy teplo. Naopak při uvolnění se řetězce oddálí a pásek zchladne. Funguje to i obráceně, když pásek zahřejeme, tak se smrští.

Gumový pásek je příkladem zařízení, které se nazývá *tepelný stroj*. Velká část termodynamiky se zabývá právě studiem těchto strojů.

> Tepelný stroj je zařízení, jednoduché či složité, které dokáže za přívodu tepla Q konat práci W.

Požadujeme, aby byl tento stroj i cyklický, což znamená, že jeho pohyb končí i začíná ve stejné pozici, a cyklus se tak může bez problémů stále opakovat a jeho provoz zajišťuje čistě jen přísun tepla. Skvělým příkladem cyklického tepelného stroje je parní stroj. Stačí jen přiložit pod kotlem, aby se voda změnila v páru, pohnula pístem a vykonala tak chtěnou práci. Pak se tlak páry uvolní a píst spadne působením tíhové síly na původní pozici. Již nepotřebná pára by se dala jen tak vypouštět do vzduchu, ale pak by se musela do kotle stále přičerpávat nová voda,

[2] O gumovém pásku poutavě vypráví Richard Feynman v minisérii Fun to imagine, která je k nalezení např. na Youtube `https://www.youtube.com/watch?v=a_Fgy5nVmnk&ab_channel=IndiesScope`.

což není úplně ideální, místo toho se nepotřebná pára svede do zařízení zvaného kondenzátor, kde se pomocí nějakého chladiva, třeba studené vody, mění opět na kapalnou vodu. Voda pak putuje opět do kotle, kde se znovu mění v páru a tak stále dokola. Pro provoz tohoto stroje je potřeba pouze udržovat oheň pod kotlem a zajistit přívod chladiva.

Všimněme si zvláštní vlastnosti parního stroje. Aby se po vykonání cyklu vrátil do původního stavu, musel odevzdat část tepla (ochlazení páry v kondenzátoru). Ptáme se, jestli by bylo možné tento proces vynechat, neboli jestli by bylo možné přeměnit veškeré teplo čistě na práci, a přesto vrátit systém do původního stavu. Druhý termodynamický zákon říká, že něco takového není možné. Můžeme jej formulovat podobně jako první zákon:

> Nemůžeme za jedné konstantní teploty odebírat z termodynamického systému teplo a konat tím pouze práci, aniž by docházelo k nějakým jiným změnám ve stroji nebo okolí.

Každý cyklicky pracující tepelný stroj musí využívat alespoň dvě tělesa s různými teplotami, přičemž z teplejšího tělesa je teplo odebíráno a chladnějšímu odevzdáváno.

Existují i další formulace 2. zákona. Mohli bychom se například pokusit 2. zákon obejít tak, že necháme přecházet teplo z chladnějšího tělesa na teplejší. Náš stroj by si pak toto teplo odebral, část by přeměnil na práci a zbytek odevzdal zpět chladnějšímu tělesu. Jiná formulace druhého zákona nás proto ubezpečuje, že teplo samovolně (bez spotřebování jiné energie) z chladnějšího tělesa na teplejší nikdy nepřechází. To samozřejmě neznamená, že by nebylo možné studenější těleso ochladit. Koneckonců každý má doma zařízení nazývané lednička, které tuto činnost vykonává. Musíme si však uvědomit, že lednička je připojená do zásuvky a k ochlazování těles využívá elektrickou energii. Přechod tepla tedy není samovolný, je zprostředkováván konáním práce.

Carnotův ideální tepelný stroj

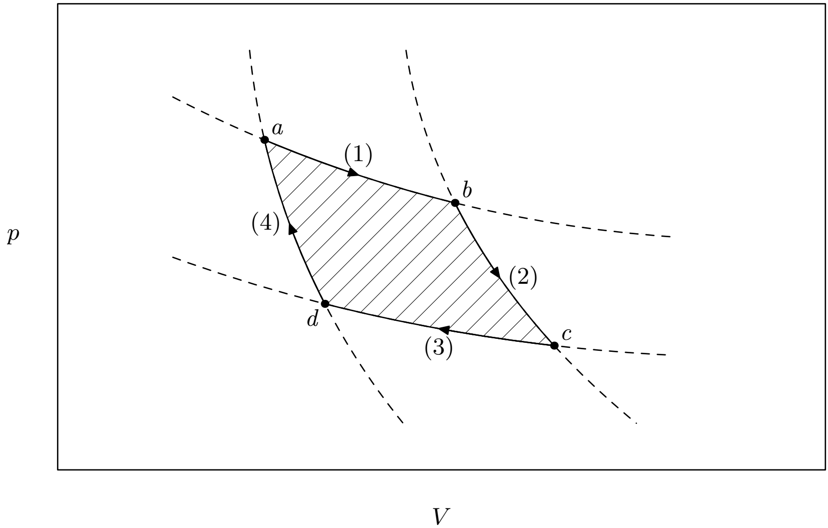
Tepelný stroj tedy nemůže mít nikdy stoprocentní účinnost. Provedeme logickou úvahu a pokusíme se najít tepelný stroj s co největší možnou účinností.[3]

Aby měl náš hypotetický stroj největší možnou účinnost, musely by se všechny jeho součástky pohybovat bez tření. Představme si ho jako píst naplněný plynem, ke kterému budeme moci přikládat velmi chladné těleso o teplotě T_2 a horké těleso o teplotě T_1. Tím, že jsme se zbavili tření, jsme zajistili, že když zatlačíme na píst z jedné strany nějakou silou, bude se tímto směrem pohybovat, a když směr síly obrátíme, otočí se i směr pohybu pístu. To samé musíme zajistit i u přechodu tepla, platí ale druhý termodynamický zákon. Teplo může přecházet z teplejšího tělesa na chladnější, ale ne naopak. Musíme tedy zajistit, aby měla tělesa přibližně stejnou teplotu, protože pak je možný přechod tepla na obě strany po jeho malém dodání jedné straně. Docílíme tak vlastně vratnosti tepelného stroje. To znamená, že tento tepelný stroj může běžet jedním směrem, spotřebovávat teplo a konat práci, a nebo druhým, vyžadovat práci a produkovat teplo. Nyní si popíšeme jeden druh vratného stroje, abychom si ukázali, že je vytvoření výše popsaného idealizovaného vratného stroje možné. Tento stroj

[3] Pozor ovšem, co všechno do účinnosti uvažujeme. V praxi se můžeme setkat s přístroji (např. klimatizace nebo tepelná čerpadla), která mají zdánlivě účinnost klidně i 400 procent. Je to tím, že „investujeme“ malé množství energie (elektřiny, kterou zaplatíme) a přístroj díky této investici umí využít volně dostupnou energii z okolí (např. ze Slunce, ze vzduchu), která je „zdarma“. Při tomto uvažování samozřejmě může účinnost vyjít opravdu velká (extrémní případ – nekonečná účinnost – je ohřev bazénu čistě pomocí sluneční energie). Příklad tohoto čerpadla naleznete ve 4. úloze 2. série 11. ročníku Výfuku: `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r11/s2/priklad2-4.pdf?cache=`.

provádí tzv. *Carnotův cyklus*. Všechny procesy v něm musí být vratné, tedy musí umět běžet oběma směry.

Jednotlivé kroky Carnotova cyklu – pro zvídavé čtenáře Carnotův cyklus používá jako pracovní látku tzv. *ideální plyn*, což v praxi může být s dostatečnou přesností třeba vzduch. V jednom cyklu nejprve ohřejeme plyn na teplotu T_1 a necháme ho ve styku s horkým systémem. Zatímco probíhá přívod tepla do plynu, musíme velmi pomalu zvedat píst, abychom zabezpečili, že teplota plynu se nikdy příliš neodchýlí od T_1. Kdybychom vytahovali píst příliš rychle, teplota plynu by silně klesla pod T_1 a proces by nebyl vratný. Pohybujeme-li pístem dostatečně pomalu, teplota plynu se nikdy příliš neodchýlí od T_1. Vrátíme-li pak píst pomalu zpět, teplota bude jen nepatrně vyšší než T_1 a teplo poteče obráceným směrem. Je tedy vidět, že takové *izotermické* rozpínání (rozpínání probíhající při stálé teplotě), je-li prováděno dostatečně pomalu a jemně, je vratným procesem.



Obr. 1: Carnotův stroj

Abychom lépe pochopili, co se při cyklu děje, ukážeme si graf závislosti tlaku plynu na jeho objemu (obr. 1). Začínáme v bodě a. Když se plyn rozpíná, tlak klesá. Křivka označená symbolem (1) nám ukazuje, jak se mění objem a tlak, když se teplota udržuje na hodnotě T_1. Po dobu izotermické expanze tlak se vzrůstem objemu klesá, dokud se nedostaneme do bodu b. Současně musíme neustále do plynu přivádět z horkého tělesa určité teplo Q_1, neboť jinak (jak už víme) by se plyn rozpínáním ochlazoval a děj by už neprobíhal za stálé teploty.

Když dokončíme izotermickou expanzi a dostaneme se do bodu b, přerušíme kontakt válce s horkým systémem a budeme pokračovat v expanzi. Tentokrát znemožníme jakýkoliv přísun tepla k válci. Expanzi budeme provádět pomalu a opět předpokládáme nepřítomnost tření, takže nebude důvod, proč bychom proces nemohli obrátit. Plyn pokračuje v rozpínání a teplota klesá, neboť do válce už nepřichází žádné teplo. Nechme plyn rozpínat se podle křivky označené (2), dokud teplota neklesne na hodnotu T_2 v bodě označeném c. Tento druh expanze bez dodání tepla se nazývá *adiabatická expanze.* Plyn v pístu dosáhl teploty T_2, takže pokud ho uvedeme do kontaktu s velmi chladným tělesem s teplotou T_2, nenastanou nevratné změny. Nyní plyn pomalu stlačíme, přičemž ho ponecháváme ve styku s velmi chladným tělesem o teplotě T_2; toto stlačování proběhne podle křivky označené (3). Protože píst je ve styku s velmi chladným systémem, teplota nevzroste, ale teplo Q_2 přeteče z pístu do velmi chladného tělesa o teplotě T_2. Po izotermickém stlačení plynu podle křivky (3) až k bodu c přerušíme kontakt mezi pístem a velmi chladným systémem s teplotou T_2 a budeme plyn dále stlačovat, přičemž nedovolíme teplu uniknout. Teplota vzroste a tlak se bude měnit podle křivky označené (4). Kdybychom provedli každý krok pečlivě, vrátíme se do bodu a při teplotě T_1, z něhož jsme vyšli, a celý cyklus můžeme zopakovat znovu.

Podle diagramu vykonal plyn úplný cyklus, v jehož průběhu jsme dodali teplo Q_1 při teplotě T_1 a odebrali teplo Q_2 při teplotě T_2. Důležité je, že cyklus je vratný, takže všechny kroky můžeme provést opačným směrem. Mohli bychom jít nazpět a ne dopředu: mohli bychom začít v bodě a při teplotě T_1, nechat expandovat plyn podle křivky (4), dál expandovat při teplotě T_2 , absorbovat teplo Q_2 atd., tedy uskutečnit obrácený cyklus. Probíhá-li cyklus jedním směrem, musíme vykonat práci, probíhá-li cyklus opačně, koná práci sám plyn.

Účinnost ideálního stroje

Nyní, když jsme si ukázali jednoduchý příklad vratného stroje, budeme předpokládat, že existují i jiné takové stroje. Předpokládejme, že máme vratný stroj A, který odebírá teplo Q_1 při teplotě[4] T_1, koná práci W a odevzdává určité teplo při teplotě T_2. Připomínáme, že kvůli druhému termodynamickému zákonu také odevzdává „odpadní“ (na práci nevyužitelné) teplo Q_1' a z prvního termodynamického zákona platí $W = Q_1 - Q_1'$ – zde však využijeme pouze Q_1 a W.

Dále předpokládejme, že máme nějaký jiný, člověkem zkonstruovaný stroj B, už existující nebo ještě nevynalezený, využívající páru (nebo cokoliv jiného), vratný nebo nevratný, který je navržen tak, že odebírá stejné množství tepla Q_1 při teplotě T_1 a odevzdává teplo při teplotě T_2. Předpokládejme, že stroj B koná práci W'. Ukážeme si, že práce W' nemůže být větší než W, tedy že žádný stroj nevykonává více práce než vratný stroj.

Uvažujme, že by W' bylo větší než W. Popíšeme nyní jeden proces, který bychom mohli vykonat: nejprve můžeme vzít teplo Q_1 od horkého systému o teplotě T_1, pomocí stroje B konat práci W' a určité teplo odevzdávat chladnému systému o teplotě T_2. Když to uděláme, můžeme ušetřit určitou část práce W' (řekli jsme, že $W' > W$). Z celkové práce tedy odebereme část o velikosti W a zbytek $W' - W$ využijeme k užitečné práci někde mimo soustavu strojů. S prací W necháme stroj A běžet obráceně, protože je vratný. Tento stroj A spotřebuje určité teplo chladného systému o teplotě T_2 a odevzdá horkému systému o teplotě T_1 teplo Q_1.

Podívejme se na bilanci energií: ze systému o teplotě T_1 jsme odebrali Q_1 a následně vrátili Q_1, tedy nic se nezměnilo. Dále jsme ze systému o teplotě T_2 vzali nějaké množství tepla (nespecifikovali jsme ho) a vykonali práci navíc, konkrétně $W' - W$. Tedy celkově jsme odebrali teplo a přeměnili jej na práci. Ale zde si již vzpomeneme na druhý termodynamický zákon: stroj, který odebere teplo a přemění ho se stoprocentní účinností na práci se nazývá *perpetuum mobile druhého druhu* a jeho existence je podle 2. zákona nemožná. Nemůžeme takovýto stroj sestrojit, a proto ani nemůže platit $W' > W$.

[4] Zde teplotou myslíme tzv. termodynamickou teplotu, o které se zmíníme detailněji v sekcích níže.

Nyní uvažujme, že stroj B je také vratný. Potom samozřejmě nejenže W' nesmí být větší než W, ale můžeme to i obrátit a ukázat, že W nemůže být větší než W'. Jsou-li oba stroje vratné, musí být schopné konat stejnou maximální práci. Přicházíme tak k vynikajícímu závěru:

> Je-li stroj vratný, nezáleží na tom, jak je konkrétně zkonstruován. Pokud absorbuje určité množství tepla při teplotě T_1 a odevzdá určité teplo při teplotě T_2, je práce, kterou vykoná, vždy stejná.

Jde o vlastnost našeho světa, a ne o vlastnost konkrétního vratného stroje[5].

Teď si vypočítáme tuto maximální účinnost každého vratného stroje. Z prvního zákona víme, že pro vykonanou práci platí:

$$W_v = Q_1 - Q_2\,.$$

Účinnost stroje definujeme jako poměr přijatého tepla a vykonané práce, tedy:

$$\eta = \frac{W_\mathrm{v}}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}\,.$$

Jestliže mají mít všechny vratné stroje pracující mezi stejnými teplotami stejnou účinnost, pak musí mezi teply Q_1 a Q_2 existovat nějaká spojitost. Tento vztah bychom mohli najít, kdybychom například na jednotlivé kroky v Carnotově cyklu aplikovali známé zákony ideálního plynu. Pak bychom dostali:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \qquad \Rightarrow \qquad Q_1 = Q_2 \cdot \frac{T_1}{T_2}\,.$$

Účinnost Carnotova cyklu je v rámci vratných strojů nejvyšší možná, a je proto rovna

$$\eta = \frac{Q_2\frac{T_1}{T_2} - Q_2}{Q_1\frac{T_1}{T_2}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}\,.$$

Entropie

Zatím jsme se věnovali vysvětlení termodynamických zákonů pomocí principů a fyzikálních veličin, které nejspíše dobře znáte z běžného života. V několika případech jsme však záměrně zamlčeli vysvětlení některých důležitých skutečností. V případě teploty jsme bez udání důvodů zavedli novou stupnici, jejíž počátek je posunutý o 273,15 ° oproti Celsiově, a při výpočtu účinnosti vratných strojů nám vzorec

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

jakoby spadl z nebe. Nyní se k těmto problémům vrátíme a pokusíme se je lépe vysvětlit. Zavedeme při tom novou fyzikální veličinu nazývanou entropie.

[5] Ovšem v reálném světě může být složité vratný stroj sestrojit.

Nová teplota

Ještě než přejdeme k vysvětlení nového pojmu nazývaného entropie, se kterým se můžeme často setkat v různých filmech se sci-fi tématikou, musíme zavést úplnou definici teploty. Až doteď jsme teplotu používali pouze v souvislosti s tepelným tokem. Řekli jsme, že u dvou látek, které jsou v přímém kontaktu, pozorujeme samovolný přesun tepla (připomeňme, že teplo je forma energie; díky znalosti vnitřní struktury látek konkrétně víme, že je to energie chaotických pohybů částic), pak teplo přechází z teplejší látky na studenější (2. zákon) a pokud tepelný tok nepozorujeme, tak jsou tělesa v rovnováze a říkáme, že mají stejnou teplotu. Všimněme si, že v tomto kontextu jsou důležité pouze rozdíly teplot a jejich absolutní číselná hodnota nemá žádný význam.

Dále jsme o teplotě mluvili v souvislosti s tepelnými stroji. Naše tepelné stroje byly vratné a zjistili jsme, že všechny vratné stroje pracující mezi dvěma konkretními teplotami mají stejnou účinnost.

Zkoumejme nyní dva vratné stroje, které odevzdávají stejné teplo Q_S při nějaké teplotě, kterou nazveme jeden stupeň, a ptáme se, jaká tepla přijaly, pokud pracují mezi různými teplotami, označme je T_1 a T_2, kde $T_1 > T_2$. Pak stroj 1 musel přijmout větší teplo než stroj 2, tedy $Q_1 > Q_2$. Argument k tomu je jednoduchý, jelikož jsou stroje vratné, můžeme je nechat běžet i pozpátku, tedy tak, že odeberou teplo z chladnější zásoby a předají ho teplejší (musíme jim k tomu samozřejmě dodat práci, jinak bychom porušili 2. zákon). Stroj 1 zapojíme normálním způsobem, tedy dodáme mu Q_1 při T_1, on ale při jednom stupni odevzdá svoje teplo Q_S rovnou stroji 2, který necháme běžet pozpátku. Stroj 1 vykonal práci $W_1 = Q_1 - Q_S$ a stroji 2 musíme dodat práci $W_2 = Q_2 - Q_S$ aby odevzdal teplo Q_2 při T_2. Spočítejme nyní výslednou práci, kterou vykonal:

$$W = W_1 - W_2 = (Q_1 - Q_S) - (Q_2 - Q_S) = Q_1 - Q_2\,.$$

Výsledná práce vůbec není závislá na Q_S. Vypadá to tedy, že se tyto dva vratné stroje v sérii chovají úplně stejně jako jeden vratný stroj, označme ho stroj 3, pracující pouze mezi teplotami T_1 a T_2, kterému dodáme teplo Q_1. Jak ale víme, že stroj 3 odevzdá stejné teplo Q_2? Musí odevzdat stejné Q_2, protože jinak bychom měli dva vratné stroje pracující s různou účinností a to jsme dokázali, že není možné.

Na základě předchozích, na první pohled velmi komplikovaných argumentů, vidíme následující: teplo Q, které vratný stroj přijímá, je tím vyšší, čím je vyšší jeho pracovní teplota. Toto je univerzální zákon nezávislý na konkrétní konstrukci stroje.

Je to tedy základní vlastnost našeho světa a naši novou teplotu tomuto zákonu přizpůsobíme. Zadefinujeme tzv. *termodynamickou teplotu* T tak, že nějakému[6] referenčnímu systému přiřadíme teplotu $1\,\mathrm{K}$. Onen $1\,\mathrm{K}$ použijeme jako chladnou teplotu. Teplo, které stroj přijímá, je pak rovno

$$Q = \Delta S \cdot T$$

a teplo, které odevzdává, je rovno

$$Q_s = \Delta S \cdot 1\,\mathrm{K}\,,$$

kde T je druhá teplota, na které stroj působí, a konstanta ΔS vyjadřuje změnu entropie, které se budeme věnovat v další sekci.

[6] Neříkáme zde, jakému systému: děláme to tak, aby „správně“ vyšla poloha absolutní nuly.

Představme si nyní stroj 1 s přijatým teplem Q_1 pracující mezi 1 K a T_1 a následně stroj 2 s přijatým teplem Q_2 pracující mezi 1 K a T_1. Dále nechť oba stroje odevzdávají stejnou práci. Vidíme, že pro jejich přijatá tepla platí:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \Delta S = \frac{Q_2}{T_2}\,.$$

Co kdybychom měli stroj, který pracuje mezi teplotami T_1 a T_2? Dejme tomu, že přijme energii Q_1, jakou odevzdá energii Q_2? Určitě T_2krát vyšší, než kdyby pracoval při horké teplotě 1 K, ale T_1krát nižší, než kdyby pracoval při studené teplotě 1 K. Samozřejmě, kdyby stroj pracoval při nízké i vysoké teplotě 1 K, tak by nic nedělal a triviálně by odevzdal energii Q_1. Z toho plyne následující užitečný vztah pro obecný vratný stroj mezi teplotami T_1 a T_2:

$$Q_2 = Q_1\frac{T_2}{T_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{Q_1}{T1} = \frac{Q_2}{T_2}\,.$$

Tímto jsme tedy pečlivěji odvodili vztah pro vratné stroje, který jsme již ukazovali v sekcích výše.

Entropie roste, 2. zákon znovu

Náš předchozí výsledek můžeme interpretovat i následujícím způsobem. Vratný stoj v první části cyklu přijal nějaké množství Q/T (čehosi) a v druhé části stejné množství Q/T (čehosi) odevzdal. Zavedeme proto novou veličinu nazývanou *entropie* a řekneme, že změna entropie je rovna podílu Q/T. Pokud stroj přijme teplo, je změna jeho entropie kladná a pokud teplo odevzdá, tak je záporná. Vzhledem k rovnosti přijatého a odevzdaného Q/T říkáme, že vratných cyklech je změna entropie nulová. Tuto skutečnost jsme ukázali na příkladu stroje pracujícího mezi dvěma teplotami.

Změny entropie u komplikovanějších strojů - pro zvídavé čtenáře Mohli bychom však mít vratný stroj, který by používal např. 10 různých teplot, nebo by se při přenosu tepla mohla měnit samotná teplota rezervoáru, kterému teplo odevzdáváme. Bude i v takto komplikovaném vratném cyklu stále změna entropie nulová? Ukazuje se, že ano. Můžeme to podpořit následujícím argumentem.

Představme si, že náš vratný stroj přechází z nějakého počátečního stavu A do stavu B a při tom nějakým komplikovaným způsobem odevzdává teplo při různých teplotách T. Každé teplo ΔQ, které takto odevzdá, předáme jiným vratným strojům při stejných teplotách T' a tyto stroje napojíme na teplotu 1 K. Teplo předané rezervoáru při jednotkové teplotě odpovídá změně entropie (takto jsme si změnu entropie původně definovali), proto při přechodu do stavu B stroj odevzdá celkovou entropii:

$$\Delta S = \text{součet všech } \frac{\Delta Q}{T'}\,.$$

Nyní se ptáme, kolik entropie náš stroj přijme při přechodu zpět do stavu A. Z předchozích odstavců víme, že vratný stroj pracující pouze mezi dvěma teplotami, kde jedna z nich je 1 K a druhé je nějaké T_1, by v druhé fázi přijal stejné ΔS. Náš komplikovaný stroj sice přijímá tepla při jiných teplotách než T_1, ale každé teplo, které přijme, bychom mohli opět pomocí dalších vratných strojů převést na teplotu T_1 (stejně jako jsme to udělali u teploty $1K$) a zde už je jasné, že součet entropií musí být opět roven ΔS, protože jinak bychom měli dva vratné cykly pracující mezi stejnými dvěma teplotami, ale s různou účinností a to by porušilo druhý zákon.

Zrekapitulujme si tedy výsledek naší argumentace. Ukázali jsme, že libovolně komplikovaný vratný stroj můžeme z pohledu změn entropie vždy převést na stroj pracující pouze mezi dvěma teplotami a pro tento typ strojů jsme dříve dokázali, že celková změna entropie je při každém cyklu nulová. Při vratných dějích se tedy celková entropie nemění a tento výsledek nijak nezávisí na vnitřním mechanismu dějů.

Změny entropie v nevratných dějích Podívejme se nyní, co se stane v případě nevratných dějů. Pokud bychom měli například stroj, ve kterém se vyskytuje nějaké vnitřní tření, pak práce W těchto třecích sil se nevratně přemění na teplo Q. Teplota stroje v ten okamžik je T, jeho entropie proto vzroste o W/T.

Dalším příkladem je vyrovnávání teplot dvou těles s různou teplotou. Až doteď jsme předávali teplo pouze mezi dvěma tělesy s přibližně stejnou teplotou (například náš stroj a rezervoár) a tento přenos jsme považovali za vratný. Co kdybychom však například hodili horký kámen do studené vody? V každý okamžik přejde nějaké malé teplo ΔQ z kamene do vody. Z kamene je teplo odebráno (změna entropie je tedy záporná) při teplotě T_1 a voda ho přijme při teplotě T_2, celková změna entropie tedy je:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}\,.$$

Teplota T_2 je menší než T_1, proto je výsledná změna entropie kladná. Tím jsme vlastně našli jakési matematické vyjádření 2. zákona. Teplo může samovolně přecházet pouze z teplejšího tělesa na studenější a při těchto procesech entropie roste. Proto se někdy můžeme setkat s formulací druhého zákona, která říká: Celková entropie vesmíru vždy roste. Tato formulace sice nijak nebere v úvahu vratné děje, ve kterých se entropie nemění, ale my víme, že prakticky ve všech dějích, se kterými se každý den setkáváme, existují nějaké ztráty. Tyto procesy nejsou dokonale vratné, a proto skutečně můžeme říct, že celková entropie našeho světa roste.

Třetí zákon

Vraťme se nyní na chvíli zpět k naší nové termodynamické teplotě. Zkoumejme, co se bude dít, když budeme nějaké těleso ochlazovat. Už ze základní školy víme, že abychom látku ochladili, musíme jí odebrat teplo, a že toto teplo je úměrné změně teploty. K odebírání tepla můžeme použít například náš vratný stroj, kterému dodáme práci W, a on odebere teplo Q_2 z chladnější látky s teplotou T_2 a předá teplo Q_1 teplejší látce při teplotě T_1. Poměr Q_1/T_1 je roven změně entropie, přičemž Q_1 můžeme vyjádřit pomocí práce a účinnosti jako:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{W}{\eta}\,.$$

Změna entropie je tedy úměrná práci, kterou stroji dodáváme. Pro odebranou entropii z chladnějšího tělesa platí $\Delta S = Q_2/T_2$. Zároveň jsme řekli, že změna teploty je úměrná odebranému teplu, proto samotná odebraná entropie je úměrná podílu $\Delta T/T_2$. Když si uvědomíme, že odebraná entropie je úměrná práci, tak získáme:

$$W \sim \frac{\Delta T}{T_2}\,.$$

Tento náš velký výsledek nám říká, že čím nižší je teplota látky, tím víc práce musíme vykonat, abychom ji ještě více ochladili. Všimněme si, že když se teplota látky bude blížit nule, poroste potřebná práce pro další ochlazení nade všechny meze a při nulové teplotě už nebude možné teplotu nijak snížit. Nulové teplotě se říká *absolutní nula* a její číselná hodnota v Celsiově stupnici je $-273{,}15\,°\mathrm{C}$. Jestliže nemůžeme snížit teplotu, znamená to, že látce při nulové teplotě už nemůžeme odebrat žádné další teplo, a tím pádem ani entropii. Takto jsme intuitivně našli znění 3. termodynamického zákona: Při nulové teplotě už látce nemůžeme odebrat žádné další teplo a její entropie je tedy nejmenší možná.

Počet stavů systému, statistická fyzika

Když jsme studovali změny entropie ve vratných cyklech, všimli jsme si něčeho zvláštního. Při převodu látky ze stavu A do stavu B byla výsledná změna entropie vždy stejná nezávisle na konkrétním mechanismu. Z toho můžeme usoudit, že samotná entropie je závislá pouze na konkrétním stavu látky, a ne na dějích, kterými látka prochází.

Uvažujme dále: zjistili jsme, že při nevratných dějích, kde dochází k výměnám tepla, entropie roste. Pokud je však entropie pouze funkcí stavu, měla by růst i při ostatních nevratných dějích. Jaké děje máme na mysli? Představme si, že do akvária plného vody kápneme menší množství potravinářského barviva. Z počátku se bude barvivo držet pohromadě, ale časem se začne rozptylovat do okolí a když počkáme dost dlouho, obarví rovnoměrně všechnu vodu. Je tento děj vratný? Neboli kdybychom počkali dost dlouho, mohlo by se stát, že by se veškeré barvivo opět nahromadilo do malé kapky? Ze zkušenosti víme, že není, ale k vysvětlení tohoto jevu už nám samotná termodynamika nestačí, musíme se podívat na vnitřní mechanismus látky. Studiem látek na molekulární úrovni se zabývá statistická fyzika.

Chceme tedy látku popisovat jako soubor velkého množství malých částic. V mechanice jsme byli zvyklí popisovat tělesa pomocí jejich polohy a rychlosti. Stačilo pak jen najít působící síly a měli jsme vyhráno. Popisovat tímto způsobem každou z mnoha a mnoha částic např. plynu by bylo velmi nepraktické. Statistická fyzika volí jiný přístup. Místo otázky: „Jakou polohu a rychlost má tato konkrétní částice?“, se ptá např.: „Jak velká část molekul tohoto plynu má rychlost větší než $10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?“, nebo „Jak velké množství barviva se v akváriu rovnoměrně rozptýlí za 1 min?“ Popisuje tedy látku jako celek a dělá to ze statistického hlediska. Samozřejmě, že by se teoreticky mohlo stát, že se všechny molekuly barviva v akváriu najednou vydají na jedno místo a utvoří opět malou kapku, ale pravděpodobnost takového jevu je tak nepředstavitelně malá, že se v přírodě nikdy nerealizuje.

Bohužel v tomto textu nemáme prostor se statistické fyzice věnovat podrobněji, i přesto však uvedeme ještě jeden její zajímavý výsledek týkající se entropie. V termodynamice jsme byli zvyklí popisovat stav látky pomocí veličin jako je tlak, objem a teplota, ale ve statistice máme možnost popsat i její vnitřní stav nazývaný *mikrostav*. Jeden mikrostav představuje jedno konkrétní uspořádání molekul v rámci látky a každé molekule přiřazuje jednu rychlost. Jednomu makrostavu (konkrétní objem, tlak, teplota) proto může odpovídat nepředstavitelné množství mikrostavů. Můžeme si to představit na sklenici vody. Zatímco z vnějšího pohledu vypadá pořád stejně, na molekulární úrovni do sebe jednotlivé částice neustále narážejí, vyměňují si polohy a rychlosti, mikrostav vody ve sklenici se proto mění každým okamžikem. Na konci 19. století Ludwig Boltzmann zjistil, že entropie látek, které jsou v termodynamické rovnováze, je úměrná počtu možných mikrostavů, ve kterých se látka může nacházet. Konkrétně to vyjádřil vzorcem

$$S = k \ln \Omega\,,$$

kde Ω je počet mikrostavů, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$ je Boltzmannova konstanta a funkce $\ln x$ se nazývá přirozený logaritmus. V souvislosti s tímto vzorcem někdy slyšíme, že entropie vyjadřuje *míru neuspořádanosti systému.* Je tomu skutečně tak, čím více mikroskopických stavů může látka obsadit, tím více je chaotičtější a její entropie je tím pádem větší.

Boltzmannův vzorec můžeme využít ještě k spočítání entropie při nulové termodynamické teplotě. Při absolutní nule se látka nachází v jediném stavu odpovídající nejmenší možné energii a její entropie proto je:

$$S = k \ln 1 = 0\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}\,.$$

Třetí termodynamický zákon se tedy někdy uvádí ve tvaru: při absolutní nule je entropie látky nulová.

Vztah mezi oběma definicemi

V souvislosti s termodynamikou jsme mluvili o entropii jako o veličině, která se zachovává při vratných cyklech a roste při všech ostatních dějích. Poté jsme v předchozím odstavci na základě poznatků o vnitřní struktuře látky zavedli úplnější definici, která říká, že entropie je úměrná počtu možných stavů systému. Lze ji tedy chápat i jako míru neuspořádanosti neboli chaosu. Tyto dva poznatky se na první pohled zdají být naprosto odlišné, proto je žádoucí tomuto problému věnovat více pozornosti a lépe ho vysvětlit. Bohužel přesný důkaz, že termodynamická definice plyne z Boltzmannova vzorce, si vyžaduje znalosti pokročilejší matematiky a fyziky, a je tedy nad rámec tohoto textu. Místo toho uvedeme jeden ilustrační příklad, kde dvěma způsoby spočítáme, o kolik se změní entropie ideálního plynu při izotermickém ději. I tento příklad je poněkud komplikovaný, proto následující odstavec uvádíme spíše pro zvídavé čtenáře, kteří buď znají základní zákony ideálního plynu, nebo mají chuť se tomuto problému více věnovat. K vyřešení úlohy v sérii není porozumění následujícího výpočtu vůbec potřebné.

Pokračování pro zvídavé čtenáře Chování ideálního plynu popisuje tzv. *stavová rovnice*:

$$pV = NkT\,,$$

kde N je počet částic v plynu a k je Boltzmannova konstanta. Když necháme plyn s počátečním objemem V_0 (vratně) rozpínat při konstantní teplotě, tak pro jeho objem a tlak bude v libovolný okamžik platit:

$$p = \frac{NkT}{V}\,.$$

Když se plyn rozpíná, koná práci, ale jeho teplota se při tom nemění, proto mu musíme dodat teplo Q, které je rovno právě této vykonané práci. S použitím vysokoškolské matematiky nebo internetu zjistíme, že vykonaná práce (a tedy i dodané teplo) při izotermickém ději je rovna:

$$Q = NkT \ln\left(\frac{V}{V_0}\right).$$

Uvažujme nyní, že se plyn rozepjal na dvojnásobný objem, tedy $V = 2V_0$, a spočítejme změnu entropie. Děj je vratný a probíhá za konstantní teploty, proto dostaneme:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = Nk\ \ln 2\,.$$

Tento výsledek jsme získali s využitím zákonů termodynamiky. Nyní se na úlohu podíváme z pohledu statistické fyziky.

Plyn je soubor N částic, přičemž každá částice se může nacházet v nějakém stavu, stavem zde rozumíme její polohu a rychlost. V plynu nebo v libovolné látce nemají všechny částice stejnou rychlost, jak by se na první pohled mohlo zdát, ale pokud je plyn v termodynamické rovnováze, tak existují zákony, které přesně popisují, kolik částic má jak velkou rychlost. Toto rozdělení je závislé na teplotě. V dějích s konstantní teplotou se proto počet stavů z pohledu rychlostí nezmění. Co se však změní je počet poloh, na kterých se částice mohou nacházet, v našem případě je jich konkrétně dvakrát více (protože máme dvojnásobný objem). Znamená to tedy, že nový počet stavů je 2Ω? Ne, nesmíme zapomenout na pravidla kombinatoriky. Tato úloha je v jistém smyslu podobná úloze, kdy řešíme počet různých kombinací na 3-místném zámku. Na každé pozici může být 10 různých číslic, máme proto $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ možností. Stejně tak, pokud každou částici můžeme umístit na 2krát více pozic, máme celkem 2^Nkrát více stavů! Rozdíl entropií nyní můžeme spočítat pomocí Boltzmannova vzorce:

$$\Delta S = k\ \ln\left(2^N \Omega\right) - k \ln \Omega\,.$$

Tento výsledek vypadá odlišně, z předchozího výpočtu jsme dostali:

$$\Delta S = Nk \ln 2\,.$$

Když si však připomeneme základní pravidla pro práci s logaritmy:

$$\ln\left(x^a\right) = a\ \ln x \qquad\qquad \ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right),$$

tak vidíme, že pomocí jednoduchých úprav dostaneme:

$$\Delta S = k\left(\ln\left(2^N \Omega\right) - \ln \Omega\right) = k\ \ln 2^N\,,$$
$$\Delta S = Nk\ \ln 2\,,$$

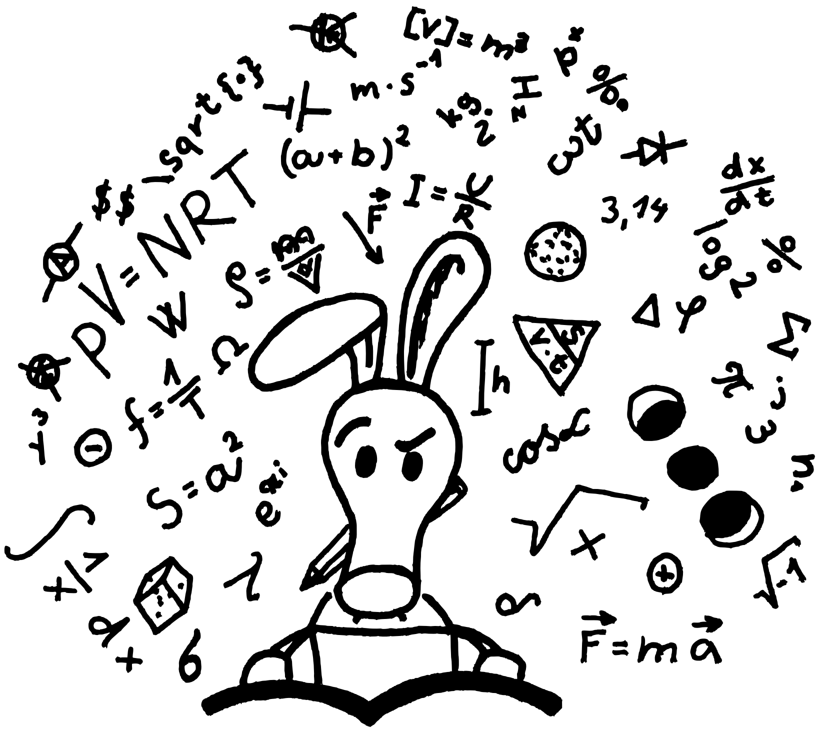
což je stejný výraz, jako jsme odvodili před chvílí.

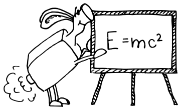
Závěr

V tomto textu jsme podali poněkud rozsáhlejší úvod do oblasti fyziky nazývané termodynamika. Vysvětlili jsme si, co říkají jednotlivé termodynamické zákony, prostudovali jsme základní vlastnosti tepelných strojů, zavedli jsme novou veličinu nazývanou entropie a mnoho dalšího. Přitom jsme dbali na to, abychom ke každému výsledku, který uvádíme, dodali i příslušné argumenty a intuitivní představy, které k tomuto výsledku vedou. Samotná fyzika totiž není o počítání příkladů pomocí vzorečků, ale o získávání nových poznatků o fungování našeho světa. A termodynamika nám přesně tyto poznatky přináší.

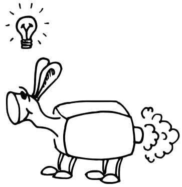
Jiří Kohl
`jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz`

Adam Bretšnajder
`adam.bretsnajder@vyfuk.mff.cuni.cz`


pV=NRT
(a+b)²
m·s⁻¹
3,14
S=a²
f=1/T
I=U/R
F=ma



Řešení IV. série



Úloha IV.1 ... Milionář

5 bodů; průměr 4,00; řešilo 9 studentů

Robert se přihlásil do soutěže Milionář. Soutěžící dostane vždy otázku a čtyři možné odpovědi, z nichž musí vybrat tu správnou, aby postoupil do dalšího kola. Takovýchto kol má soutěž celkem patnáct. Aby to ale nebylo tak přímočaré, má soutěžící možnost jednou využít nápovědu padesát na padesát, díky čemuž pak bude moct u dané otázky vybírat už pouze ze dvou možných odpovědí, jednou zavolat některému ze svých přátel a poprosit ho o radu a jednou nechat hlasovat publikum o tom, která odpověď je správná. Jaká je pravděpodobnost, že Robert odpoví na všechny otázky správně, pokud nebude znát ani jednu správnou odpověď, a navíc využije jen padesát na padesát, neboť nevěří svým přátelům a už vůbec ne divákům?

Pravděpodobnost, že Robert na libovolnou otázku odpoví správně, je právě 1/4 (neboli 25 %), neboť vždy vybírá ze čtyř možností a žádnou možnost neupřednostňuje.

Jedinou výjimkou je otázka, u které využije nápovědu padesát na padesát, pravděpodobnost v tomto případě bude 1/2 (tedy 1/2 = 50 %). Nezáleží na tom, která z otázek to bude, neboť v úloze jsou mezi sebou zaměnitelné (Robert musí odpovědět na úplně všechny správně, takže nezáleží na pořadí otázek). Řekněme tedy, že 50/50 použije hned u první otázky.

Pokud tak použijeme pravidlo součinu pravděpodobností (nezávislých jevů, totiž tipování každé otázky), můžeme vyjádřit celkovou pravděpodobnost úspěchu jako:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{14} \doteq 1{,}9 \cdot 10^{-9} = 1{,}9 \cdot 10^{-7}\,\% \,.$$

Toto je tak nepředstavitelně malé číslo, že bude nejlepší použít analogii: I kdyby se Robert mohl účastnit soutěže každý den svého života (řekněme 80 let), stále by měl šanci na aspoň jednu výhru pouze 0,005 %.

Robert Gemrot
robert@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.2 ... Toaletní problém

5 bodů; průměr 4,63; řešilo 38 studentů

Soňa má dva kocoury, Kosíka a Datlíka. Svůj záchod mají ve stejné místnosti jako Soňa, se svými kocoury se tak na toaletě Soňa občas potká. Kocour Kosík chodí na toaletu s frekvencí $f = 0{,}1875\,\mathrm{h}^{-1}$, *kocour Datlík třikrát denně v pravidelných intervalech a Soňa každých* 192 minut. *Kolikrát za den a v jakých časech se všichni tři potkají, jestliže naposledy se potkali v 10 hodin večer?*

Nejdříve si převedeme všechny periody na stejné jednotky – minuty. Začněme u Kosíka. U něj jako jediného nemáme zadanou periodu, ale frekvenci. Pro frekvenci a periodu platí:

$$T = \frac{1}{f} \,,$$

kde T značí periodu (v jednotkách podle jednotky frekvence) a f frekvenci. Známe Kosíkovu frekvenci $f_1 = 0{,}187\,5\,\mathrm{h}^{-1}$. S pomocí našeho vzorce tedy zjistíme, že perioda $T_1 = 16/3\,\mathrm{h} = 320\,\mathrm{min}$ (pro převedení údaje na minuty stačí periodu v hodinách vynásobit $60\,\mathrm{min{\cdot}h}^{-1}$).

Nyní se můžeme přesunout ke kocourovi Datlíkovi. U něj víme, že na záchod chodí třikrát za den v pravidelných intervalech. Den je dlouhý $t = 24\,\mathrm{hod} \cdot 60\,\mathrm{min{\cdot}h}^{-1} = 1\,440\,\mathrm{min}$. Datlíkova perioda tak bude $T_2 = 1440/3\,\mathrm{min} = 480\,\mathrm{min}$.

Zbývá nám už jen Soňa. U ní máme periodu zadanou v námi požadovaných minutách: $T_3 = 192\,\mathrm{min}$. Stačí nám tedy spočítat, v jakých časových intervalech se nám "potkají" všechny tři periody T_1, T_2 i T_3. K tomu můžeme využít matematickou funkci, kterou nazýváme „nejmenší společný násobek“. Když do ní zadáme několik přirozených čísel, tak nám tato funkce vrátí nejmenší přirozené číslo, které je dělitelné beze zbytku všemi čísly, které jsme do funkce zadali. Tuto funkci nejčastěji značíme $\mathrm{nsn}(x)$.

Víme, že nejkratší interval bude takový, když bude beze zbytku dělitelný jak T_1, tak i T_2 a T_3 – v jednom našem časovém intervalu musí všechny tři periody uběhnout celočíselněkrát. Použijeme tedy naši funkci nejmenšího společného násobku a získáme:

$$\mathrm{nsn}(T_1; T_2; T_3) = \mathrm{nsn}(320; 480; 192) = \mathrm{nsn}(2^6 \cdot 5; 2^5 \cdot 3 \cdot 5; 2^6 \cdot 3)$$
$$\mathrm{nsn}(T_1; T_2; T_3) = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960\,\mathrm{min}\,.$$

Díky tomuto jsme tedy zjistili, že se na záchodě budou všichni tři potkávat s periodou $T_\Sigma = 960\,\mathrm{min}/60\,\mathrm{min} \cdot \mathrm{h}^{-1} = 16\,\mathrm{h}$. Pokud se tedy naposledy potkali v deset hodin večer, znovu se všichni tři setkají v 14 hodin následujícího dne a poté znovu v 6 a 22 hodin dne třetího. Všimněme si, že po dvou dnech (mezi prvním a třetím dnem uběhnou dny dva) se znovu začne opakovat cyklus 22 $\rightarrow$ 14 $\rightarrow$ 6 $\rightarrow$ 22 hodin. Můžeme tak říci, že na záchodě se všichni potkají třikrát za dva dny, a to postupně v časech 22, 14 a 6 hodin. Pokud bychom chtěli říci, kolikrát se průměrně všichni na záchodě potkají za jeden den, tak pokud je to třikrát za dva dny, pak za jeden den je to průměrně jedenapůlkrát (jednou za dva dny je to jednou a podruhé dvakrát – aritmetický průměr z jedničky a dvojky je 1,5).

Václav Verner
vasek@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... Orient expres

6 bodů; průměr 5,87; řešilo 30 studentů

Parní vlak si s sebou veze $10\,\mathrm{t}$ *černého uhlí. Výhřevnost černého uhlí je* $20\,\mathrm{MJ/kg}$*, parní stroj ovšem dosahuje ve spalování účinnosti jen* $8\,\%$*. Aby náš vlak překonal veškerý odpor, musí vykonávat sílu* $100\,\mathrm{kN}$ *(pro jednoduchost je tento odpor konstantní, nezávislý na hmotnosti uhlí). Jak daleko dokáže tento vlak na* $10\,\mathrm{t}$ *černého uhlí dojet? Kolik uhlí by bylo třeba, aby dojel z Prahy do Brna, tedy ujel vzdálenost* $257\,\mathrm{km}$*?*

Na začátku si musíme uvědomit, jakou veličinu vlastně potřebujeme zjistit. Potřebujeme si vypočítat práci, jakou dokáže vlak vykonat při spálení $10\,\mathrm{t}$ uhlí v parním stroji s účinností $8\,\%$, jestliže je výhřevnost uhlí $20\,\mathrm{MJ\cdot kg^{-1}}$. Tuto práci W zjistíme jednoduše tak, že si vypočítáme 8 % z maximální energie uvolněné při spálení 10 t uhlí.

$$\begin{aligned} 10\,\mathrm{t} &= 10\,000\,\mathrm{kg} \\ 20\,\mathrm{MJ\cdot kg^{-1}} &= 20\,000\,000\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}} \\ W &= 20\,000\,000\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}} \cdot 10\,000\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}08 \end{aligned}$$

Práce, jakou je vlak schopný vykonat spálením 10 t uhlí, činí 16 GJ, tedy 16 000 000 000 J. Z jiného vzorce pro práci víme, že vykonaná práce je rovna součinu vykonávané síly a uražené dráhy:

$$W = F \cdot s\,.$$

Náš vlak neustále působí silou F, která činí 100 kN, tedy 100 000 N. Pro zjištění dráhy, kterou může díky 10 t uhlí ujet, nám tedy stačí vydělit práci W silou F.

$$\begin{aligned} s &= \frac{W}{F} \\ s &= \frac{16\,\mathrm{GJ}}{100\,\mathrm{kN}} \\ s &= 160\,000\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Vlak je schopen na 10 t uhlí ujet 160 000 m, tedy 160 km.

U druhé otázky použijeme stejné vzorce, jen máme jiné vstupní údaje. Opět začneme výpočtem práce W, ale tentokrát ji nazveme třeba W_1 (neměli bychom používat stejná označení pro různé údaje). Práci W_1 získáme jednoduše ze základního vztahu $W = F \cdot s$ vynásobením dráhy 257 000 m silou $F = 100\,\mathrm{kN}$.

$$W_1 = 257\,\mathrm{km} \cdot 100\,\mathrm{kN} = 25{,}7\,\mathrm{GJ}\,.$$

Tuto práci W_1 nám už jen stačí vydělit výhřevností uhlí a účinností parního stroje, abychom zjistili hmotnost nutného množství uhlí m.

$$m = \frac{25{,}7\,\mathrm{GJ}}{20\,\mathrm{MJ\cdot kg^{-1}} \cdot 0{,}08} \doteq 16\,000\,\mathrm{kg}$$

Aby vlak dojel z Prahy do Brna, stačilo by mu vést si něco málo přes 16 t uhlí.

Adam Bretšnajder
adam.bretsnajder@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... Žhavá lavička

6 bodů; průměr 5,65; řešilo 17 studentů

Lukáš seděl při parném letním odpoledni v parku a čekal na kamarády. Bylo takové vedro, až se Lukáš podivil, že se lavička, na kterou již od rána svítilo slunce, ještě neroztavila. Hned si však uvědomil, že lavička teplo nejen přijímá, ale také odevzdává. Lukáše tato úvaha zaujala, a tak se rozhodl spočítat, na jaké hodnotě by se teplota lavičky měla ustálit. Ví, že ze Slunce dopadá na jeden metr čtvereční výkon 1 360 W, a také ví, že intenzitu tepelného záření, které vyzařuje lavička, může vypočítat pomocí Stefanova-Boltzmannova zákona

$$I = \sigma T^4\,,$$

kde $\sigma \doteq 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^2{\cdot}K^{-1}}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a T je teplota v kelvinech. Dále Lukáš odhadl, že sluneční záření dopadá na polovinu povrchu lavičky a že přenos tepla mezi lavičkou a vzduchem odebere lavičce čtvrtinu[7] dopadajícího výkonu. K jaké teplotě by měl Lukáš výpočtem dojít?

Označme si povrch lavičky S. Má-li dojít k její tepelné rovnováze, musí se vyrovnat výkon odevzdaného a přijatého tepla lavičky a okolí. Pro získání celkového dopadajícího výkonu na lavičku vynásobíme jednotkový plošný výkon P_0 plochou její osvětlené části. To samé platí i u výpočtu výkonu z intenzity tepelného záření. Využijeme ještě faktu, že osvětlená je jen polovina povrchu lavičky a že vzduch odebere čtvrtinu přijaté energie. Získáme rovnici

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{in}} &= P_{\mathrm{out}}\,,\\ P_0\frac{S}{2} &= \frac{1}{4}P_0\frac{S}{2} + IS\,,\\ \frac{P_0}{2} &= \frac{P_0}{8} + \sigma T^4\,,\\ T &= \sqrt[4]{\frac{3}{8}\frac{P_0}{\sigma}}\,. \end{aligned}$$

Po dosazení nesmíme zapomenout, že jsme získali termodynamickou teplotu, tudíž od výsledku musíme odečíst cca 273 stupňů.

$$t \doteq T - 273^\circ = 308 - 272\,^\circ\mathrm{C} = 35\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

Patrik Kašpárek
`patrik@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.5 ... Milionářská párty

7 bodů; průměr 6,58; řešilo 19 studentů

Robertovi se podařilo vyhrát v soutěži Milionář, aniž by znal jedinou správnou odpověď (musel tipovat). Za výhru uspořádal velkou párty v bazénu. Rozlil hostům poslední jahodový mošt ze skleněné lahve válcového tvaru o objemu $V = 1\,\mathrm{l}$, jejíž stěny mají zanedbatelnou tloušťku, když ho v tu chvíli napadlo, že ji může využít k fyzikálnímu experimentu.

Zavřel lahev a ponořil se ke dnu bazénu, jehož hloubka je $h = 2\,\mathrm{m}$.

1. *Jaká vztlaková síla působila na plně ponořenou lahev? Měnila se tato síla s hloubkou?*
2. *Jak velký hydrostatický tlak pociťovala lahev na dně bazénu?*
3. *Robert pak držel hrdlo lahve směrem dolů a lahev otevřel tak, že z ní neunikl žádný vzduch, ale natekla do ní voda. Jaký objem vody natekl do lahve?*

Předpokládejte, že vzduch v lahvi zůstane při stejné teplotě, protože voda přebytečné teplo odvede. Atmosférický tlak je za normálních podmínek roven $p_\mathrm{A} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$.
Nápověda: Může vám pomoci stavová rovnice ideálního plynu. Ta dává do vztahu tlak p, objem plynu V a jeho teplotu T:

$$\frac{pV}{T} = nR\,,$$

[7] To zhruba platí v určitých případech pro okolní teplotu 20°C.

kde n je látkové množství plynu v molech a R je molární plynová konstanta. Pokud se teplota plynu při ději nemění, je součin $pV = \mathrm{konst}$, a je tedy na začátku děje stejný jako na jeho konci.

1. Vzorec pro výpočet vztlakové síly získáme ze známé Archimedovy poučky: velikost síly, která nadnáší těleso, se rovná velikosti tíhové síly, která působí na kapalinu o objemu, který je stejný jako objem ponořené části tělesa. V naší úloze je lahev celá ponořená ve vodě, hledaná síla tedy má stejnou velikost jako tíhová síla působící na vodu o objemu $V = 1\,\mathrm{l}$.

$$F_{\mathrm{vz}} = mg$$
$$F_{\mathrm{vz}} = V\rho g \doteq 9{,}8\,\mathrm{N}\,,$$

   kde $\rho \doteq 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vody. Dokud je lahev ponořená celá, síla není hloubkou nijak ovlivňována (už samotná Archimedova poučka hloubku nijak nezmiňuje).

2. Vztah pro výpočet hydrostatického tlaku si můžeme buď najít v tabulkách, nebo použijeme jednoduchou úvahu: na těleso tlačí svou tíhou vodní sloupec, který se nachází nad tělesem. Výška sloupce je pak rovna hloubce h, ve které je naše těleso, a sloupec má stejný vodorovný průřez jako těleso, označme ho S. Voda pak na lahev působí silou:

$$F = mg = hS\rho g\,.$$

   Když si uvědomíme, že tlak je síla vztažená na jednotku plochy, tak dostaneme vztah, který nalezneme v tabulkách.

$$p = h\rho g \doteq 19{,}6\,\mathrm{kPa}$$

   Tato argumentace obsahuje jednu důležitou nepřesnost – nevíme nic o tvaru ani prostorové orientaci lahve. Vzhledem k tomu, že povrch lahve je pokřivený, nachází se jednotlivé body povrchu v různé hloubce a působící síla pak není $F = hS\rho g$. V naší úloze tento problém můžeme ignorovat, protože zadání se nás v podstatě ptá na hydrostatický tlak v hloubce h, a to náš vzorec popisuje správně.

3. Vyjdeme ze stavové rovnice pro ideální plyn:

$$pV = nRT\,.$$

   Žádný vzduch z láhve neunikl a teplota vzduchu se rovněž nezměnila, proto jediné veličiny, co se změní, jsou objem V a tlak p. Nad hladinou bazénu pociťoval vzduch v lahvi pouze atmosférický tlak a už jsme spočítali, že pod vodou je tlak větší, neboť tam přibude navíc hydrostatický tlak. Zůstává otázka, jak ho započítat. K tomu použijeme stejný argument, jako v předchozí úloze – atmosférický tlak je způsoben tíhou sloupce vzduchu nad námi, při výpočtu síly F tedy sčítáme tíhu vzduchu a vody. Dělením síly plochou dostaneme, že výsledný tlak pod vodou je roven součtu atmosférického a hydrostatického tlaku. Stavová rovnice popisující vzduch v lahvi pod vodou tedy má tvar:

$$(p_{\mathrm{A}} + p)V_2 = nRT\,.$$

Ale řekli jsme, že n a T (a samozřejmě ani R jakožto molární plynová konstanta) se nemění a nad hladinou byl tlak $p_\mathrm{A} = 101\,\mathrm{kPa}$ a objem $V = 1\,\mathrm{l}$, proto je:

$$(p_\mathrm{A} + p)V_2 = p_\mathrm{A} V$$
$$V_2 = \frac{p_A}{p + p_\mathrm{A}} V\,.$$

Objem vzduchu se tedy zmenšil o $\Delta V = V - V_2$ a právě tento uvolněný objem zaplnila voda. Výsledek tedy je:

$$\Delta V = V - \frac{p_\mathrm{A}}{p + p_\mathrm{A}} V$$
$$\Delta V = \frac{h\rho g}{h\rho g + p_\mathrm{A}} V = 0{,}16\,\mathrm{l}\,.$$

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.E ... Stabilita nápojového kartonu

7 bodů; průměr 5,11; řešilo 19 studentů

Marco s Kačkou jeli ve vlaku a pili mléko z nápojového kartonu. Uvědomili si, že když je karton plný, otřesy vlaku jej převrhnou mnohem snáze, než když už bude trochu mléka upito.

Vaším úkolem bude vzít si uzavíratelný karton ve tvaru kvádru (např. od mléka nebo džusu) a zkoumat jeho stabilitu. Pro alespoň deset různých (počátečních) výšek kapaliny v kartonu určete úhel, o který jej můžete naklonit, než se převrhne. Měření opakujte vícekrát. Určení výšky kapaliny v kartonu necháváme na vás (lze např. kapalinu vážit nebo nalévat daný objem).

Co nejpřesněji určete, pro jakou výšku kapaliny je nápojový karton nejstabilnější. Pokuste se k vašemu řešení přiložit nějaké fotografie. Nezapomeňte taktéž specifikovat rozměry kartonu a další relevantní parametry.

Teorie experimentu

Za stabilní polohu jakéhokoli tělesa můžeme považovat stav, kdy se po mírném vychýlení vrátí zpět do původní polohy. Energii, kterou je třeba vynaložit, aby těleso takovou polohu opustilo, nazýváme stabilitou tělesa. Další takovou možnou polohou je poloha labilní, pro kterou platí, že se po mírném vychýlení přesune do jiné stabilní polohy. V našem případě je labilní polohou situace, kdy se těžiště celého tělesa nachází nad osou rotace. V případě prázdného kartonu se těžiště nachází přibližně ve středu, pokud předpokládáme, že jsou všechny stěny přibližně stejně tlusté. Pro úhel, který při labilní poloze svírají stěny kartonu a vodorovná rovina, by tak mělo platit:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_0}{a}\,,$$

kde h_0 je výška kartonu a $a \cdot b$ rozměry podstavy kartonu s tím, že jej překláníme po straně b. Úhel jsme zvolili tak, aby při stabilní poloze byl roven $90\,°$. Pokud však přidáme do kartonu kapalinu, poloha těžiště se změní. Posun závisí jednak na hmotnosti kapaliny, jednak na poloze těžiště kapaliny samotné. V případě, že by byl karton plný, by těžiště kartonu i kapaliny splývala a úhel by byl shodný s úhlem při prázdném kartonu. Největší vliv tedy na stabilitu bude kapalina mít při menším množství, jehož teoretické určení by bylo příliš složité.

Principem úlohy je experimentálně určit závislost úhlu náklonu při labilní poloze na počáteční výšce kapaliny. Výšku kapaliny je však těžké určit kvůli neprůhlednosti kartonu. Proto můžeme odměřit určitý objem ΔV, který přidáváme do kartonu, z čehož určíme přidanou výšku Δh:

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{ab}\,.$$

Praktičtější však bude změřit před každým měřením hmotnost kartonu m a od ní odečíst hmotnost prázdného kartonu m_0. Výšku hladiny kapaliny pak odvodíme:

$$m = m_0 + V\rho = m_0 + abh\rho\,,$$
$$h = \frac{m - m_0}{ab\rho}\,.$$

Problém výpočtu úhlu náklonu spočívá ve skutečnosti, že kapalina bude s náklonem tvar měnit z trojbokých hranolů na čtyřboké až pětiboké, přičemž k výpočtu polohy jejich těžiště je zapotřebí složitějších matematických operací. Jednodušší je tedy určovat jej experimentálně.

Měření

Začneme nejprve s prázdným kartonem, změříme jeho výšku a rozměry podstavy (tyto hodnoty budou relativně nepřesné, protože žádný karton není dokonalý kvádr). Poté jej opřeme o držák zkonstruovaný tak, že tlačí na horní část kartonu, a pohybujeme s ním směrem ke kartonu do doby, kdy již začne samovolně padat. V této chvíli hledáme labilní polohu, kdy se ještě mírně opírá o držák, avšak při slabším postrčení přepadne. Úhloměrem změříme úhel mezi stěnami kartonu a vodorovnou podložkou. Následně karton zvážíme. Postupně přidáváme po malém množství vody a celý postup opakujeme. Karton bychom měli překlápět po delší straně, jelikož se převrátí snadněji. Rozměry a hmotnost prázdného kartonu jsou zaznamenány v tabulce 1.

	Průměr	Abs. odchylka	Rel. nejistota
Výška h_0	225 mm	5 mm	2,2 %
Strana a	63 mm	2 mm	3,2 %
Strana b	75 mm	2 mm	2,7 %
Hmotnost m_0	33 g	0,5 g	1,5 %

Tab. 1: Specifikace kartonu

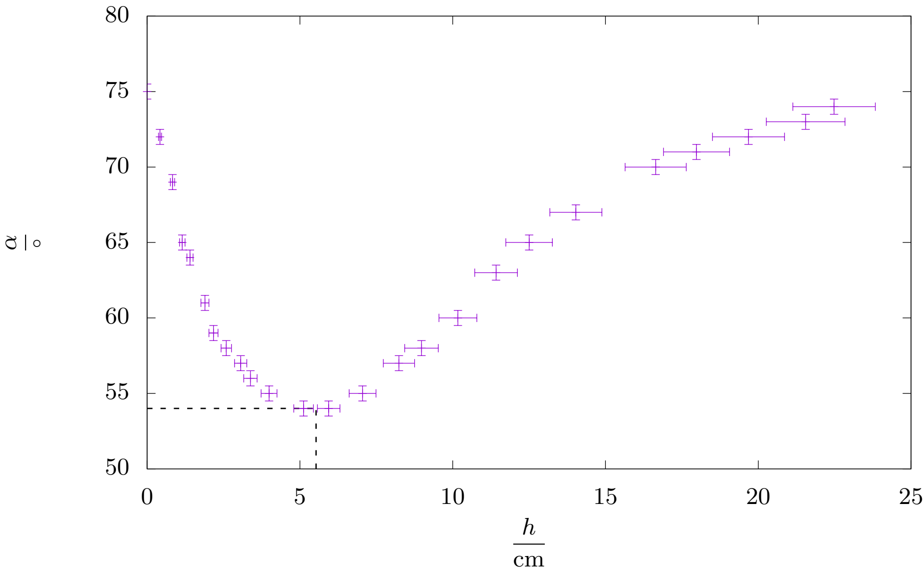
Tyto rozměry jsou zapotřebí k tomu, abychom mohli vypočítat klidovou výšku hladiny vody pomocí hmotnosti kartonu ze vztahu:

$$h = \frac{m - m_0}{ab\rho}\,.$$

Budeme počítat s hustotou vody $\rho = 0{,}997\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Absolutní odchylka vah bude vždy stejná, a to $\Delta m = 0{,}5\,\mathrm{g}$ (polovina nejmenšího dílku). Výpočet odchylky výšky se může zdát poněkud problematický, nicméně pokud si rozdělíme zlomek na čitatele $M = m - m_0$ a jmenovatele $x = ab\rho$, můžeme vypočítat jejich relativní nejistotu a z toho už si lehce odvodíme relativní nejistotu h. Vypočtěme je tedy:

$$\Delta M = \Delta m + \Delta m_0 = 2\Delta m$$
$$\delta M = \frac{\Delta M}{\bar{M}} = \frac{2\Delta m}{m - m_0}$$
$$\delta x = \delta a + \delta b$$
$$\delta h = \delta M + \delta x = \frac{2\Delta m}{m - m_0} + \delta a + \delta b$$
$$\Delta h = \delta h \cdot \bar{h} = \frac{2\Delta m + (\delta a + \delta b)(m - m_0)}{ab\rho}\,.$$

Chybí už jen absolutní odchylka úhlu. Jelikož úhloměr měří na jednotky stupňů, bude se odchylka vždy rovnat $\Delta\alpha = 0{,}5\,^\circ$. Naměřené hodnoty i s výškami a jejich odchylkami jsou zanesené v tabulce 2 a výsledná závislost je vidět v grafu 2 se zvýrazněnou hodnotou minima.



Obr. 2: Závislost úhlu náklonu na výšce hladiny

N	$\frac{m}{\mathrm{g}}$	$\frac{h}{\mathrm{cm}}$	$\frac{\Delta h}{\mathrm{cm}}$	$\frac{\alpha}{\circ}$
1	33	0,00	0,00	75
2	53	0,42	0,05	72
3	72	0,83	0,07	69
4	87	1,15	0,09	65
5	99	1,40	0,10	64
6	122	1,89	0,13	61
7	135	2,17	0,15	59
8	155	2,59	0,17	58
9	177	3,06	0,20	57
10	192	3,38	0,22	56
11	221	3,99	0,26	55
12	274	5,12	0,32	54
13	313	5,94	0,37	54
14	365	7,05	0,44	55
15	421	8,24	0,51	57
16	456	8,98	0,55	58
17	512	10,17	0,62	60
18	571	11,42	0,70	63
19	622	12,50	0,76	65
20	694	14,03	0,85	67
21	817	16,64	1,00	70
22	880	17,98	1,08	71
23	960	19,68	1,18	72
24	1048	21,55	1,29	73
25	1092	22,48	1,35	74

Tab. 2: Naměřené hodnoty pro labilní polohu kartonu

Závěr

Naměřili jsme závislost úhlu náklonu kartonu při labilní poloze na výšce kapaliny ve svislé poloze. Minimální hodnota úhlu náklonu, a tedy nejstabilnější situace, činí zhruba $\alpha_{\mathrm{MIN}} = 54\,^\circ$, což odpovídá výšce hladiny mezi 12. a 13. měřením. Zprůměrováním získáváme odhad výšky hladiny, při které je karton nejstabilnější:

$$\bar{h} \doteq \frac{h_{12} + h_{13}}{2} = 5{,}5\,\mathrm{cm}\,,$$

přičemž absolutní odchylka činí:

$$\Delta h = \Delta h_{12} + \Delta h_{13} = 0{,}7\,\mathrm{cm}\,.$$

Karton je tedy nejstabilnější při výšce:

$$h = (5{,}5 \pm 0{,}7)\ \mathrm{cm}\,,$$

což odpovídá téměř čtvrtině výšky celého kartonu. Jak si můžeme všimnout z tvaru křivky, plný karton musíme otočit o stejný úhel jako prázdný, což odpovídá teorii.

Přesnost experimentu mohla být ovlivněna především „nedokonalostí“ kartonu jako kvádru. Navíc se stěny s přibývající vodou více prohýbají, a tím pádem se mění předpokládaná výška. Další roli hraje uzávěr kartonu. Nepřesnosti mohla způsobit i nemožnost přesného měření při labilní poloze kartonu nebo tvar vnitřních stěn.

Další možností, jak zjišťovat výšku hladiny v kartonu, je nalévání určitého objemu kapaliny. Zde by však vznikaly další nepřesnosti, například při vylití části objemu mimo karton nebo u nepřesných odměrných nádob.

Tomáš Patsch
patscht@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.V ... Fotonická plachetnice

7 bodů; průměr 5,00; řešilo 15 studentů

Zkusme si na chvíli představit, že se nám energetickou a environmentální krizi podaří úspěšně překonat. Přenesme se do budoucnosti, ve které má lidstvo k dispozici vyspělé technologie a prakticky neomezené množství energie, a zkusme se zamyslet, jak by mohla vypadat fotonická plachetnice s lidskou posádkou.

1. *Mějme fotonickou plachetnici s hmotností (vč. plachty) $m = 2\,000\,\mathrm{t}$, která se pohybuje rychlostí $0{,}2\,\mathrm{c}$. Jakou má tato plachetnice (relativistickou) kinetickou energii? Jak by nejspíš dopadla planeta, ke které by mířila, kdyby se ji nepodařilo zabrzdit? Doporučujeme srovnání s jaderným výbuchem přes ekvivalent TNT.*

2. *Nyní již počítejme pro jednoduchost nerelativisticky. Plachetnici urychlujme konstantní silou po vzdálenost s. Odvoďte vztah pro rychlost plachetnice v na konci urychlování. Tato rychlost bude záviset na velikosti působící síly F a hmotnosti plachetnice m (najděte obecný vztah mezi veličinami, nepočítejte s konkrétními číselnými hodnotami jako v minulém příkladě). Počáteční rychlost plachetnice je nulová.*

3. *Uvažujme laser o výkonu P. Jaká síla bude na plachetnici působit v závislosti na tomto výkonu? Nápověda: Zkuste upravit vztah ve Výfučtení. Energii jednoho fotonu spočítáme jako $E = hc/\lambda$.*

4. *Mějme laser o výkonu* $P = 10\,\mathrm{PW}$, *který fotonickou plachetnici dokáže efektivně urychlovat až na vzdálenost* $s = 10 \cdot 10^{11}\,\mathrm{km}$. *Jakou rychlost plachetnice získá? Za jak dlouho doletí k našemu nejbližšímu hvězdnému sousedovi?*

1. Relativistickou kinetickou energii spočítáme dosazením hodnot uvedených v zadání do vzorce, který se objevil ve Výfučtení.

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) mc^2$$

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}2^2}} - 1\right) \cdot 2 \cdot 10^6\,\mathrm{kg} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2$$

$$E \doteq 3{,}71 \cdot 10^{21}\,\mathrm{J}$$

Abychom získali lepší představu o tom, jak nepředstavitelně velké toto množství energie je, porovnáme jej nejprve s výbuchem plutoniové jaderné pumy Fat Man, která byla svržena na Nagasaki. Hodí se vědět, že při jejím výbuchu se uvolnila energie E_1 odpovídající výbuchu 22 000 t TNT a že při výbuchu jedné tuny TNT se uvolní energie $E_{\mathrm{tTNT}} = 4{,}184\,\mathrm{GJ}$. Dostaneme tedy následující koeficient:

$$k = \frac{E}{E_1} = \frac{3{,}71 \cdot 10^{21}\,\mathrm{J}}{22\,000\,\mathrm{t} \cdot 4{,}184\,\mathrm{GJ{\cdot}t^{-1}}} \doteq 40\ 000\ 000 = 4 \cdot 10^7\,.$$

Na první pohled je vidět, že při dopadu by se uvolnilo o mnoho řádů více energie než při svržení jaderné pumy na Japonsko. Dopad nelze srovnávat ani s výbuchem Car-bomby, nejsilnější termonukleární pumy, která kdy byla odpálena. Při dopadu by se totiž uvolnilo asi jen o dva řády méně energie než při dopadu asteroidu, o kterém se spekuluje, že vyhubil dinosaury. Dá se tedy předpokládat, že by byl dopad fotonické plachetnice uvedených parametrů pro cílovou planetu skutečně devastující. Nejspíš by ovlivnil podmínky na jejím povrchu v globálním měřítku na dlouhé dekády. Naše plachetnice tak v mnohém připomíná spíše ultimátní zbraň totální planetární destrukce a je otázkou, nakolik by bylo rozumné ji nasměrovat na potenciálně obydlený svět.

2. Rychlost plachetnice v na konci urychlování bude součin zrychlení a a času t, po který bude plachetnice urychlována. Také víme, že pro dráhu tohoto rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu platí vztah $s = at^2/2$. A konečně zrychlení si také můžeme vyjádřit

jako podíl působící síly F a hmotnosti plachetnice. Hledaný vztah dostaneme dosazením do těchto elementárních vztahů pro pohyb a sílu po následném vyjádření rychlosti:

$$\begin{aligned} v &= at \\ v^2 &= a^2t^2 \\ v^2 &= a \cdot 2s \\ v^2 &= \frac{2Fs}{m} \\ v &= \sqrt{\frac{2Fs}{m}}\,. \end{aligned}$$

3. Celkový výkon laseru P získáme vynásobením energie jednoho fotonu E_0 počtem fotonů, který dopadne na povrch plachty fotonické plachetnice za jednu sekundu. Tento počet jsme si už ale ve Výfučtení vyjádřili jako součin plošné hustoty dopadajících fotonů n a plochy plachty S.

$$P = \frac{hc}{\lambda} nS$$

Všimněme si, že se tento vztah nápadně podobá vztahu pro sílu ve Výfučtení, který jsme měli upravit. Konkrétně vidíme, že podíl veličin hSn/λ si nyní můžeme vyjádřit jako P/c. Po dosazení dospějeme k překvapivě velmi jednoduchému a elegantnímu vztahu pro sílu ve tvaru

$$F = \frac{2P}{\mathrm{c}}.$$

Protože c je konstanta, můžeme si být jisti, že už se nám jej více zjednodušit nepodaří.

4. Ve druhém a třetím úkolu jsme si připravili důležité vztahy pro rychlost plachetnice v závislosti na její hmotnosti, působící síle a vzdálenosti, po které síla působí. Teď se nám podařilo si vyjádřit sílu v závislosti na výkonu laseru. Když tento poslední vztah dosadíme do vztahu pro rychlost, dostaneme přesně ten vzorec, který potřebujeme pro výpočet rychlosti v závislosti na konkrétních zadaných veličinách. Dosadíme do něj konkrétní hodnoty a dopočítáme výslednou rychlost fotonické plachetnice.

$$v = \sqrt{\frac{4Ps}{mc}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 10^{15}\,\mathrm{W} \cdot 10 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}}{2 \cdot 10^6\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}} \doteq 2{,}58 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Vyšla nám hodnota odpovídající asi 85 % rychlosti světla. Je tedy potřeba si uvědomit, že skutečná hodnota by se kvůli relativistickým jevům od té, co jsme spočítali, podstatně lišila. Na druhou stranu nám celou dobu nešlo ani tak o spočítání přesného čísla, jako spíš o ověření toho, jestli existuje kombinace parametrů, která nám umožní urychlit fotonickou plachetnici s lidskou posádkou až na rychlost blízkou rychlosti světla. To se nám podařilo.

Na závěr zbývá provést výpočet doby letu k nejbližší hvězdě – Proximě Centauri. Ta je od Sluneční soustavy vzdálená 4,22 ly. Vypočítanou rychlostí by k ní tedy let trval přibližně $t = 4{,}22\,\mathrm{ly}/(0{,}86\,\mathrm{c}) \doteq 5\,\mathrm{let}$. Pro posádku plachetnice by však takový let trval kvůli relativistickým jevům asi poloviční dobu.

Viktor Materna
materna@vyfuk.mff.cuni.cz

Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
1.	*Eliška Knopfová*	Bratrská škola, Praha 7	5	5	6	–	–	3	–	**19**	**59**
2.	*Emma Burešová*	Jiráskovo G, Náchod	2	5	6	–	–	2	–	**15**	**40**
3.	*Václav Prachař*	G, Omská, Praha	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**9**
4.	*Dat Nguyen*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
5.	*Anežka Prachařová*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**3**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
1.	*Petr Barták*	Slovanské G, Olomouc	5	5	6	–	4	5	–	**25**	**107**
2.	*Lucie Kohoutková*	Masarykovo G, Plzeň	5	5	–	–	–	5	2	**17**	**76**
3.	*Alžběta Sochorová*	G, Blovice	5	4	–	–	–	–	–	**9**	**50**
4.	*Petr Urválek*	ZŠ Sokolovská, Mnichovo Hradiště	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**38**
5.	*Zuzana Kýrová*	ZŠ nám. Svornosti, Brno	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**37**
6.	*Julie Krčmařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	1	4	–	–	–	–	–	**5**	**34**
7.	*Juraj Štefina*	CZŠ sv. Gorazda, Prešov	4	5	5	–	–	1	–	**15**	**33**
8.	*Eva Kundratová*	ZŠ Komenského II Zlín	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**31**
9.	*Lukáš Hobza*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**23**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
1.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	7	6	7	**37**	**145**
2.	*Lucie Endlová*	G O. Havlové, Ostrava	–	4	6	6	7	6	2	**31**	**130**
3.	*Jan Herzig*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	4	6	6	7	5	2	**30**	**111**
4.	*Kamilo Tomáš*	G Jana Keplera, Praha	–	4	6	6	7	5	6	**34**	**91**
5.	*Vojtěch Černý*	G Jana Keplera, Praha	–	4	6	6	7	–	–	**23**	**74**
6.	*Marie Steinhauserová*	ZŠ Strmilov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**45**
7.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**44**
8.	*Natálie Jochová*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**33**
9.	*Michaela Urbanová*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**31**
10.	*Božena Lednická*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**30**
11.	*Pavel Křivý*	G a SOŠ, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**27**
12.	*Petra Šilerová*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
13.	*Lenka Hromádková*	G, Hlinsko	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**14**
14.	*Elen Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**7**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
1.	*Stela Srpová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
2.	*Lada Srpová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	6	7	6	7	**37**	**151**
3.	*Veronika Menšíková*	Arcibiskupské G, Praha	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**144**
4.	*Jiří Preč*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	5	6	6	7	7	6	**37**	**140**
5.	*Damian Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	7	6	7	**37**	**138**
6.	*Ludmila Šírová*	Mensa G, Praha 6	–	4	6	6	7	5	6	**34**	**135**
7.	*Patrik Pöschl*	ZŠ Školní ul., Hrádek nad Nisou	–	5	6	6	7	7	6	**37**	**126**
8.	*Vojtěch Zielina*	G, Třinec	–	5	5	4	7	6	7	**34**	**125**
9.	*Helena Muchová*	G Jana Keplera, Praha	–	5	4	6	7	–	–	**22**	**100**
10.	*Filip Černý*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	6	4	7	3	–	**25**	**78**
11.	*Mark Joly*	G, Havlíčkův Brod	–	5	6	4	5	–	3	**23**	**75**
12.	*Vojtěch Janáček*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**73**
13.	*Ester Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	–	5	6	6	7	–	–	**24**	**65**
14.	*Mikuláš Vlčan*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	4	6	–	–	–	–	**10**	**63**
15.	*Tereza Nejezchlebová*	G Dašická, Pardubice	–	3	6	–	4	5	–	**18**	**61**
16.	*Jana Jackaninová*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**58**
17.–18.	*Jindřich Anderle*	G, Budějovická, Praha	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**46**
17.–18.	*Sofie Prchalová*	G, Šumperk	–	5	6	–	–	–	0	**11**	**46**
19.	*Michal Dobrovolný*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**44**
20.	*Vít Novák*	ZŠ Chyšky	–	4	6	–	–	–	–	**10**	**43**
21.–22.	*Natálie Kamenická*	ZŠ E.Krásnohorské, Ústí nad Labe	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**40**
21.–22.	*Šimon Mach*	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**40**
23.	*Jana Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	6	–	–	–	–	**6**	**38**
24.	*Marie Sára Stejskalová*	G Na Pražačce, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**35**
25.–27.	*Nikola Jarošová*	ZŠ a MŠ Dolní Loučky	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**32**
25.–27.	*Vojtěch Novosad*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**32**
25.–27.	*Tomáš Řehák*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**32**
28.	*Alexander Spálený*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**21**
29.	*Barbora Bouberlová*	ZŠ Bavorovská, Vodňany	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**19**
30.	*Adam Mikulič*	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
31.	*Tomáš Zvolánek*	ZŠ V Sadech, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**16**
32.	*Patricie Labuťová*	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**14**
33.	*Thuc Anh Leová*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
34.	*Amelie Vítková*	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**9**
35.	*Žaneta Rozhonová*	ZŠ Strakonice, Dukelská	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**8**
36.–37.	*Jiří Janda*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**7**
36.–37.	*Marek Janda*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**7**
38.–39.	*Melánie Boušková*	G Pod Svatou horou, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
38.–39.	*Magdaléna Cincibuchová*	G Jana Keplera, Praha	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
https://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.