

Úloha V.3 ... Blízká setkání matfyžího druhu

6 bodů; (chybí statistiky)

Bětka se v Praze rozhodla, že zajede navštívit Anežku, která se nacházela v Brně. Tato města jsou vzdálená 215 km. Bětčina průměrná rychlost se konstantně zrychlovala po dobu 30 min, poté se ustálila na $120 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Anežka ale hořela nedočkavostí, a tak se jí přesně 20 min poté, co Bětka vyjela z Prahy, vydala naproti rychlostí $90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Chtějí se potkat tak, aby na místě setkání měly obě nulovou rychlost a dorazily zároveň. Bětka proto začala brzdit se zrychlením $-7200 \text{ km}\cdot\text{h}^{-2}$ v momentě, kdy byly od sebe vzdáleny 2 km a Anežka na základě toho upravila svoji jízdu tak, aby na sebe nemusely čekat. Určete, kde a za jak dlouho se obě organizátorky setkají.

Nejprve vypočítáme, jakou dráhu obě organizátorky ujedou za první půl hodinu. Začneme Bětčinou dráhou:

$$\begin{aligned}s_B &= \frac{1}{2}at_1^2, \\s_B &= \frac{1}{2}v_B t_1, \\s_B &= \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 0,5, \\s_B &= 30 \text{ km}.\end{aligned}$$

Využili jsme skutečnosti, že at_1 je rovno konečné Bětčině rychlosti v_B . Bětka tak ujela 30 km, ale Anežka vyjžděla až po 20 minutách, takže v první půl hodině bude cestovat jen 10 minut:

$$\begin{aligned}s_A &= v_A t_1, \\s_A &= 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \cdot \frac{1}{6} \text{ h}, \\s_A &= 15 \text{ km}.\end{aligned}$$

Po třiceti minutách jsou tedy od sebe celkem vzdáleny jen $215 - 45 \text{ km} = 170 \text{ km}$. Víme, že rovnoměrným pohybem se budou pohybovat až do cílového zpomalování, tedy $170 - 2 \text{ km} = 168 \text{ km}$. Vypočítáme, jak rychle ujedou tuto vzdálenost:

$$\begin{aligned}s &= v_B t_2 + v_A t_2, \\168 \text{ km} &= (120 \text{ km/h} + 90 \text{ km/h}) \cdot t_2, \\t_2 &= 0,8 \text{ h} = 48 \text{ min}.\end{aligned}$$

Teď už jen zbývá zjistit, jak dlouho budou zpomalovat. Při rovnoměrném zpomalování na nulovou rychlost platí

$$\begin{aligned}v_B &= at, \\t &= \frac{v_B}{a} = \frac{120 \text{ km/h}}{7200 \text{ km/h}^2}, \\t &= 1 \text{ min}.\end{aligned}$$

Víme tedy již, jak dlouho bude trvat, než se potkají: $30 + 48 + 1 \text{ min} = 79 \text{ min}$. Abychom mohli vypočítat celkovou dráhu, kterou Bětka ujela, musíme vypočítat, kam až se dostala rovnoměrně přímočarým pohybem:

$$\begin{aligned}s_2 &= v_B t_2, \\s_2 &= 120 \cdot 0,8, \\s_2 &= 96 \text{ km}.\end{aligned}$$

A následně při zpomalování:

$$\begin{aligned}s_3 &= \frac{1}{2} a t^2, \\s_3 &= \frac{1}{2} \cdot 7200 \text{ km/h}^2 \cdot (1 \text{ min})^2, \\s_3 &= 1 \text{ km},\end{aligned}$$

Bětčina celková dráha tedy byla $30 + 96 + 1 \text{ km} = 127 \text{ km}$. Bětka se s Anežkou setká po 79 minutách, 127 kilometrů od Prahy.

Anežka Čechová
anezka@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.