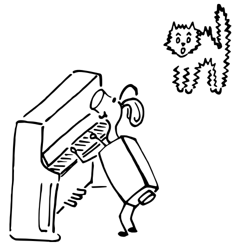
Úloha V.V ... Virtuóz

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček hrál na klavír a jelikož toho moc neuměl, hrál stále dokola pouze dva intervaly – první tvořily tóny C a D, druhý C a E. Jeden z intervalů mu ale připadal konsonantnější a rozhodl se to ověřit. Který z nich to bude? Zkuste jej nejprve odhadnout a až poté dokázat/popřít. Předpokládejte, že je klavír čistě laděný na C.



Výfučkovi se interval zalíbil a rozhodl se z něj udělat co možná nejkonsonantnější akord. Jaký tón Výfuček přidal? Na jaké vyšší harmonické frekvenci budou všechny tři tóny akordu splývat? Akord předpokládejte v rámci jedné oktávy (tj. od C do H včetně). Tón C má frekvenci $f_0 = 528\,\mathrm{Hz}$.

Bonus: *Výfučkovi však dělalo problém na klavíru správný tón najít a rozzlobeně třískl do klavíru na všechny tři noty naráz tak, že se mu konečně povedlo zahrát správný akord. Tóny vyzněly tak silně, až to vylekalo kočku spící $d = 30\,\mathrm{m}$ od klavíru. Kolik decibelů kočka slyšela, jestliže struny jedné klávesy mají výkon přibližně $P = 20\,\mathrm{W}$?*

Výfuček při hraní střídal dva intervaly – tóny C a D tvoří velkou sekundu, tóny C a E tvoří velkou tercii. Velká sekunda je tvořena pouze dvěma půltóny, zatímco velká tercie čtyřmi. Můžeme předpokládat, že konsonantnější bude velká tercie, jelikož velká sekunda je jen o půltón výš než malá sekunda, která je, jak bylo zmíněno ve Výfučtení, silně disonantní. Velká tercie je navíc součástí obou základních typů akordů, durového i mollového. Velká sekunda netvoří žádný ze základních akordů ani jejich obraty.

Pojďme si ale toto tvrzení ověřit matematicky. Poměr frekvencí velké sekundy je 9 : 8, poměr frekvencí velké tercie 5 : 4 (lze vidět z tabulky, kterou jsme připravili ve Výfučtení). Pro frekvence vyšších harmonických tónů C platí, že $f_\mathrm{C} = cf_0$, pro tón D poté $f_\mathrm{D} = df_0 \cdot 9/8$ a pro tón E $f_\mathrm{E} = ef_0 \cdot 5/4$, kde c, d a e jsou přirozená čísla. O tom, zda zní souzvuk konsonantně, či ne, rozhoduje počet vyšších harmonických frekvencí, na kterých oba tóny splývají. Čím nižší frekvenci budou mít první splývající vyšší harmonické, tím konsonantnější bude souzvuk. Pro splývající vyšší harmonické frekvence velké sekundy platí:

$$f_\mathrm{C} = f_\mathrm{D}\,,$$
$$cf_0 = \frac{9}{8}df_0\,,$$
$$8c = 9d\,,$$

kam můžeme jako nejmenší čísla dosadit $c = 9$ a $d = 8$. U velké tercie platí:

$$f_\mathrm{C} = f_\mathrm{E}\,,$$
$$cf_0 = \frac{5}{4}ef_0\,,$$
$$4c = 5e\,.$$

V tomto případě můžeme dosadit $c = 5$ a $e = 4$. Vyšší harmonické tóny u velké tercie tedy splývají na nižší frekvenci než u velké sekundy, a konsonantnější jsou tedy tóny C a E.

Jak se psalo ve Výfučtení, za nejkonsonantnější akordy považujeme mollový a durový akord. Durový akord je tvořen velkou tercií (C a E) a malou tercií (E a G). Proto bychom museli přidat tón G. Mollový akord má toto pořadí intervalů opačné, tedy malá tercie a velká tercie (C a E).

Jako malou tercii bychom mohli použít tóny A a C, avšak tón A by nebyl v zadaném rozmezí jedné oktávy. Použijeme tedy obrat a tón A posuneme o oktávu výše. Konsonanci durového akordu CEG vypočítáme podobně jako u souzvuků:

$$
\begin{aligned}
f_\mathrm{C} = f_\mathrm{E} = f_\mathrm{G}\,,\\
c = \frac{5}{4}e = \frac{3}{2}g\,,\\
4c = 5e = 6g\,,
\end{aligned}
$$

kam bychom museli dosadit $c = 15$, $e = 12$ a $g = 10$. Nejnižší frekvence, kde by tóny splývaly, by byla $f_\mathrm{min} = cf_0 = 7\,920\,\mathrm{Hz}$. U mollového akordu CEA bude postup stejný, akorát mezi tóny C a A (posunutým o oktávu) bude velká sexta:

$$
\begin{aligned}
c = \frac{5}{4}e = \frac{5}{3}a\,,\\
12c = 15e = 20a\,,
\end{aligned}
$$

což můžeme dosadit jako $c = 5$, $e = 4$ a $a = 3$. Nejnižší frekvence je poté $f_\mathrm{min} = cf_0 = 2\,640\,\mathrm{Hz}$, což je nižší než u durového, proto bude mollový akord konsonantnější.

Bonus

Za výsledný celkový výkon všech tří tónů akordu nemůžeme považovat trojnásobek výkonu každé klávesy, jelikož jejich vlny budou interferovat. Musíme tedy nejprve sečíst jejich akustické tlaky p, z čehož si pak určíme maximální hodnotu. Neznáme však amplitudu tlaku p_max každé z kláves, zadaný máme pouze jejich výkon P, který odpovídá amplitudě jejich intenzity. Intenzita, resp. výkon, je přímo úměrná druhé mocnině akustického tlaku, můžeme tedy psát:

$$P = kp_\mathrm{max}^2\,,$$

kde k je konstanta úměrnosti. Tu ani nemusíme znát, jak si za chvíli ukážeme. Z tohoto vztahu si můžeme rovnou vyjádřit amplitudu akustického tlaku:

$$p_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{P}{k}}\,.$$

Nyní již tedy můžeme složit jednotlivé tóny, a to jednoduchým sečtením jejich akustických tlaků. Rovnici rovnou vydělíme amplitudou:

$$\frac{p(t)}{p_\mathrm{max}} = p(t)\sqrt{\frac{k}{P}} = \sin\left(2\pi f_0\cdot t\right) + \sin\left(2\pi\frac{5}{4}f_0\cdot t\right) + \sin\left(2\pi\frac{5}{3}f_0\cdot t\right)\,.$$

Maximální hodnotu pravé strany zjistíme pomocí jakéhokoliv vykreslovacího programu, případně by šlo výraz derivovat, což je však daleko složitější. Maximum vychází jako $p_\mathrm{MAX}/p_\mathrm{max} \doteq$ $\doteq 2{,}845$. Tuto hodnotu pak dosadíme do výše zmíněného vztahu:

$$P_\mathrm{MAX} = kp_\mathrm{MAX}^2 = kp_\mathrm{max}^2\cdot 2{,}845^2 = P\cdot 2{,}845^2 \doteq 162\,\mathrm{W}\,,$$

což je paradoxně více, než kdybychom výkony prostě sečetli.

Ve vzdálenosti d od zdroje bude intenzita zvuku:

$$I = \frac{P_{\mathrm{MAX}}}{4\pi d^2}\,,$$

protože se šíří po kulové ploše. Pro hladinu zvuku potom platí:

$$B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \log\left(\frac{P_{\mathrm{max}}}{4\pi d^2 I_0}\right) \doteq 102\,\mathrm{dB}\,.$$

Pro I_0 jsme použili hodnotu zmíněnou ve Výfučtení: $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Tato hlasitost je již těsně nad prahem nepříjemnosti pro člověka, pro kočku s citlivějším sluchem by to tedy musel být velmi frustrující zážitek.

Tomáš Patsch
patscht@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.