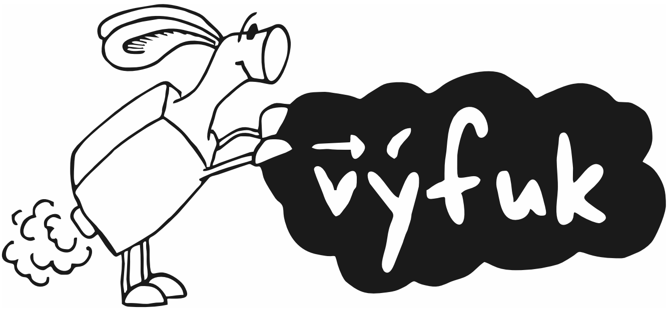


výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

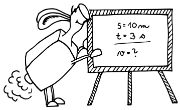
do rukou se vám dostává pátá brožurka letošního ročníku Výfuku. Najdete v ní zadání další série, ve které se můžete těšit na úlohy o těžbě uhlí nebo o rychlosti rotace Země. Čeká na vás také na páté Výfučtení věnované hudbě a jejímu propojení s fyzikou. Naleznete zde i vzorová řešení 3. série a průběžné pořadí po ní.

V nejbližší době nás také čeká druhý ročník Výfučího Kyber Koncilu, který proběhne o víkendu 12. a 13. března na Discordu. Pokud máte čas, neváhejte se přihlásit. Dálší akcí je i letní tábor, který proběhne 24. července až 6. srpna v Dobré Vodě u Třebíče. Zatím máme na táboře místa dost, tak pokud víte i o nějakých kamarádech, kteří by mohli mít zájem, určitě jim dejte vědět.

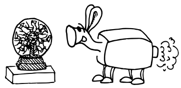
Dále ještě připomínáme, že i tento ročník má Výfučí bingo, kde můžete plněním úkolů souvisejících s řešením Výfuku získat různé ceny, tak nám pošlete vaše vyplněné tabulky.

Organizátoři

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



Zadání V. série



Termín odeslání: 4. 4. 2022 20.00

Úloha V.1 ... WEGO ❻ ❼ — 5 bodů

Anička, Bětka, Cilka, David, Eva, Fanda, Gita, Hanka, Ivan a Jarda seděli v kruhu (v tomto pořadí) a hráli hru WEGO. Ta spočívá v tom, že hráči po řadě říkají čísla a pokaždé, když by mělo zaznít číslo 7, jeho násobek nebo číslo, které ve svém desítkovém zápisu obsahuje číslici 7, daná osoba řekne „WEGO“ a mění se směr hry. Tedy například pokud by Bětka řekla 6, řekne Cilka „WEGO“ a Bětka pokračuje číslem 8. Pokud s jedničkou začínala Anička a po ní hraje Bětka, jaké první číslo řekne Hanka?

Úloha V.2 ... Zajímavá čísla ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Kačka měla řadu náhodných trojciferných čísel a protože neměla co dělat, začala je blíže zkoumat. Všimla si, že hodně těchto čísel je *zajímavých*. *Zajímavé* číslo je pro Kačku takové, které má právě dvě cifry stejné. Kolik procent takových čísel bude? Jak se situace změní, když bude Kačka sledovat *zajímavost* poslední trojice pěticiferného čísla?

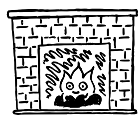
Úloha V.3 ... Blízká setkání matfyzího druhu ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Bětka se v Praze rozhodla, že zajede navštívit Anežku, která se nacházela v Brně. Tato města jsou vzdálená 215 km. Bětčina průměrná rychlost se konstantně zrychlovala po dobu 30 min, poté se ustálila na $120\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Anežka ale hořela nedočkavostí, a tak se jí přesně 20 min poté, co Bětka vyjela z Prahy, vydala naproti rychlostí $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Chtějí se potkat tak, aby na místě setkání měly obě nulovou rychlost a dorazily zároveň. Bětka proto začala brzdit se zrychlením $-7\,200\,\mathrm{km\cdot h^{-2}}$ v momentě, kdy byly od sebe vzdáleny 2 km a Anežka na základě toho upravila svoji jízdu tak, aby na sebe nemusely čekat. Určete, kde a za jak dlouho se obě organizátorky potkají.

Úloha V.4 ... Yeet ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Jak rychle by se musela otáčet Země, abychom z ní odletěli? Jinými slovy, jaká by musela být rychlost její rotace, aby odstředivé síly překonaly gravitační sílu na jejím povrchu? Počítejte, že Země je dokonalou homogenní koulí, na jejímž rovníku stojíme a která rotuje podle osy pólů a jejíž gravitační zrychlení je neměnné. Poloměr a hmotnost Země je pak také konstantní – počítejte s hodnotami $r = 6\,371\,\mathrm{km}$ a $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Výsledek vyjádřete pomocí hmotnosti Země (tj. neodkazujte se pouze na známou hodnotu gravitačního zrychlení) a následně rychlost vyjádřete jako rychlost Země na rovníku (např. v $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$), ale i v době trvání jednoho dne.

Úloha V.5 ... Uhlí patří pod zem ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů



Lubor jednoho zimního večera odpočíval u krbu a sledoval, jak v něm hoří uhelné brikety. Zamyslel se při tom, jakým způsobem se vlastně těží uhlí a jak asi bylo hluboko pod zemí. Představte si tedy hlubinný důl s hloubkou h metrů, ve kterém se těží uhlí. Černé uhlí má průměrnou výhřevnost $25\,\mathrm{MJ\cdot kg^{-1}}$.

1. Spočítejte, jaká by byla teoreticky maximální hloubka dolu, aby se vyplatilo uhlí těžit jako zdroj energie (tj. aby vytěžená energie byla větší než energie spotřebovaná na těžbu). Uhlí jsme schopni dopravovat z dolu s 10% účinností a na vytěžení 1 kg paliva spotřebujeme energii 500 kJ.

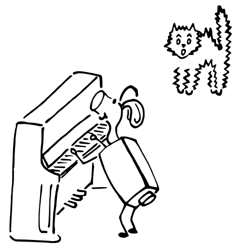
2. Doly však většinou bývají zatopené spodní vodou a tuto vodu je nutné odčerpávat, aby mohla probíhat těžba. Určete, jak se změní maximální hloubka dolu h, jestliže budeme uvažovat, že na každý vytěžený kilogram uhlí je potřeba odčerpat 10 kilogramů vody a účinnost čerpání je 5 %.

   Zkuste porovnat své výsledky s reálnou hloubkou některých dolů a zamyslete se, z jakých důvodů se tyto hodnoty liší.

Úloha V.E ... Měrná tepelná kapacita brambor ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Změřte co nejpřesněji měrnou tepelnou kapacitu brambor. Pokus několikrát zopakujte a zkuste odhadnout nejistotu svého měření. Postup měření necháme čistě na vás, nezapomeňte ho však detailně popsat a uvést všechny potřebné okolnosti, jako například varný typ brambor.

Úloha V.V ... Virtuóz ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů



Výfuček hrál na klavír a jelikož toho moc neuměl, hrál stále dokola pouze dva intervaly – první tvořily tóny C a D, druhý C a E. Jeden z intervalů mu ale připadal konsonantnější a rozhodl se to ověřit. Který z nich to bude? Zkuste jej nejprve odhadnout a až poté dokázat/popřít. Předpokládejte, že je klavír čistě laděný na C.

Výfučkovi se interval zalíbil a rozhodl se z něj udělat co možná nejkonsonantnější akord. Jaký tón Výfuček přidal? Na jaké vyšší harmonické frekvenci budou všechny tři tóny akordu splývat? Akord předpokládejte v rámci jedné oktávy (tj. od C do H včetně). Tón C má frekvenci $f_0 = 528\,\mathrm{Hz}$.

Bonus: Výfučkovi však dělalo problém na klavíru správný tón najít a rozzlobeně třískl do klavíru na všechny tři noty naráz tak, že se mu konečně povedlo zahrát správný akord. Tóny vyzněly tak silně, až to vylekalo kočku spící $d = 30\,\mathrm{m}$ od klavíru. Kolik decibelů kočka slyšela, jestliže struny jedné klávesy mají výkon přibližně $P = 20\,\mathrm{W}$?

Výfučtení: Hudební teorie

Úvod

V tomto Výfučtení se budeme zabývat hudbou, oblastí možná na první pohled fyzice vzdálenou. Vskutku, na hudbě je do velké míry důležitý její *společenský aspekt*, ke kterému se zde jako fyzici moc nemůžeme vyjádřit. Co ale komentovat můžeme, je spojení hudby s akustikou, kmitavým pohybem a naším vnímáním zvuku. Tímto propojením se mimo jiné zabývaly již civilizace před antickým Řeckem, čímž položily základy *hudební teorie.*

Z důvodu takto nestandardního tématu jsme se rozhodli Výfučtení trochu prodloužit. Chtěli jsme téma probrat v úplnosti tak, aby Výfučtení tvořilo ucelený kus. K vyřešení seriálové úlohy nicméně bude zcela stačit, pokud si přečtete pouze počáteční témata Výfučtení, *pokračování* je určeno spíš pro zájemce. Stejně tak se ve Výfučtení vyskytnou goniometrické funkce (sinus) a logaritmus: k pochopení smyslu textu není třeba znát jejich přesnou definici.

Podstatou a základním stavebním materiálem v hudební teorii jsou *tóny.* Jejich souzvuky a střídáním, omezenými určitými pravidly, pak vzniká hudba, jakou známe. Nejprve si tedy definujme tón.

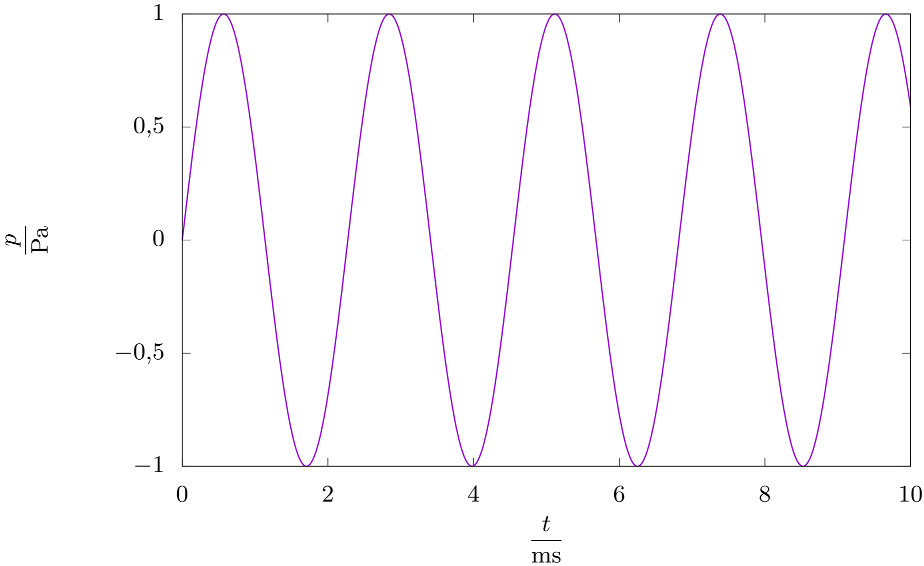
Tón

Definice tónu s sebou přináší některá úskalí, ale pro její zjednodušenou podobu nám bude stačit si představit napnutou strunu na kytaře. Při jejím vychýlení z klidové polohy a následném puštění začne struna kmitat frekvencí f_0, kterou budeme označovat jako *základní frekvenci.*

Pohyb struny poté se stejnou frekvencí rozkmitává okolní prostředí (ve většině případů se jedná o vzduch) a zvuk tak putuje přibližně stejně ve všech směrech od svého zdroje. Rozkmitané molekuly pak naráží do našeho ušního bubínku a my slyšíme frekvenci těchto nárazů jako znějící tón. Matematicky můžeme zvuk popsat buď pomocí změn poloh molekul vzduchu v důsledku kmitání, nebo využijeme toho, že při kmitání se vzduch střídavě zhušťuje a zřeďuje s čímž se pojí i velmi malé změny tlaku. Odchylku nového tlaku od běžného atmosferického tlaku nazýváme *akustický tlak* p a jeho periodický průběh popisujeme pomocí *sinusoidy*:

$$p = A \sin \left(2\pi f \cdot t\right) ,$$

kde A je amplituda tónu, tedy maximální odchylka tlaku[1] od normální hodnoty, f je jeho frekvence a t čas. Závislost akustického tlaku daného tónu na čase pro frekvenci $f = 440\,\mathrm{Hz}$ a amplitudu $A = 1\,\mathrm{Pa}$ pak vidíme v grafu 1.



Obr. 1: Graf závislosti akustického tlaku způsobeného zvukovou vlnou o frekvenci $f = 440\,\mathrm{Hz}$ na čase

Harmonická řada

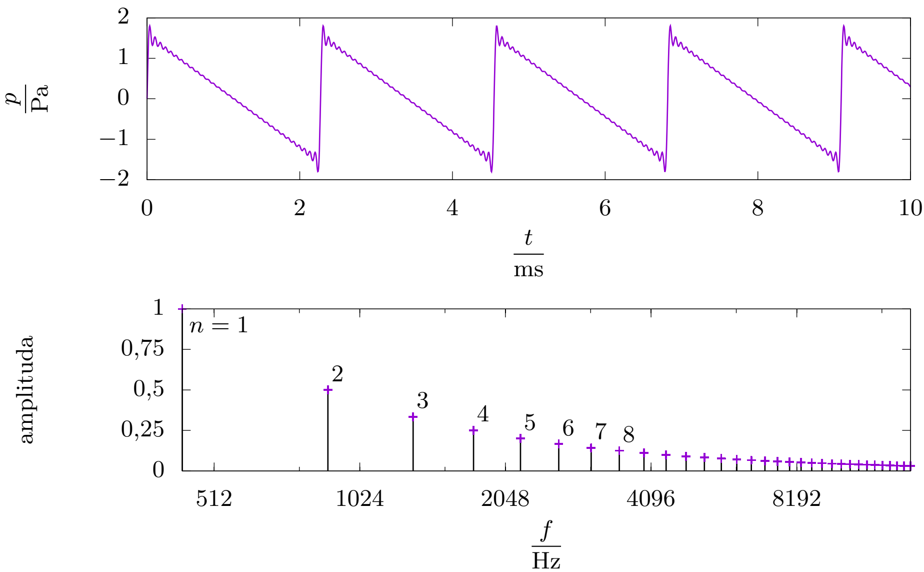
Naše definice zobrazuje tón jako zvuk pouze o jedné frekvenci. Ve skutečnosti ale i při kmitání jedné struny zní nad naší základní frekvencí teoreticky nekončící řada dalších tónů, jejichž frekvence jsou celým násobkem základní frekvence. Této posloupnosti říkáme *harmonická řada* a frekvenci jejího n-tého tónu můžeme snadno vypočítat jako:

$$f_n = n \cdot f_0 ,$$

[1] Jelikož prostředí kmitá nepostřehnutelně rychle, hlasitost tónu odpovídá jeho amplitudě.

kde n jsou samozřejmě přirozená čísla (2, 3, ...).

Tyto frekvence navzdory možné představě nepůsobí rušivě, naopak podíl jejich hlasitostí udává barvu tónu, díky které můžeme rozeznat jednotlivé nástroje. Pokud bychom na varhany, klavír, housle a hoboj zahráli tón o stejné frekvenci a sestrojili bychom graf závislosti akustického tlaku na frekvenci, pozorovali bychom u každého z nástrojů jiné poměry intenzit frekvencí harmonické řady k základní frekvenci (intenzitou zde myslíme, jak moc přispívají jednotlivé frekvence k výslednému tónu). Bez harmonické řady by tedy všechny nástroje zněly stejně. Průběh tónu zobrazeného výše s harmonickou řadou je vyobrazen v grafu na obr. 2.[2] Záleží však vždy na tom, jaký poměr intenzit harmonické řady si zvolíme.



Obr. 2: Graf závislosti intenzity tónu s harmonickou řadou na čase a graf intenzity n-té složky v závislosti na frekvenci

Značení tónů

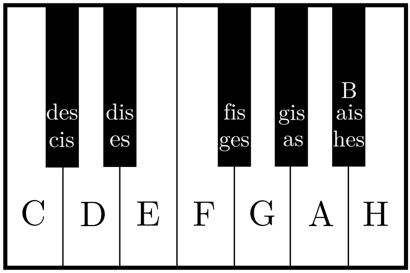
Než budeme pokračovat, bude jistě dobré zavést pro tóny ustálené značení. Zde je jednodušší si místo kytarové struny představit klavírové struny, do kterých klepáme stisknutím kláves.[3] Nejnižším tónem na standardním klavíru je tón A. Poté budeme postupovat pouze po bílých klapkách vzhůru, a to po tónech H[4], C, D, E, F a G. Po tónu G následuje opět tón A.

[2] Zobrazenému tónu se přezdívá „sawtooth wave“ kvůli tvaru jeho průběhu, vygenerovaný zvuk si můžete poslechnout ve videu `https://www.youtube.com/watch?v=A6NFknpJalA`.

[3] Pro lepší představu i jiná využití doporučujeme, pokud doma nemáte skutečný klavír, virtuální klavír, dostupný například na stránce `https://www.onlinepianist.com/virtual-piano`.

[4] V anglicky mluvících zemích se české H označuje jako B

Pokud do našeho repertoáru zahrneme také černé klapky, značíme je pomocí přípon *-is* pro černé klávesy bezprostředně nad daným tónem a *-es*[5] pro černé klávesy bezprostředně pod ním. Pokud se tedy například z klávesy G přesuneme na černou klapku doprava od ní (směrem nahoru), získáváme tón Gis, pokud se naopak posuneme na černou klávesu opačným směrem, získáváme tón Ges. Klaviaturu jsme pro lepší představu zobrazili na obr. 3.



Obr. 3: Klaviatura s popsanými tóny

Výška tónu

Snad nejdůležitější vlastností tónu je jeho výška. Ta se sice přímo odvíjí od základní frekvence tónu, ale narážíme zde na další příklad *logaritmické* podstaty lidského vnímání smyslů. Pro pojmenování vzdáleností mezi tóny používáme tzv. *intervaly.* Pro lidské logaritmické vnímání je rozdíl mezi 10 Hz a 100 Hz stejný jako rozdíl mezi 100 Hz a 1 000 Hz. Rozdíl mezi 1 000 Hz a 1 010 Hz je naopak téměř neznatelný – jde o *podíly.* Tedy, pokud máme dvě dvojice tónů f_1, f_2 a g_1, g_2, tak pokud platí, že $f_1 : f_2 = g_1 : g_2$, pak je mezi nimi vzdálenost v intervalech stejná.

Určování „správných“ podílů je poněkud problematické, zabývali se jím již antičtí Řekové, jako třeba Pythagoras, a definitivně se vyřešilo až v baroku za pomoci Johanna Sebastiana Bacha. Systému tohoto určování říkáme *ladění.*

Zpočátku se používalo tzv. *čisté ladění*, které vycházelo z poměrů prvních pěti frekvencí harmonické řady – první, základní, přiřaďme frekvenci f_0, druhé $2f_0$, atd. Takovým základním intervalem je *čistá prima*, která odpovídá vzdálenosti tónu k sobě samému. Tedy dva tóny vzdálené od sebe o primu jsou tentýž tón a poměr frekvencí činí 1 : 1. Mezi první a druhou harmonickou frekvencí je interval nazývaný *čistá oktáva* a poměr frekvencí k základnímu tónu je 2 : 1 – toto odpovídá vzdálenosti dvou kláves A na klavíru.

Mezi druhou a třetí harmonickou frekvencí je tzv. *čistá kvinta*, jejíž poměr činí logicky 3 : 2. Mezi třetí a čtvrtou je *čistá kvarta* s poměrem 4 : 3 a mezi čtvrtou a pátou velká tercie s poměrem 5 : 4. Ostatní intervaly se pak určí matematicky pomocí těchto intervalů (například velká sekunda jsou dvě kvinty za sebou posunuté o oktávu níže, tedy $3/2 \cdot 3/2 \cdot 1/2 = 9 : 8$).

Z tabulky 1 vyplývá, že sousedící tóny jsou nerovnoměrně vzdáleny. Vzniká tak velký problém při *transpozici* (tak říkáme posouvání tónů o stejnou vzdálenost v intervalech určitým směrem), kdy poměry frekvencí již neodpovídají základnímu tónu, a skladba tak zní falešně,

[5] Výjimkou jsou As, Es (místo Aes a Ees) a tón Hes, který označujeme spíše jako tón B. Zde opět může dojít k nedorozumění, protože české B se mezinárodně označuje jako B-flat, nikoli B.

Tón	Interval	Poměr frekvencí k základnímu tónu	Poměr frekvencí k předchozímu tónu
C	čistá prima	1 : 1	16 : 15
Des	malá sekunda	16 : 15	16 : 15
D	velká sekunda	9 : 8	135 : 128
Es	malá tercie	6 : 5	16 : 15
E	velká tercie	5 : 4	25 : 24
F	čistá kvarta	4 : 3	16 : 15
Fis	zvětšená kvarta	45 : 32	135 : 128
G	čistá kvinta	3 : 2	16 : 15
As	malá sexta	8 : 5	16 : 15
A	velká sexta	5 : 3	25 : 24
Hes/B	malá septima	16 : 9	16 : 15
H	velká septima	15 : 8	135 : 128
C	čistá oktáva	2 : 1	16 : 15

Tab. 1: Poměry frekvencí jednotlivých intervalů při čistém ladění.

nebo s jiným „nádechem“. Odchylky v poměrech tónů by proto písničku mohly učinit zvukově temnější, světlejší nebo třeba heroičtější.[6]

Sami to můžete vidět na příkladu: určitě znáte písničku *Ovčáci, čtveráci*. První tři tóny této lidové písničky jsou C, E a G, tedy podle tabulky 1 podíl frekvencí druhých dvou tónů vůči prvnímu tónu C činí 5 : 4 a 3 : 2. Pokud bychom tuto písničku hráli od tónu D, museli bychom všechny tóny posunout v tabulce o stejnou vzdálenost jako první tón, tedy o 2 řádky dolů, čili hráli bychom D, Fis a A. Nyní však podíl frekvencí vůči prvnímu tónu D činí 5 : 4 a 40 : 27, tedy intervalový rozdíl prvních dvou tónů zůstane stejný, ale třetí tón již bude znít mírně jinak, dalo by se říct „falešně“.

Temperované ladění

V období antiky a středověku nerovnoměrné vzdálenosti mezi tóny problém nepředstavovaly. S vývojem hudby a novými hudebními metodami se však tato problematika prohlubovala, protože skladatele omezovala v experimentování, a proto byl v období baroka navržen nový systém ladění, který se používá v drtivé většině hudby dodnes – *rovnoměrně temperované ladění*. Poměry frekvencí oktáv se zachovaly, můžeme tedy definovat vztah mezi poměrem frekvencí tónů f_1 a f_2 a počtem oktáv n mezi nimi:

$$\frac{f_2}{f_1} = 2^n \,.$$

Idejí rovnoměrně temperovaného ladění je, aby měly každé dva sousedící tóny stejný poměr frekvencí, resp. aby rozdíl mezi intervaly byl podle sluchu vždy stejný. Vzdálenosti mezi dvěma sousedícími tóny pak říkáme *půltón*. Oktávu tedy můžeme definovat jako vzdálenost, kterou

[6] Za nejheroičtější tóninu je zpravidla považována Es dur, za nejdepresivnější d moll, dnes už toto tvrzení v novodobém systému ladění bohužel zcela zaniká.

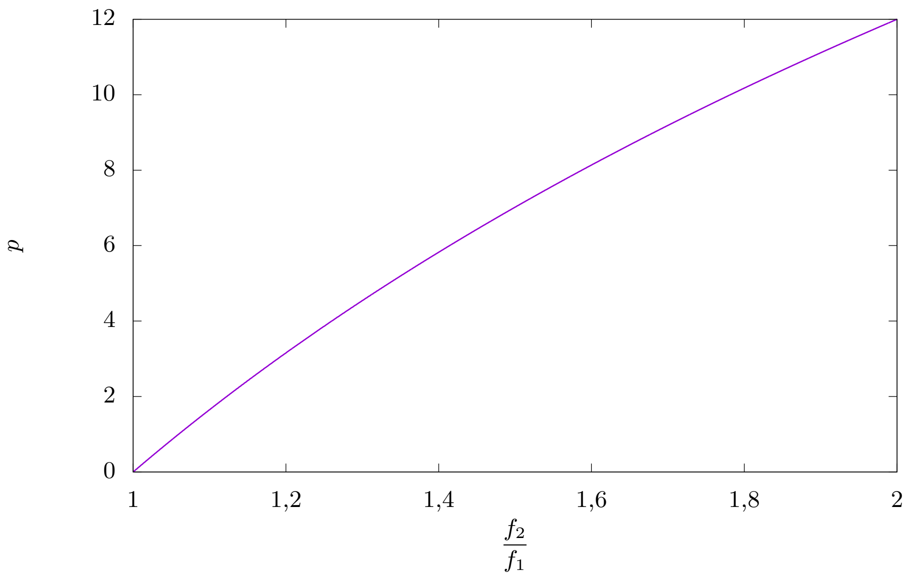
získáme, když „ujdeme" 12 půltónů od jednoho tónu ke druhému. Můžeme proto zavést vztah poměru frekvencí v závislosti na počtu půltónů p, které dva tóny oddělují:

$$\frac{f_2}{f_1} = 2^{p/12}\,.$$

Poměr frekvencí dvou tónů v malé sekundě, tj. tónů vzdálených o jeden půltón, je $2^{1/12} : 1$, zatímco například interval *kvinty*, používaný pro svou sílu a zvučnou tvrdost například v metalových *power akordech*, získává poměr $2^{7/12} : 1$, což se příliš neliší od poměru čisté kvinty $3 : 2$. Každý interval vyvolává trochu jiný pocit, hudebníci je často rozeznávají právě podle něj.

Z posledního vztahu můžeme také jednoduše vyjádřit naopak vzdálenost dvou tónů (měřenou v půltónech) v závislosti na poměru jejich frekvencí. Jednoduchými úpravami získáváme nakonec[7]:

$$p = 12\log_2 \frac{f_2}{f_1}\,.$$



Obr. 4: Závislost vzdálenosti dvou tónů na poměru jejich frekvencí v rámci jedné oktávy

Z tohoto vyjádření je zjevné, že člověk vnímá výšku tónu logaritmicky, stejně jako je tomu například u našeho vnímání hlasitosti zvuku, ale například také u vnímání teploty nebo jasnosti.[8]

Pro přesné naladění celého nástroje poté potřebujeme kromě vztahu pro poměr frekvencí zavést také referenční tón s přesně danou frekvencí, od kterého budeme další frekvence odvíjet. V současné době se pro tento účel používá tzv. *komorní A* o frekvenci 440 Hz.

[7] Tento vztah využívá funkci logaritmus o základu dva – najdete ho na kalkulačce, kdybyste k něčemu potřebovali spočítat p. Není to ale zas tak důležitý vztah k pochopení problematiky.

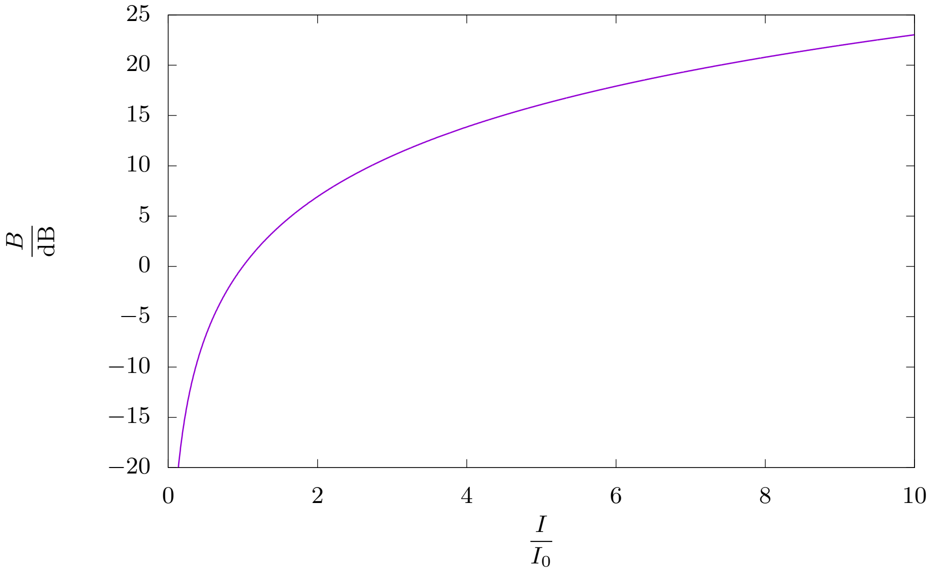
[8] Jas vnímáme dle tzv. Pogsonovy rovnice.

Zároveň v hudbě ani zdaleka nepoužíváme celý rozsah lidského slyšení (přibližně od 16 Hz do 20 kHz); zatímco nejnižší tón na standardním klavíru má frekvenci 27,5 Hz, nejvyšší tón na klavíru končí u pouhých 4 186 Hz.

Hlasitost tónu

Další z velice důležitých vlastností tónu je jeho hlasitost. V hudbě toto rozlišování tónů na základě jejich síly označujeme jako *dynamiku.* I zde se člověku lépe pracuje s logaritmem hodnot fyzikálních veličin. Pro vyjádření hlasitosti používáme tzv. *hladinu intenzity*, kterou označíme B a můžeme ji vypočítat buď přímo z akustického tlaku, nebo se zavádí veličina nazývaná *intenzita zvuku*, která vyjadřuje množství energie přenášené zvukovou vlnou (může se to zdát překvapivé, ale zvukové vlny skutečně přenášejí energii, jinak by totiž nemohly rozpohybovat molekuly vzduchu). Intenzita se značí I, jednotkou je $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$) a hladinu intenzity pak spočítáme pomocí vztahu:

$$B = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) .$$



Obr. 5: Graf závislosti hladiny intenzity na intenzitě zvuku

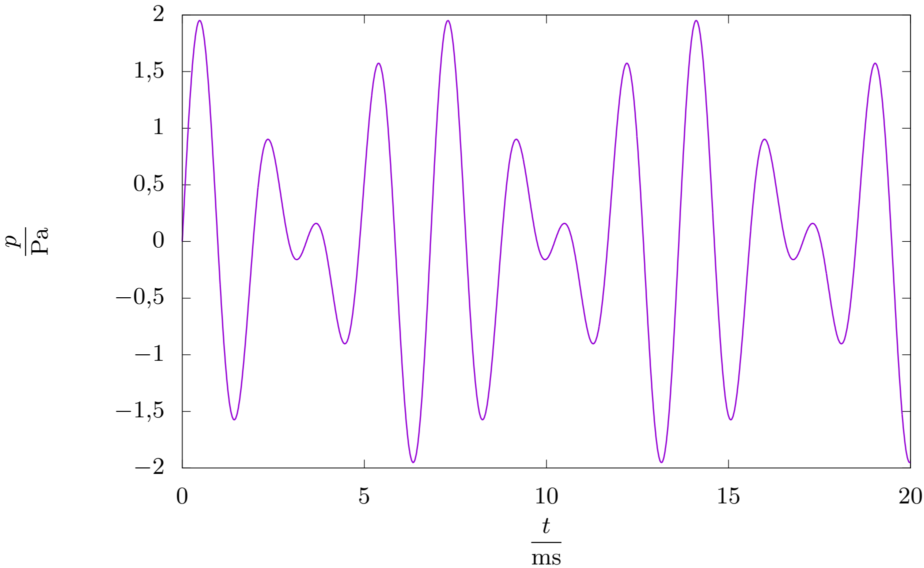
Hodnota I_0 odpovídá prahu slyšení, tedy intenzitě nejtiššího zvuku, který může člověk postřehnout.[9] Jednotkou hladiny intenzity je decibel (značka dB). Pro práh slyšení nám vychází hodnota 0 dB, naopak zvuky pohybující se na prahu bolesti dosahují hodnot asi 120 dB. Doporučená hlasitost při poslechu hudby se pohybuje mezi 60 dB a 85 dB. Průběh hladiny intenzity v závislosti na poměru intenzity k referenci jsme zobrazili do grafu na obr. 5.

[9] Nejčastěji je uváděna hodnota $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$.

Pokud jste někdy analyzovali zvuk za pomoci softwaru, tak vězte, že hodnota 0 dB zde znamená maximální hlasitost (tedy intenzitu, kterou je ještě čidlo schopné vnímat). Potom jde stupnice do záporných hodnot – například −60 dB znamená, že je zvuk o 60 dB tišší než daná maximální hodnota.

Souzvuky

Souzvukem tónů rozumíme takový zvukový signál, který vzniká složením, neboli *interferencí* několika tónů o různých frekvencích, tedy například když současně rozezníme dvě různě napnuté struny. Můžeme měřit závislost akustického tlaku na čase při souzvuku dvou čistých tónů se stejnou intenzitou. Vezměme například A a D, které odpovídají frekvencím $f_\mathrm{A} = 440\,\mathrm{Hz}$ a přibližně $f_\mathrm{D} = 587\,\mathrm{Hz}$ („pravá“ hodnota by měla být taková, aby odpovídala 4/3 frekvence tónu A, jedná se totiž o čistou kvartu). Pak bychom naměřili periodickou funkci zobrazenou v grafu na obr. 6.



Obr. 6: Graf závislosti akustického tlaku při souzvuku dvou tónů na čase

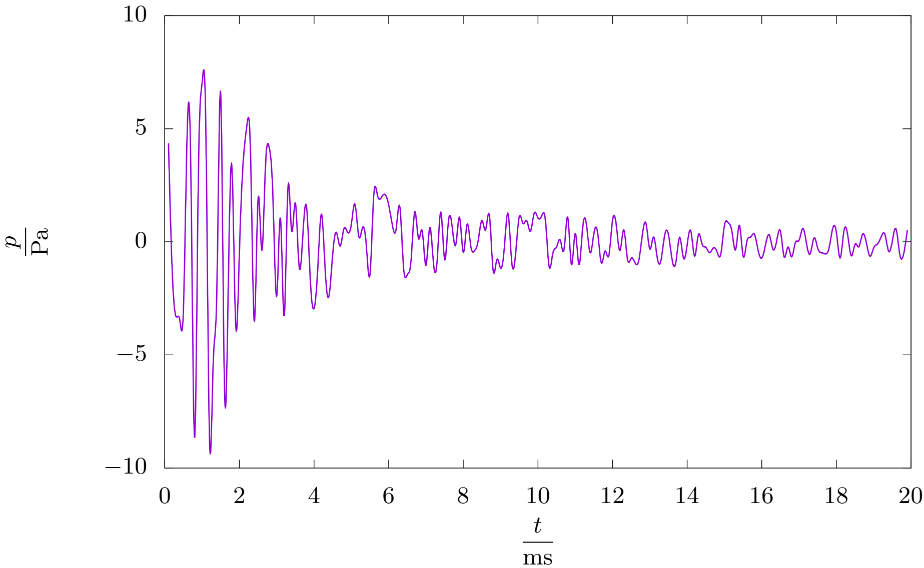
Podobně jako u světla a vlastně každého vlnění, složenou funkci vyjadřující závislost intenzity vlnění na čase získáme prostým sečtením dílčích funkcí jednotlivých tónů, funkci zobrazenou v grafu můžeme tedy zapsat jako:

$$p(t) = p_0 \sin\left(2\pi f_\mathrm{A} t\right) + p_0 \sin\left(2\pi f_\mathrm{D} t\right) .$$

Výsledkem je pak složitější funkce, kterou náš mozek rozloží na jednotlivé frekvence. Tento proces rozkládání signálu na jednotlivé frekvence lze popsat pomocí tzv. *Fourierovy transformace* (resp. Fourierova rozkladu). Nebudeme vysvětlovat přesný matematický mechanismus tohoto procesu, protože je to pro Výfučtení příliš složité téma vyžadující dobrou znalost vysokoškolské matematiky. Podstatné je, že ze složitého tónu nám dokáže říct, které frekvence ho vytvořily.[10]

Hluk

Na základě výše popsaného principu je zřejmé, že rozložit nepravidelné neperiodické signály na jednotlivé frekvence lze jen těžko, a proto je rozpoznáme jako *hluk*. Nicméně i takové zvukové signály jsou v hudbě zásadní, především u neladěných bicích nástrojů (např. činel, buben), pomocí kterých snadněji vnímáme rytmus hudby. Graf akustického tlaku jednoho konkrétního hluku v závislosti na čase můžete vidět na obr. 7.



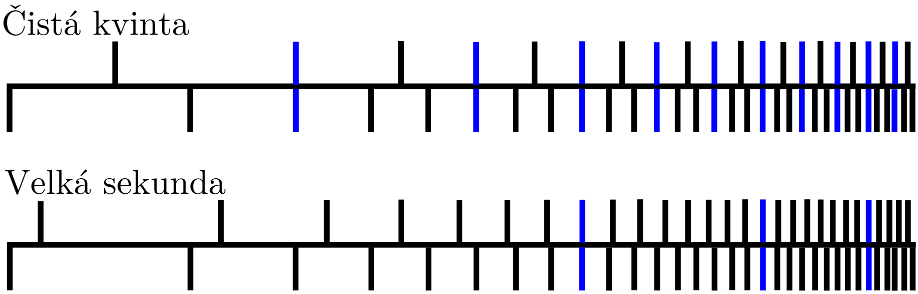
Obr. 7: Graf závislosti akustického tlaku hluku na čase

Konsonance

Nyní připomeňme, že jsme doposud zanedbávali harmonickou řadu, která je však pro pochopení našeho vnímání souzvuků zcela zásadní. Souzvuku dvou tónů můžeme přiřadit jednu hudebně, ale i fyzikálně významnou charakteristiku – *konsonanci* neboli *souzvučnost*. O tom, zda jsou dva různé tóny konsonantní (souzvučné), nebo disonantní (nesouzvučné), rozhoduje počet shodných vyšších harmonických frekvencí těchto tónů. Čím nižší hodnoty a čím vyšší počet shodných vyšších harmonických frekvencí mají dva tóny, tím více jsou konsonantní. To úzce souvisí s intervaly – čisté ladění totiž určuje poměry frekvencí intervalů právě podle poměrů vyšších harmonických frekvencí základního tónu.

[10] Pokud byste si chtěli vyzkoušet měření okolních frekvencí pomocí Fourierovy transformace, vhodnou a volně dostupnou aplikací je například Spectroid.

Nejvíce takových shodujících se vyšších harmonických frekvencí má oktáva, jelikož poměr frekvencí se základním tónem je 2 : 1, tedy celočíselný násobek. V takovém případě harmonické řady zcela splývají a nezkušený posluchač by nerozeznal rozdíl mezi samostatným základním tónem a oktávou, jedná se tedy o nejkonsonantnější interval. Druhým nejkonsonantnějším intervalem je kvinta s poměrem frekvencí 3 : 2, kde splývá každá druhá, resp. třetí, vyšší harmonická frekvence vyššího, resp. nižšího, tónu. Naopak malá sekunda a velká septima nemají v rozsahu do prvních deseti vyšších harmonických frekvencí žádnou shodnou, a pokládáme je tedy za ryze disonantní. Ve výsledku tedy vidíme, že čím „jednodušší“ je poměr frekvencí, tím konsonantnější je souzvuk.



Obr. 8: Srovnání splývání harmonických frekvencí kvinty a velké sekundy

Absolutní výjimkou je tritón (tři sousedící tóny, slovem sousedící nemyslíme, že byly tóny na klavíru přímo vedle sebe), jehož temperovaná podoba by teoreticky neměla mít žádné shodné vyšší harmonické frekvence, protože poměr jeho frekvencí činí $\sqrt{2} : 1$ (což odpovídá šesti půltónům, viz výše). Jako zvětšená kvarta (což neodpovídá temperovanému ladění) má však poměr frekvencí 45 : 32, a jedná se tedy o nejdisonantnější interval. Díky jeho disonanci pověrčiví lidé ve středověku věřili, že tritón přivolává ďábla, a tak je také přezdíván jako „*diabolus in musica*“. Velmi nápaditě jej využil například Camille Saint-Saëns ve svém slavném Tanci kostlivců, neboli *Danse macabre*.

Akordy

Souzvuk tří a více tónů nazýváme *akord*. Pro hudbu mají nepostradatelný význam – díky nim může náš mozek určit, jakou tóninu zrovna slyšíme. S tím se pojí i emoce, které při poslechu hudby cítíme. Zjednodušeně tedy můžeme tvrdit, že různé akordy v nás vyvolávají různé emoce.

I akordům můžeme přiřadit konsonanci a libozvučnost – aby byl akord konsonantní, musí všechny tři (příp. více) tóny splývat v alespoň jedné slyšitelné vyšší harmonické frekvenci. Většinu dnešní hudby (vyjma jazzu, klasické hudby a různých experimentálních žánrů) tvoří dva typy akordů – *durový* (např. C, E, G, neboli C dur) a *mollový* (např. C, Es, G, neboli C moll).

Můžete si všimnout, že mezi základním a vrchním tónem je kvinta, proto se těmto akordům říká *kvintakordy*. Rozdíl mezi nimi tvoří prostřední interval – u durových je jím velká tercie (5 : 4), u mollových malá tercie (6 : 5). Durový akord zní tvrději, resp. disonantněji než mollový, což mu dodává „veselejší“ nádech, zatímco mollový vnímáme spíš jako neutrální nebo se „smutnějším“ nádechem. Rozdíl v konsonanci akordů si můžeme jednoduše matematicky vysvětlit.

Jak již bylo zmíněno, vyšší harmonickou frekvenci můžeme obecně vyjádřit jako nf_0, tedy v durovém akordu C–E–G bude pro společnou vyšší harmonickou platit:

$$n_\mathrm{C} f_\mathrm{C} = n_\mathrm{E} f_\mathrm{E} = n_\mathrm{G} f_\mathrm{G}\,,$$
$$n_\mathrm{C} f_0 = \frac{5}{4} n_\mathrm{E} f_0 = \frac{3}{2} n_\mathrm{G} f_0\,,$$
$$4 n_\mathrm{C} = 5 n_\mathrm{E} = 6 n_\mathrm{G}\,,$$

kam můžeme jako nejmenší čísla dosadit $n_\mathrm{C} = 15$, $n_\mathrm{E} = 12$ a $n_\mathrm{G} = 10$. Harmonické řady tedy splývají až na patnácté vyšší harmonické základního tónu. U mollového akordu se změní prostřední zlomek:

$$n_\mathrm{C} f_0 = \frac{6}{5} n_\mathrm{Es} f_0 = \frac{3}{2} n_\mathrm{G} f_0\,,$$
$$10 n_\mathrm{C} = 12 n_\mathrm{E} = 15 n_\mathrm{G}\,,$$

kam jako nejmenší čísla dosadíme $n_\mathrm{C} = 6$, $n_\mathrm{Es} = 5$ a $n_\mathrm{G} = 4$, tedy splývat bude už šestá vyšší harmonická frekvence základního tónu.

Posouváním jednotlivých tónů o oktávu získáme různé *obraty* akordů. Jedná se vlastně o tentýž akord, pouze zmizí nebo se naopak objeví některé spodní harmonické frekvence, čímž dosáhneme trochu jiného „vyznění“ akordu.

Pokračování

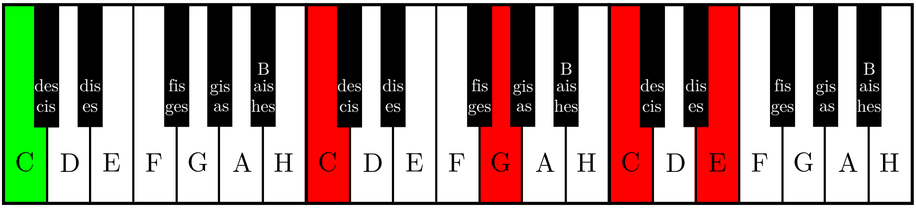
Následující text je určen pro ty, které téma zaujalo a chtějí se dozvědět více o teorii hudby. K vyřešení seriálové úlohy však není nutný.

Rezonance vyšších harmonických

Zajímavostí je, že první čtyři frekvence harmonické řady odpovídají skoro přesně čistým hudebním tónům (vyšší frekvence harmonické řady pak na klavíru spadají už „mezi klávesy“). Tuto skutečnost si můžete doma, za předpokladu přítomnosti klavíru, ověřit jednoduchým experimentem; na klavíru pomalu zmáčkněte druhou nejnižší klávesu C, nechte ji doznít, ale klapku nepouštějte, aby struna zůstala uvolněná. Totéž proveďte s klávesou G nad zmáčknutým C, poté s nejbliží vyšší klávesou C a nakonec s nejbližším vyšším E. Všechny zmíněné klávesy držte zmáčknuté. Poté silně bouchňete do nejnižší (dosud nezmáčknuté) klávesy C. Výsledkem by mělo být rozeznění všech držených kláves. Jejich struny totiž mají takové základní frekvence, že odpovídají násobkům základní frekvence nejnižšího C, a proto při zahrání tónu začínají rezonovat. Experiment jsme taktéž znázornili na obr. 9.

Transpozice

Jak jsme již zmínili, transpozice je posunutí nějakého úryvku skladby o určitý interval. V případě čistého ladění byla transpozice problémová, což vedlo k zavedení temperovaného ladění v barokní hudbě. Při transpozici na rovnoměrně temperovaném nástroji odpovídá posun tónů vynásobení všech frekvencí v písničce stejným číslem. Při posunu o oktávu nahoru by tedy všechny tóny písničky měly dvojnásobnou frekvenci oproti původní výšce. Takovýmto posunem



Obr. 9: Znázornění experimentu s rozezvučením strun klavíru (klávesy které držíme jsou zabarveny červeně, spodní C modře)

se však nemění poměry frekvencí mezi tóny, a intervaly tedy zůstávají vždy stejné. Posunutá písnička pak zní naprosto stejně jako její původní verze s jediným rozdílem v podobě výšky, ve které ji zpíváme. Pro názornou ukázku tehdy nových možností komponování na temperovaném nástroji složil Johann Sebastian Bach známé cykly klavírních skladeb s názvem *Dobře temperovaný klavír*.

Libozvučnost

Je třeba rozlišovat pojmy konsonance a *libozvučnost*. Konsonance je spíše teoretický pojem, který je pro každý interval pevně určený, bez ohledu na to, co za nástroj jej hraje. Libozvučnost je pak praktičtější pojem, který zahrnuje i skutečnost, že má každý nástroj jinou barvu (tedy různé intenzity frekvencí harmonické řady). Například pokud bychom měli nástroj s výraznou druhou vyšší harmonickou frekvencí, zněla by malá sexta nelibozvučně, přestože se jedná o relativně konsonantní interval. Proč tomu tak je – když zahrajeme na takový nástroj tón A, rozezní se výrazně tón E, protože odpovídá druhé vyšší harmonické. Jenže při souzvuku malé sexty, tedy s tónem F, vzniká malá sekunda, která je, jak jsme říkali, ryze disonantní, a proto bude zvuk nelibozvučný, přestože na jiném nástroji, například na klavíru, by tato disonance vyšších harmonických zanikla a souzvuk by vyzněl libozvučně.

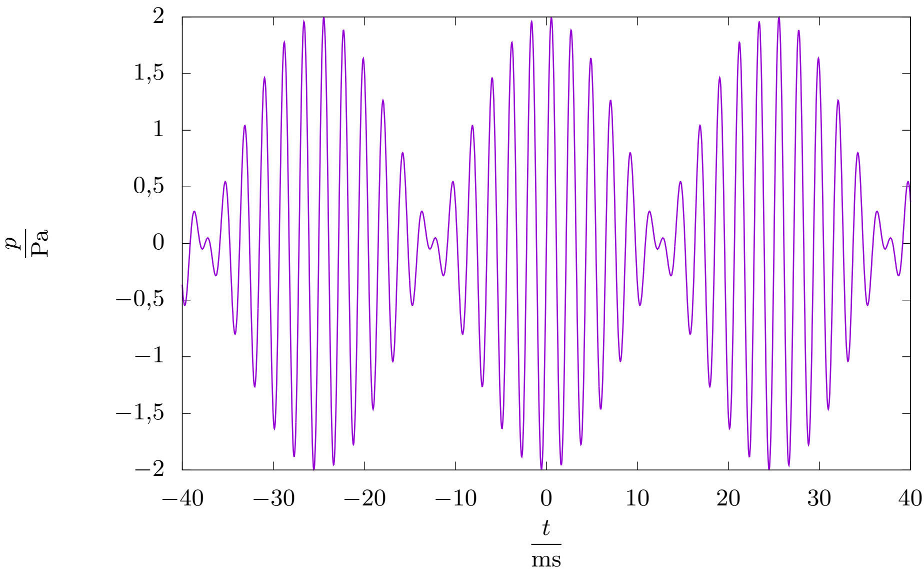
Zázněje

Zajímavý souzvuk nastává v případě, že se dva tóny liší pouze o velmi malý násobek frekvence. Souzvuk pak slyšíme jako jeden tón protože nejsme schopni rozeznat tak malý rozdíl ve frekvenci, avšak kvůli interferenci obou vln budou mít chvíli stejnou fázi, kdy se zesílí, a chvíli opačnou, kdy se vyruší. Jednotlivým úsekům od prvního vyrušení do druhého říkáme *zázněje*.

Frekvence záznějů je shodná s rozdílem frekvencí jednotlivých tónů. Podle její hodnoty dělíme takové souzvuky na *delta* vlny do 3 Hz, *theta* vlny do 7 Hz a *alpha* vlny do 13 Hz, u kterých bez problémů dokážeme rozeznat jednotlivé zázněje, *beta* vlny do 29 Hz, které již začínají splývat v drsný šramot doprovázející tón, a *gamma* vlny, u nichž již vnímáme rozdíl mezi frekvencemi tónů jako silně disonantní a souzvuk má vibrující charakter. Pokud frekvence záznějů překročí zhruba 100 Hz, již je nevnímáme vůbec. Příklad jednoho záznějě jsme vykreslili do grafu 10.

Délka tónu

Poslední z neopomenutelných charakteristik tónu v hudbě je jeho délka. Každou melodii v hudbě rozdělujeme do tzv. *taktů*, které představují jakési jednotné „ohrádky“ mezi jednotlivými částmi



Obr. 10: Zázněj dvou tónů lišících se o 40 Hz

melodie. Budeme uvažovat nejjednodušší případ, kdy jsou všechny takty ve skladbě stejně velké (pro navození pocitu spěchu, rozhozenosti nebo čistě pro efekt občas střídáme velikosti taktů i v průběhu skladby). Zároveň budeme uvažovat takt typický pro západoevropské vnímání hudby; takt čtyřčtvrťový. Tento takt patří do všech písniček, při kterých můžeme počítat *raz, dva, tři, čtyři*. Každé z vyřknutých čísel představuje tzv. *dobu*, a řekli bychom tedy, že takt čtyřčtvrťový „počítáme na čtyři doby". Velice zjednodušeně můžeme dobu definovat jako časový interval, ve kterém bude při oblíbené skladbě publikum na koncertě tleskat do rytmu.

Nyní si představme situaci, že umíme zahrát pouze jeden tón, ale chceme jím zaplnit jeden celý takt. Notu, která by takový tón představovala, označujeme z hlediska délky jako *notu celou* a trvá tak dlouho, jak dlouho by trvalo hráči nebo posluchači napočítat v odpovídajícím rytmu do čtyř (tedy čtyři doby). Pokud bychom chtěli jeden čtyřčtvrťový takt zaplnit dvěma stejně dlouhými notami, použili bychom tzv. *notu půlovou*, která trvá doby dvě. Její polovinou je *nota čtvrťová*, která odpovídá jedné době (proto čtyřčtvrťový takt). Následují noty *osminové*, *šestnáctinové* a *dvaatřicetinové*. I zde tedy pozorujeme lidskou snahu vnímat logaritmicky. V krajním případě je možné použít také notu *čtyřiašedesátinovou*, většinou se ale skladby v rychlých úsecích zapisují pomocí některých z předchozích uvedených not a pro dosažení větší rychlosti jednoduše počítáme doby rychleji.

Rychlost počítání dob označujeme jako *tempo* a udáváme jej (stejně jako například tempo srdečních ozvů) v jednotkách BPM, což je zkratka pro anglické *beats per minute*. Slovem *beat* zde[11] rozumíme jednu dobu, v češtině je tedy BPM ekvivalentní s počtem dob napočítaných za jednu minutu. V moderní hudbě se jako běžné tempo bere 120 BPM, tedy 30 čtyřčtvrťo-

[11] Pozn.: slovo beat má v angličtině mnoho významů, jeden z nich je i výše zmíněný zázněj.

vých taktů za minutu, ale většinou se pohybuje od 60 BPM až po 160 BPM. Tempo se také může plynule i skokově měnit, zejména v klasické hudbě, kde je proměnlivost tempa téměř všudypřítomná kvůli vyvolávání napětí či naopak uvolnění.

Tóniny

Již jsme zmínili, že akordy mohou určovat tóninu, ale nevysvětlili jsme, co to vlastně tónina je. Tónina určuje příslušnost části hudební skladby k určité *stupnici*, tedy určuje, jaké stupnici má patřit většina tónů v této části skladby – vybočující tóny mají spíše napínající funkci. Může být pro celou skladbu stejná, nebo se měnit. Změnu tóniny označujeme pojmem *modulace*. Modulacemi evokujeme změny emocí, napětí nebo uvolnění, nejistotu či naopak pocit jistoty; krátkodobé nečekané vybočení z tóniny, které se nezřídka objevuje v jazzu, často činí skladbu zajímavější, jedná se totiž o prvek překvapení. Tónina je vždy shodná se stupnicí, vysvětleme si tedy, co je to stupnice; jedná se o řadu tónů v rozmezí jedné oktávy, která je uspořádaná podle určitých pravidel pro velikosti intervalů mezi sousedními tóny stupnice.

Chromatická stupnice

Asi nejjednodušeji definovaná stupnice je stupnice *chromatická*. Ta je poskládaná z tónů oddělených vždy jedním půltónem. Chromatické stupnici tedy odpovídá všech 12 kláves v jedné oktávě, a proto není tónika používající chromatickou stupnici v podstatě ničím omezena, může se využívat jakýkoli interval, a tedy jakákoli posloupnost tónů klaviatury. Často však porušuje přirozené vnímání hudby, plně se totiž začala používat až ve dvacátém století v novodobé klasické hudbě, která kvůli experimentování s hudbou zašla až daleko za chápání hudby, které je pro nás od narození přirozené.[12]

Pentatonické stupnice

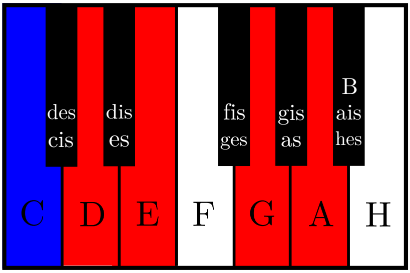
Naopak historicky nejstarší a dodnes mezinárodně používanou stupnicí je tzv. *pentatonická* stupnice (na obr. 11), která tvoří základ většiny čínské a japonské hudby, nicméně lze ji najít i např. v evropských lidových písních. Jak název napovídá, tvoří ji 5 tónů, které bychom dostali, kdybychom na klavíru od základního tónu (např. C) – kterému v rámci tóniny říkáme *tónika* – odpočítávali kvinty, tedy další by bylo G, D, A a poslední E, a poté je seřadili za sebe do jedné oktávy. Výsledkem je tedy C, D, E, G, A, což je C dur pentatonická. Pokud stupnici začneme hrát od jejího posledního tónu, tedy A, C, D, E, G, dostaneme a moll pentatonickou (tónikou je v tomto případě tón A). Jejich transpozicemi získáváme durové a mollové pentatonické stupnice s jinými tónikami. Hraním pouze černých kláves klavíru získáme tóniku Fis dur nebo dis moll (záleží na tom, kam podvědomě umístíme tóniku).

Přidáme-li k mollové pentatonické stupnici ještě tón, který tvoří s tónikou tritón, dostaneme *bluesovou* stupnici (na obr. 12). Ta se využívá velmi často v jazzu, obzvlášť v blues. Samozřejmě vznikla v Americe společně s jazzem a blues.

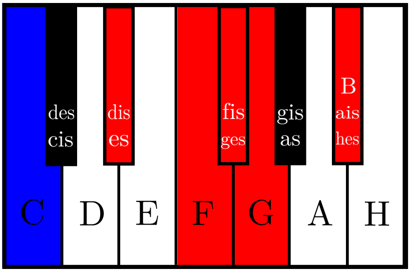
Diatonické stupnice

Pro západoevropskou hudbu, moderní i historickou, jsou nejdůležitější tzv. *diatonické* stupnice, které se již zcela shodují s evropským přirozeným chápáním hudby. Skládají se vždy ze sedmi

[12] Hudební chápání se totiž odvíjí od toho, co člověk v raném věku poslouchá, lidové písničky rozhodně chromatickou tóniku nepoužívají.



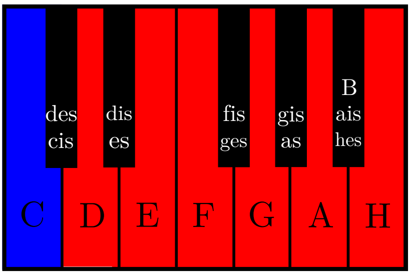
Obr. 11: Stupnice C dur pentatonická



Obr. 12: Stupnice C bluesová

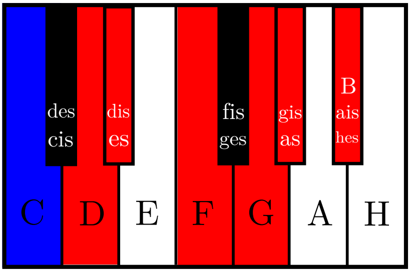
tónů oddělených buď půltónem nebo tónem (dvěma půltóny). Dělí se na dvě skupiny – církevní a moderní. Pro rozlišení jednotlivých typů stupnic si nejdříve musíme definovat *tóniku*, *dominantu* a *subdominantu* stupnice. Co je tónika již víme. Dominanta tvoří s tónikou čistou kvintu, subdominanta čistou kvartu – jedná se tedy o intervaly mezi prvními vyššími harmonickými frekvencemi tóniky.

Uvažujme nyní jako tóniku tón C. Dominantou a subdominantou jsou tóny G a F. Ke každému z těchto tónů nyní vytvořme durový kvintakord – máme tedy C dur, G dur a F dur. Vypíšeme-li si všechny tóny, které je tvoří, a seřadíme je, získáme posloupnost C, D, E, F, G, A, H. Této moderní stupnici říkáme *durová* (na obr. 13). Slyšíme ji snad v každé evropské písničce.



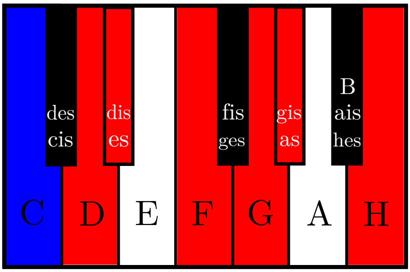
Obr. 13: Stupnice C durová

Pokud bychom vytvořili namísto durových akordů mollové akordy, získáme jinou posloupnost: C, D, Es, F, G, As, B (neboli Hes). Jedná se o další moderní stupnici, které přezdíváme *mollová aiolská* (na obr. 14).



Obr. 14: Stupnice C mollová aiolská

Jelikož akord g moll zde ale nevytváří potřebné napětí, často se zamění s G dur,[13] čímž vzniká nová stupnice s posloupností C, D, Es, F, G, As, H nazývaná *mollová harmonická* (na obr. 15) a připomíná hudbu z oblastí bývalé Osmanské říše.



Obr. 15: Stupnice C mollová harmonická

Taková stupnice má však mezi dvěma posledními tóny rozdíl větší než jeden tón, což vyřešila západoevropská hudba zvýšením předposledního stupně o půltón při hraní zespoda nahoru a snížením posledního při hraní sestupném (kdy odpovídá stupnici mollové aiolské). Název této stupnice je *mollová melodická.*

Církevní neboli *modální* stupnice používají tóny stupnice durové, avšak mění se tón (*modus*), na kterém se nachází tónika, čímž se mění i posloupnost intervalů mezi jejími tóny. Například stupnice aiolská by z durové (v církevním označení *jónské*) stupnice vznikla přenesením tóniky na předposlední tón.

Existuje mnoho dalších stupnic, které však již západoevropská hudba téměř nepoužívá (např. cikánská stupnice, indonéské stupnice, atd.).

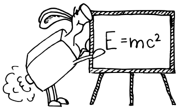
[13] Přeměnou se z B stane H, což je jen o půltón pod tónikou C. Takovým tónům říkáme *citlivé tóny*, protože evokují napětí, po němž podvědomě očekáváme uvolnění ve formě zahrání tóniky.

Závěr

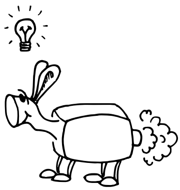
V tomto Výfučtení jsme se pokusili co nejlépe vysvětlit základy hudební teorie. Začali jsme definicí tónů a jejich fyzikálních/hudebních charakteristik, jejichž vzájemné vztahy tvoří v podstatě celou konstrukci hudby. Vysvětlili jsme si, proč existuje několik druhů ladění a na jakém principu fungují. Pokračovali jsme tématem souzvuků, u kterých umíme určit, jak moc našemu sluchu „lahodí“, kdy tvoří akord a jaká je hudební funkce akordů. V pokračování jsme si ještě vysvětlili, jak různé vzájemné vztahy tónů vytváří různé tóniny, a představili jsme si několik příkladů stupnic. Jelikož je naše chápání hudby však z velké části založeno i emocionálně, je nemožné vysvětlit ji celou pouze pomocí fyziky a matematiky.

Tomáš Patsch
`patscht@vyfuk.mff.cuni.cz`

Šimon Bláha



Řešení III. série



Úloha III.1 ... Jít, či nejít?

5 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček si jednoho krásného odpoledne vyrazil na procházku. Počasí se však bohužel může měnit i velmi nečekaně, a tak během Výfučkovy zpáteční cesty začalo pršet. Aby co nejméně zmokl, rozhodl se Výfuček běžet. Pomohl mu ale běh opravdu v tom, aby byl na konci své cesty méně mokrý? Svou odpověď zdůvodněte. Uvažujte i jiné faktory než jen to, že bude doma dříve.

Uvažujte, že prší celou dobu stejně silně. To znamená, že na danou jednotku plochy dopadá v celém průběhu deště neměnné množství vody.

Zkusme se zamyslet, co nám říká intuice. Pokud jsme venku a začne pršet, pak se pravděpodobně automaticky poběžíme co nejrychleji schovat pod nějaký přístřešek – a moc se nezamýšlíme nad tím, jestli by náhodou nebylo lepší na dešti zůstat stát. Přirozeně tak očekáváme, že je pro Výfučka ideální ta varianta, kdy poběží co nejrychleji. Teď si to pojďme spočítat.

Rozebereme si nejdříve nejednodušší případ – déšť padá kolmo na zem o konstantním plošném toku Q (množství deště za jednotku času). Pokud Výfuček stojí, dopadá déšť pouze na jeho vrchní část těla. Popíšeme-li Výfučka jako kvádr se stranami a, b, c (délka, výška, šířka), tak za čas t na něj dopadne voda o objemu

$$V = QSt = Qact\,.$$

Když se Výfuček rozejde, začne narážet do kapek před sebou, tudíž z krátkodobého hlediska bude „mokřejší“. Označme rychlost deště v_d a rychlost Výfučka v_v, pak míra „chytání“ deště bude určena poměrem těchto dvou rychlostí. Objem zachycení při pohybu v dešti bude

$$V' = QS't\frac{v_\mathrm{v}}{v_\mathrm{d}} = Qbct\frac{v_\mathrm{v}}{v_\mathrm{d}}\,.$$

Čas t určíme jako čas, za který se Výfuček dostane domů (uvažujme vzdálenost l), tedy $t = l/v_\mathrm{v}$. Součet objemů bude

$$V_c = V + V' = Qac\frac{l}{v_\mathrm{v}} + Qbc\frac{l}{v_\mathrm{v}}\frac{v_\mathrm{v}}{v_\mathrm{d}} = Qlc\left(\frac{a}{v_\mathrm{v}} + \frac{b}{v_\mathrm{d}}\right) .$$

Pokud se podíváme na přírůstek objemu z pohybu, vidíme člen $V' = Qbcl/v_\mathrm{d}$, který zjevně nezávisí na rychlosti Výfučka, tedy na cestě domů narazí přední částí svého těla do stejného množství vody, ať už se pohybuje jakoukoliv rychlostí. Jelikož Výfuček dokáže smysluplně měnit pouze svoji rychlost, tedy i čas, za jaký se vrátí domů, bude pro něj nejvýhodnější běžet co nejrychleji (aby byl doma co nejdříve a minimalizoval pobyt na dešti). Příklad nám tedy vyšel tak, jak bychom dle intuice očekávali.

Lze jej vyřešit ještě pomocí jiné úvahy. Stačí se na situaci dívat z pohledu, ve kterém se déšť nehýbe. V této tzv. vztažné soustavě se Výfuček pohybuje nahoru rychlostí deště v_d. Musí pak běžet diagonálně nahoru a při svém běhu naráží do deště. Je pak jednoduché si domyslet, že musí co nejvíce zmenšit svoji celkovou trasu a to udělá, bude-li mít co největší rychlost v_v.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.2 ... Mozková smrt

5 bodů; (chybí statistiky)

V kuchyni na Výfučím táboře se kuchařky rozhodly, že si uspořádají filmovou noc velmi špatných filmů. Tak špatných, že při jejichž sledování umírají mozkové buňky. Na začátku měla každá ze 4 přítomných organizátorek 100 000 000 000 mozkových buněk. Nejprve se promítal film dlouhý 35 minut s poločasem rozpadu mozkových buněk 5 minut a 50 sekund. Následoval film dlouhý 27 minut s poločasem rozpadu 2 minuty a 42 sekund, film dlouhý 55 minut s poločasem rozpadu 9 minut a 10 sekund, film dlouhý 39 minut s poločasem rozpadu 3 minuty a 15 sekund a na závěr si v kuchyni pustily film dlouhý 62 minut s poločasem rozpadu 15 minut a 30 sekund.

Zůstane na konci filmové noci v kuchyni dohromady alespoň jedna mozková buňka, kterou by kuchařky mohly sdílet?

Vzhledem k tomu, že se ptáme na to, kolik mozkových buněk budou mít nakonec organizátorky dohromady, můžeme si představit, že na počátku mají jen jeden mozek, který obsahuje:

$$4 \cdot 100\ 000\ 000\ 000 = 400\,000\,000\,000\,\text{buněk} .$$

Dále se ptáme, kolikrát se počet mozkových buněk našich kuchařek zmenší na polovinu. Tím pádem nás zajímá hodnota x ve výrazu:

$$x = 400\ 000\ 000\ 000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots .$$

Jednou polovinou počet buněk vynásobíme y-krát. Když násobíme několikrát jedním číslem, využíváme mocniny, můžeme tedy x vyjádřit jako:

$$x = 400\ 000\ 000\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y .$$

Stačí nám tedy vypočítat koeficient y a získáme i náš chtěný výsledek x. Připomeňme si, že y nám udává, kolikrát se počet mozkových buněk „zpolovičatí“. Pro tento výpočet jsme si v zadání zavedli „poločas rozpadu mozkových buněk“. Poločas rozpadu je běžná veličina – udává čas, za který ke „zpolovičatění“ dojde. Má tedy jako základní jednotku sekundu. Setkáváme se s ním i v přírodě, například u problematiky radioaktivních rozpadů (tam se děje to, že z N částic projde za poločas rozpadu radioaktivní proměnou průměrně $N/2$ částic).

Důležité je se zmínit, že neplatí, že by se v jeden moment (vždy po uplynutí poločasu rozpadu) rozpadlo $N/2$ částic nebo mozkových buněk najednou. Rozpady se dějí postupně, ke změnám počtů buněk dochází, i pokud neuběhla ani jedna celá doba poločasu rozpadu. Jednoduchou úvahou si můžete ověřit, že musí platit: $y = T/T_{\mathrm{rozpad}}$, kde T je celkový čas, po který k rozpadům dochází, a T_{rozpad} samotný poločas rozpadu.

Platí, že:

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\,,$$

kde y je celkový počet proběhlých poločasů rozpadu, y_1 je počet rozpadů během prvního filmu, y_2 během druhého filmu atd. Protože jsme se již dozvěděli, že $y = T/T_{\mathrm{rozpad}}$, můžeme vyjádřit každé y na pravé straně rovnice:

$$y = \frac{T_1}{T_{\mathrm{rozpad}\ 1}} + \frac{T_2}{T_{\mathrm{rozpad}\ 2}} + \frac{T_3}{T_{\mathrm{rozpad}\ 3}} + \frac{T_4}{T_{\mathrm{rozpad}\ 4}} + \frac{T_5}{T_{\mathrm{rozpad}\ 5}}\,.$$

A do této rovnice již jen dosadíme (musíme si dávat pozor na jednotky – v tomto případě jsme dosazovali v sekundách):

$$\begin{aligned}
y &= \frac{35\cdot 60}{5\cdot 60+50} + \frac{27\cdot 60}{2\cdot 60+42} + \frac{55\cdot 60}{9\cdot 60+10} + \frac{39\cdot 60}{3\cdot 60+15} + \frac{62\cdot 60}{15\cdot 60+30}\,,\\
y &= 6+10+6+12+4 = 38\,.
\end{aligned}$$

Počet buněk se tedy sníží na polovinu 38× (náš vzoreček pro rozpad ovšem platí i pro necelý počet rozpadů), a tak nám stačí pro zjištění počtu zbylých buněk jen dosadit do původního vzorce:

$$x = 400\ 000\ 000\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{y}\,,$$

$$x = 400\ 000\ 000\ 000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{38} \doteq 1{,}455\,.$$

V kuchyni tedy zbude 1,455 buňky, a tak i po skončení sledování budou kuchařky mít stále alespoň tu jednu buňku, kterou mohou sdílet mezi celou kuchyní!

Musíme však zmínit, že by tak připadalo asi 0,364 buňky na osobu. Ve skutečnosti se nám ale nemohou ničit buňky po částech. Toto číslo nám tedy říká jen jakousi pravděpodobnost, s jakou se bude daná buňka v hlavě organizátorů nacházet. Zároveň je však přesný výpočet takovéto pravděpodobnosti náročný a nad rámec této úlohy, takže jej opomeneme.

Václav Verner
vasek@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.3 ... Sypká věž

6 bodů; (chybí statistiky)

Organizátoři Výfuku si uspořádali párty. Podmínkou ke vstupu na párty bylo přinést alespoň litr sypké substance.

Kačka přinesla litr popela, který má sypný úhel 20°*. Viktor přinesl litr mletého kakaa, které má sypný úhel* 30°*. Marco přinesl litr práškové křídy, která má sypný úhel* 45°*.*

První vysypali hromádku popela, ta měla tvar komolého kužele, tedy kužele s useknutou špičkou. Splácli ji takovým způsobem, aby na ni mohli vršit kakao. Styčné plochy mezi jednotlivými sypkými látkami jsou vždy jen vodorovné. Prostřední hromádka kakaa má také tvar komolého kužele a na ní je umístěn kužel z práškové křídy.

Jak (nejvíce) vysoká může být tato hromádka?

Nejdříve se pokusíme naši hromádku co nejpřesněji popsat. Skládá se ze tří různých (z toho dvou komolých) kuželů, které leží na sobě. Každý má svou výšku, označíme si je shora jako v_1, v_2 a v_3. Mezi horními dvěma kužely je pak sdílena plocha S_1, mezi dolními dvěma S_2 a celá věž stojí na podstavě S_3. To, že jsou plochy sdílené a stejně velké, si můžeme ukázat jednoduchou úvahou – vrchní plocha nemůže být větší než ta spodní – substance jsou sypké a její část ležící na rozdílu ploch vrchní a spodní části věže by se tedy sesypala.

Důvod, proč nemůže být spodní plocha na našem spoji kuželů větší než ta vrchní, není zřejmý z fyzikálních principů, ale ze zadání: snažíme se vytvořit co největší (komolé) kužely, přičemž při daném objemu je obsah podstavy lineárně nepřímo úměrný výšce kužele (pro výpočet objemu kužele můžeme využít vzorec $V = (S_{\mathrm{podstavy}} \cdot v)/3$, kde v je výška našeho kužele). U komolého kužele pak také platí, že se stoupajícím obsahem podstavy klesá výška, ale u něj je již podstatný obsah obou dvou jeho podstav. Protože chceme co největší výšku, je v našem zájmu mít obsah podstav co nejmenší – a při největším omezení obsahu podstav získáme to, že podstavy tedy musí být stejně velké (jak je již výše uvedeno, dolní podstavu už nemůžeme zmenšit – naše sypká věž by se začala sypat.)

Nyní se již zaměříme na řešení samotné úlohy. Pouze ze zadaného objemu nejsme schopni říci, jak bude kužel vypadat. Jsme to ale schopni jednoznačně určit, jakmile známe úhel mezi podstavou a stěnami a víme, že se snažíme dosáhnout co největší výšky. Pro další výpočty ale budeme používat goniometrické funkce – pokud tedy nevíte, co goniometrické funkce jsou, nebo si nejste jistí, jak je používat, můžete si o nich přečíst ve Výfučtení 3. série 1. ročníku Výfuku.[14] Pro určení vzhledu našich (komolých) kuželů tedy využijeme veličinu *sypný úhel*, která nám udává, jaký může být maximální úhel mezi podstavou a pláštěm kužele, než se začne naše sypká substance sesypávat po povrchu kužele. Prášek se při překročení úhlu sype, dokud je úhel větší než ten sypný – zbude nám kužel se sypným úhlem mezi podstavou a pláštěm.

Jaký ale bude mít úhel, chceme-li, aby byl kužel na svůj objem co nejvyšší? U tohoto problému stačí, když si uvědomíme, že jakmile je úhel mezi podstavou a pláštěm (označme si ho α) 0°, pak nemáme kužel, ale placku. Naopak s úhlem α blížícím se 90° se nám kužel stává čím dál tím špičatějším – platí tedy, že čím větší máme úhel α, tím více nám u našeho kužele roste výška (jak se ale dozvíme i ze vzorce uvedeného níže, při neměnícím se objemu se u kuželu bude nepřímo úměrně měnit i obsah podstavy). Pokud se tedy snažíme mít co největší výšku v našem kuželu, chceme, aby úhel α byl co největší, a to jak u kuželů, tak u komolých kuželů. Pokud tedy naše (komolé) kužely mohou mít úhel α rovný nebo menší než jejich sypný úhel, budeme vždy chtít, aby se α rovnala sypnému úhlu.

Víme tedy, že úhly jednotlivých kuželů budou $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $\alpha_3 = 20^\circ$. Jak ale využijeme goniometrické funkce? To nám bude zřejmé, jakmile si uděláme řez (komolým) kuželem podle výšky.

[14] `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r1/vyfucteni/vyfucteni_3.pdf`

Řez kuželem

Po provedení řezu u kužele získáme rovnoramenný trojúhelník, který, když si ho následně rozpůlíme podél výšky, vytvoří pravoúhlé trojúhelníky o úhlech 90°, α a $90^\circ - \alpha$. Strany tohoto pravoúhlého trojúhelníku pak budou:

Odvěsna 1 výška v_1 pro kužel 1 atd.,

Odvěsna 2 poloměr podstavy původního kužele (na kulaté podstavě S_1 si jej označíme r_1 apod.),

Přepona délka s – ta nám značí vzdálenost mezi vrcholem a libovolným bodem na okraji podstavy původního kužele.

Využijeme toho, že známe úhly α, a vzpomeneme si na definici funkce tangens: tg(úhel) = = protilehlá/přilehlá. Proto můžeme psát $\mathrm{tg}(\alpha) = v/r$, resp. $v = r \cdot \mathrm{tg}(\alpha)$, což nám později pomůže.

Řez komolým kuželem

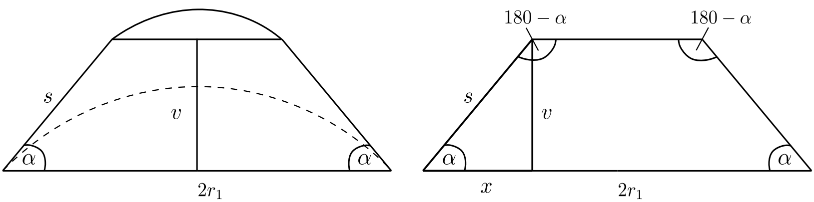
Řezem skrz komolý kužel (znovu vedený skrz výšku) získáme rovnoramenný lichoběžník. U něj máme dva jeho úhly o velikosti α – oba u spodní základny, u vrchní základny nalézáme dva úhly o velikosti $180^\circ - \alpha$ (součet úhlů v čtyřúhelníku je 360°). Strany tohoto lichoběžníku pak mají tyto velikosti:

Základny: dvakrát poloměr podstavy komolého kužele, na které základna leží, tj. $2r_1$ apod.,

Ramena: obě jsou stejně dlouhá a můžeme si je znovu označit jako s, pro náš výpočet ale tuto hodnotu potřebovat nebudeme.

Nyní využijeme goniometrické funkce znovu – lichoběžník je na všech místech stejně vysoký, výšku (ta je kolmá na obě základny) si tedy můžeme mezi základnami spustit v libovolném místě.

Pokud si ji spustíme přesně v některém z vrchních vrcholů lichoběžníku, tak nám krom pravoúhlého lichoběžníku vznikne i pravoúhlý trojúhelník. Ten má strany s, v a ještě jednu, kterou si označíme x. Proměnná x má poté hodnotu rozdílu poloměrů podstav, na kterých lichoběžník leží (pro q-tý komolý kužel získáme $x_q = r_{q+1} - r_q$). Díky tomuto také dokážeme říci, že pokud vezmeme horní poloměr a přičteme k němu odpovídající x, získáme poloměr dolní. Tuto rovnici si pak zavádíme proto, že spolu s ní znovu využijeme goniometrické funkce. Stále platí, že tg(úhel) = protilehlá/přilehlá, tím pádem i $\mathrm{tg}(\alpha) = v/x$, resp. $v = x \cdot \mathrm{tg}(\alpha)$, resp. $v = (r_{q+1} - r_q) \cdot \mathrm{tg}(\alpha)$. Vzorce se nám budou hodit právě v tomto tvaru – klíčová je



Obr. 16: Řez komolým kuželem a náčrt lichoběžníka

pro nás výška. Pro samotné dosazení do příkladu ještě potřebujeme znát vzoreček na výpočet objemu komolého kuželu: $V = (\pi \cdot v/3) \cdot (r_q^2 + r_q \cdot r_{q+1} + r_{q+1}^2)$, kde V je objem, v výška a r_q a r_{q+1} je menší, resp. větší poloměr podstavy. Protože jsme si ale řekli, že si zadefinujeme $r_{q+1} = r_q + x_\mathrm{q}$, můžeme si to vyjádřit do našeho vzorečku na výpočet objemu – bude to pro nás praktičtější:

$$V = \left(\pi \cdot \frac{v}{3}\right) \cdot \left(r_q^2 + r_q \cdot (r_q + x_q) + (r_q + x_q)^2\right) = \left(\pi \cdot \frac{v}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_q^2 + 3 \cdot r_q \cdot x_q + x_q^2\right) .$$

Poslední důležitá poznámka je, že si musíme dávat pozor na dosazování ve správných jednotkách, zde jsme si vybrali ty základní – metry (s tím souvisí to, že musíme převést litry na metry krychlové). Alternativní volbou by mohly být decimetry, neboť pak bychom litry převádět nemuseli.

Můžeme tedy dosazovat. Musíme začít u vrchního kužele, protože pro výpočet komolých kuželů zatím nemáme dostatek zadaných údajů.

$$V = \frac{S_\mathrm{podstavy} v}{3} ,$$

kde S_podstavy je obsah kruhové podstavy, který spočteme jako $S_\mathrm{podstavy} = \pi \cdot r^2$. Dosazením za obsah dostaneme

$$V = \frac{\pi r^2 v}{3} .$$

A pro kužel z goniometrických funkcí jsme si řekli, že platí:

$$v = r \cdot \mathrm{tg}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi r^2 r \,\mathrm{tg}(\alpha)}{3} = \frac{\pi r^3 \,\mathrm{tg}(\alpha)}{3} .$$

Pro r_1 tedy:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_1}{\pi \cdot \mathrm{tg}(\alpha_1)}} .$$

A s hodnotami:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0{,}001}{\pi \cdot 1}} \doteq 9{,}8\,\mathrm{cm} .$$

Z toho můžeme spočítat i výšku horního kužele:

$$v_1 = r_1 \cdot \mathrm{tg}(\alpha_1) ,$$
$$v_1 \doteq 9{,}8\,\mathrm{cm} .$$

Díky těmto výpočtům již známe r_1 – poloměr ležící na S_1, a jsme tedy schopni dopočítat i výšku prostředního (komolého) kužele. Platí, že:

$$V = \left(\pi \cdot \frac{v}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_q^2 + 3 \cdot r_q \cdot x_q + x_q^2\right) ,$$
$$v = x \cdot \mathrm{tg}(\alpha) .$$

Vyjádříme tedy první vzoreček za pomoci toho druhého:

$$V = \left(\pi \cdot \frac{v}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_q^2 + 3 \cdot r_q \cdot x_q + x_q^2\right) = \pi \cdot x \cdot \frac{\mathrm{tg}(\alpha_2)}{3} \cdot \left(3 \cdot r_q^2 + 3 \cdot r_q \cdot x_q + x_q^2\right) .$$

Ještě naši rovnici vydělíme π a $\mathrm{tg}(\alpha_2)/3$:

$$V_2 = \left(\pi \cdot x_1 \cdot \frac{\mathrm{tg}(\alpha_2)}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_1^2 + 3 \cdot r_1 \cdot x_1 + x_1^2\right) \,,$$

$$3 \cdot \frac{V_2}{\pi \cdot \mathrm{tg}(\alpha_2)} = x_1 \cdot \left(3 \cdot r_1^2 + 3 \cdot r_1 \cdot x_1 + x_1^2\right) \,.$$

Získáme tím kubickou rovnici:

$$x_1^3 + 3 \cdot r_1 \cdot x_1^2 + 3 \cdot r_1^2 \cdot x_1 - 3 \cdot \frac{V_2}{\pi \cdot \mathrm{tg}(\alpha_2)} = 0 \,.$$

Po dosazení hodnot:

$$x_1^3 + 0{,}295\,42 \cdot x_1^2 + 0{,}029\,09 \cdot x_1 - 0,001\ 65 = 0 \,.$$

Kubickou rovnici bohužel nejsme schopni vyřešit jednoduše (vzorce pro ni sice existují, ale jsou velmi složité). K řešení však můžeme využít nějaký matematický program, např. WolframAlpha. Po zadání do kalkulátoru získáme hodnotu (kubické rovnice mohou mít až tři kořeny, v těchto případech je ale reálný vždy pouze jeden z nich):

$$x_1 \doteq 3{,}9\,\mathrm{cm} \,.$$

Z toho můžeme spočítat i chtěnou výšku komolého kužele v_2:

$$v_2 = x_1 \cdot \mathrm{tg}(\alpha_2) \doteq 2{,}3\,\mathrm{cm} \,.$$

Díky tomuto výpočtu jsme znovu, v tomto případě nepřímo, získali další r, tentokrát r_2 ležící na S_2:

$$r_2 = r_1 + x_1 = 0{,}137\,66\,\mathrm{m} = 13{,}766\,\mathrm{cm} \,.$$

Můžeme tak vypočítat i výšku posledního kuželu. Znovu platí, že:

$$V = \left(\pi \cdot \frac{v}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_q^2 + 3 \cdot r_q \cdot x_q + x_q^2\right) \,,$$

$$v = x \cdot \mathrm{tg}(\alpha) \,,$$

Můžeme dosadit a vzorec upravit:

$$V_3 = \left(\pi \cdot x_2 \cdot \frac{\mathrm{tg}(\alpha_3)}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_2^2 + 3 \cdot r_2 \cdot x_2 + x_2^2\right) \,,$$

$$3 \cdot \frac{V_3}{\pi \cdot \mathrm{tg}(\alpha_3)} = x_2 \cdot \left(3 \cdot r_2^2 + 3 \cdot r_2 \cdot x_2 + x_2^2\right) \,.$$

Znovu získáme kubickou rovnici

$$x_2^3 + 3 \cdot r_2 \cdot x_2^2 + 3 \cdot r_2^2 \cdot x_2 - 3 \cdot \frac{V_3}{\pi \cdot \mathrm{tg}(\alpha_3)} = 0$$

a znovu můžeme dosadit:

$$x_2^3 + 0{,}412\,98 \cdot x_2^2 + 0{,}056\,85 \cdot x_2 - 0{,}002\,62 = 0 \,.$$

Pokud znovu použijeme počítač k vyřešení této rovnice, získáme

$$x_2 = 0{,}035\,95\,\mathrm{m} = 3{,}595\,\mathrm{cm}\,.$$

Z čehož jsme znovu schopni zjistit výšku (i poloměr dolní podstavy):

$$v = x \cdot \mathrm{tg}(\alpha) \doteq 1{,}3\,\mathrm{cm}\,,$$
$$r_3 = r_2 + x_2 \doteq 17{,}4\,\mathrm{cm}\,.$$

Výšku celé věže pak získáme velmi jednoduše – stačí sečíst výšky všech tří (komolých) kuželů na sobě – protože jsou plochy mezi kužely vodorovné, můžeme si všechny výšky dát doprostřed všech kuželů, a ty nám svým spojením vytvoří velkou výšku celého útvaru, platí tedy, že:

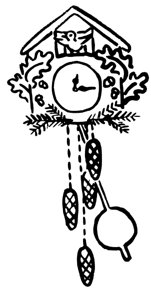
$$v_{\text{celková}} = v_1 + v_2 + v_3 \doteq 9{,}8\,\mathrm{cm} + 2{,}3\,\mathrm{cm} + 1{,}3\,\mathrm{cm} \doteq 13\,\mathrm{cm}\,.$$

Celkově tedy můžeme získat věž o výšce maximálně 13 cm.

Václav Verner
`vasek@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.4 ... Hodiny se šiškami a kukačkou 6 bodů; (chybí statistiky)

Viktor má na chatě hodiny se čtyřmi šiškami, z nichž každá váží $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Jak dlouho po natažení budou hodiny fungovat, pokud mohou obě šišky klesnout až o $l = 1\,\mathrm{m}$ a pro pohon hodin je použitelných 20 % potenciální energie šišek? Hodiny mají hodinovou ručičku dlouhou 6 cm a vážící 15 g, minutovou ručičku dlouhou 7 cm a vážící 10 g a konečně sekundovou ručičku, která měří 8 cm a váží 5 g.



Ručičky hodin považujte za homogenní zanedbatelně tenké tyče a předpokládejte, že hodinový strojek na ně působí pouze během jejich pohybu od šestky ke dvanáctce. Také pro jednoduchost můžete učinit odhad, že během 12 hodin spotřebovávají ručičky energii lineárně. Hodiny Viktor natáhne přesně v poledne.

Problém budeme řešit ve třech krocích. Nejprve spočítáme využitelnou potenciální energii šišek E. Potom si spočítáme práci W, kterou je potřeba vykonat na provoz hodin během jednoho oběhu velké ručičky. Nakonec využitelnou energii vydělíme potřebnou prací, abychom zjistili, kolikrát stihne velká ručička oběhnout ciferník. Samozřejmě by šlo potřebnou práci vztáhnout k libovolně dlouhému časovému úseku. Výpočet s dvanácti hodinami má tu výhodu, že budeme pracovat pouze s celočíselnými násobky počtu oběhů jednotlivých ručiček.

Celkové množství využitelné potenciální energie spočítáme tak, že vynásobíme potenciální energii E_0 jedné šišky počtem šišek a následně výsledek vynásobíme koeficientem účinnosti η.

$$E = 4\eta E_0 = 4\eta mgh\,.$$

Výpočet práce W je o něco komplikovanější. Musíme pro každou ručičku přičíst součin počtu oběhů během dvanácti hodin n_k, její délky l_k, její hmotnosti m_k a tíhového zrychlení g. (V první části oběhu koná práci tíhová síla, takže se energie šišek spotřebuje pouze na přesun ručičky z nejnižšího bodu do nejvyššího, a tomu odpovídá právě rozdíl potenciální energie $m_k l_k g$.) Ručičky číslujeme od nejkratší po nejdelší. Dostáváme tak vztah:

$$W = (1l_1m_1 + 12l_2m_2 + 12 \cdot 60l_3m_3)g\,.$$

Zbývá vyjádřit počet otáček hodinové ručičky x, dosadit konkrétní hodnoty ze zadání a dopočítat se k hodnotě x.

$$x = \frac{E}{W} = \frac{4\eta mh}{l_1m_1 + 12l_2m_2 + 12 \cdot 60l_3m_3}\,,$$

$$x = \frac{4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{m}}{0{,}06\,\mathrm{m} \cdot 0{,}015\,\mathrm{kg} + 12 \cdot 0{,}07\,\mathrm{m} \cdot 0{,}01\,\mathrm{kg} + 12 \cdot 60 \cdot 0{,}08\,\mathrm{m} \cdot 0{,}005\,\mathrm{kg}} \doteq 1{,}35\,.$$

Hodinová ručička stihne urazit 1,35 otáčky, hodiny se tedy zastaví přibližně za 16 hodin.

Pro zajímavost: kdyby na hodinách chyběla sekundová ručička (což je obvyklý případ), hodiny by se zastavily až po více než třech týdnech.

Je dobré si všimnout, že nám tíhové zrychlení v konečném výsledku nehraje roli, takže můžeme prohlásit, že výsledek je na tíhovém zrychlení nezávislý. To je jedna z pěkných vlastností obecných řešení a dobrý důvod, proč je preferovat před průběžným dosazováním konkrétních hodnot.

Viktor Materna
`materna@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.5 ... Nedostavěný obchvat

7 bodů; (chybí statistiky)

Město Výfučkov leží na hlavní cestě mezi Prahou a Brnem, tedy většina aut, která jím projíždí, se snaží dostat ze severu na jih. Bohužel však městem protéká ve směru z východu na západ řeka.

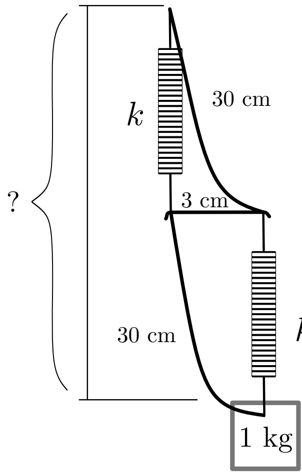
Aby auta nejezdila městem, rozhodli se ve Výfučkově stavět obchvat. Jelikož se ale zastupitelé severní a jižní části nedohodli, začali ze severu stavbu obchvatu západním směrem a z jihu začali stavět z východní strany, přičemž oba obchvaty dostavěli až po most přes řeku (starý most v centru během stavebního šílenství strhla povodeň). Pro průjezd ze severu na jih tedy zbyly dvě možnosti, využívající vždy na jednom břehu obchvat a na druhém průjezd městem.

Každá část obchvatu je kapacitní a cesta po ní trvá 30 minut bez ohledu na to, kolik aut ji využívá. Druhou část cesty však řidiči musí jet městem, kde cesta trvá 4 minuty za každých 100 aut, které po dané silnici projíždějí jedním směrem.

1. *Městem každé ráno projíždí jedním směrem 1 000 aut, jejichž řidiči mají chytré navigace, tedy si každý z nich zvolí nejvýhodnější cestu včetně dopravního vytížení: buď obchvatem a pak městem z jedné strany, nebo městem a pak obchvatem z druhé strany (most přes řeku město-město pro auta neexistuje). Jak dlouho bude každému řidiči trvat průjezd městem? Nakreslete si diagram cest.*

2. *Nový primátor se rozhodl části usmířit, dopravní situaci vyřešit a vybudovat tunel, který nedostavěné části obchvatu propojí. Tato vymoženost dokonale spojuje cesty v půlce města: tedy když auto začne jet po obchvatu, může pokračovat běžně městem, nebo projet tunelem na druhou část obchvatu. Ale i když začne cestu městem, může se v půlce rozhodnout, jestli bude pokračovat po obchvatu jako běžně, nebo projede tunelem a zase pojede městem. Průjezd tunelem trvá 3 minuty bez ohledu na to, kolik aut jím projíždí. Jak dlouho bude nyní každému řidiči trvat nejvýhodnější trasa?*

3. *Výfuček se rozhodl primátorovi ukázat, co svou iniciativou provedl, a to jak jinak než pomocí fyzikálního modelu. Vzal tedy dvě pružinky o tuhosti* $k = 0{,}25\,\mathrm{N{\cdot}cm^{-1}}$ *a počáteční délce téměř nulové, na každou navázal provázek dlouhý* 30 cm *a pružinky propojil provázkem dlouhým* 3 cm. *Sestava tedy odpovídala městským cestám, kde provázky jsou tunel/obchvat a pružinky cesta městem. Na obě pružinky zároveň pak Výfuček pověsil závaží působící silou* 10 N.



Obr. 17: Výfučkův model s pružinkami

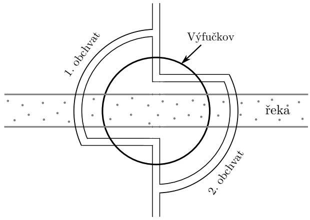
Jaká bude vzdálenost závaží od bodu závěsu? Nejspíš budete muset použít vztah pro skládání tuhosti dvou sériově visících pružinek.

4. *Výfuček poté vzal nůžky a krátký provázek* 3 cm *přestřihl. Co se stalo se závažím? Jak tato situace odpovídá dopravní situaci popsané výše (tj. které „pružinkové“ veličiny odpovídají kterým dopravním)?*

Předpokládejte, že pružinky mají nulovou klidovou délku.

1. Auta jedoucí jedním směrem mají na výběr dvě možnosti. Jako první budeme uvažovat cestu nejdříve přes obchvat a poté přes město, jako druhou možnost nejdříve přes město a poté přes druhý obchvat. V případě, kdy je v obou možnostech počet aut na trase stejný, je stejný i čas potřebný k překonání cesty v obou možnostech – ty jsou totiž symetrické (což je mimo jiné viditelné i na diagramu).

   Intuitivně platí, že se auta rozdělí na dvě poloviny, tedy na každé z možností bude 500 aut. Pojďme to trochu lépe vysvětlit: představme si, že jednou trasou jede více aut než druhou. To je však v rozporu se zadáním, v takovém případě by některý z řidičů na delší trase přejel na kratší, čímž by si ušetřil čas. Proto se nutně dostaneme do situace, kdy si řidiči



nemohou zkrátit čas, tedy obě cesty trvají stejně, takže všude je stejně aut. Cesta potom každému řidiči trvá:

$$t = t_\mathrm{O} + t_\mathrm{M} = 30\,\mathrm{min} + 4\,\mathrm{min} \cdot \frac{500}{100} = 50\,\mathrm{min}\,,$$

a to v obou možnostech. Jako t_O myslíme čas strávený v obchvatu, jako t_M ve městě.

2. Ve výsledku zde máme čtyři různé možnosti. První možností bude opět cesta obchvat–město, druhou opět město–obchvat, třetí nově obchvat–tunel–obchvat a čtvrtou město–tunel–město. Situace zde bude o něco složitější, protože všechny cesty již nejsou symetrické (v takovém případě bychom mohli rozdělit auta na čtvrtiny a každá cesta by trvala stejně). Pro první možnost bude doba průjezdu:

$$t_1 = t_\mathrm{O} + t_\mathrm{M2}\,,$$

kde za t_M2 bereme čas strávený v druhé polovině města. Pro druhý případ analogicky:

$$t_2 = t_\mathrm{M1} + t_\mathrm{O}\,.$$

Dále pro třetí případ:

$$t_3 = 2t_\mathrm{O} + t_\mathrm{T} = 2 \cdot 30\,\mathrm{min} + 3\,\mathrm{min} = 63\,\mathrm{min}\,,$$

přičemž t_T je doba strávená v tunelu. Pro čtvrtý případ platí:

$$t_4 = t_\mathrm{M1} + t_\mathrm{M2} + t_\mathrm{T}\,.$$

Jediná z možností, která je zcela nezávislá na počtu aut, je třetí možnost. Průjezd tudy by však trval přehnaně dlouho, proto zkusíme tuto možnost vyloučit – pokud by vyšel výsledný čas průjezdu víc, než čas pro třetí možnost, pak by byl náš předpoklad špatný. Auta se tedy rozdělí tak, aby byl ve všech (třech) možnostech čas průjezdu stejný,[15] tedy platí:

$$t_1 = t_2 = t_4\,.$$

Z rovnosti prvních dvou možností dostáváme:

$$t_\mathrm{M1} = t_\mathrm{M2} \equiv t_\mathrm{M}\,,$$

[15] Pro stejný čas průjezdu všemi trasami lze argumentovat podobně jako v první otázce.

(oba časy jsme si označili jako t_M) což můžeme dosadit do rovnosti $t_2 = t_4$:

$$t_{\mathrm{O}} + t_{\mathrm{M}} = 2t_{\mathrm{M}} + t_{\mathrm{T}}\,,$$
$$t_{\mathrm{M}} = t_{\mathrm{O}} - t_{\mathrm{T}} = 27\,\mathrm{min}\,.$$

Z toho lze vypočíst celkový čas průjezdu, který si označíme T:

$$t_1 = t_2 = t_4 \equiv T = t_{\mathrm{O}} + t_{\mathrm{M}} = 2t_{\mathrm{O}} - t_{\mathrm{T}} = 2 \cdot 30\,\mathrm{min} - 3\,\mathrm{min} = 57\,\mathrm{min}\,.$$

Celkový čas průjezdu tedy bude vždy 57 min, což je méně než 63 min v nevyužité možnosti. Aby však tento čas mohl platit, musíme si ještě ověřit, zda se shodují počty projíždějících aut. Pro $t_{\mathrm{M}} = 27\,\mathrm{min}$ platí:

$$t_{\mathrm{M}} = \frac{n}{100} \cdot 4\,\mathrm{min} \quad \Rightarrow \quad n = 100 \cdot \frac{t_M}{4\,\mathrm{min}} = 675\,\mathrm{aut}\,,$$

což je počet aut projíždějících jak první, tak druhou částí města. Plyne z toho, že obchvatu využije v první, resp. v druhé možnosti 325 aut, což dává smysl, protože obě možnosti jsou symetrické.

3. Nyní řešíme úlohu s pružinkami, která je analogická právě vyřešené úloze. Na každou z pružinek působí stejná síla o velikosti:

$$F = kl\,,$$

kde l je natažená délka obou pružinek. To si vyjádříme:

$$l = \frac{F}{k} = 40\,\mathrm{cm}\,.$$

Tato hodnota je ale vyšší než délka lanka, což znamená, že se pružinky plně nenapnou a závaží bude drženo z velké části pouze provázky (kromě té tíhy, která pružinky natáhne tak, aby se svojí délkou vyrovnaly provázkům). Mezi lanky je však ještě krátký provázek, který bude natažen horní pružinkou, a tím pádem zvedne druhý provázek o svou délku. Výsledná vzdálenost závaží od bodu závěsu tedy bude:

$$L = 2 \cdot 30\,\mathrm{cm} - 3\,\mathrm{cm} = 57\,\mathrm{cm}\,.$$

4. Přestřihne-li Výfuček kratší provázek, pak nastane situace, kdy je závaží zavěšeno na dvou systémech – pružinka–lanko a lanko–pružinka. Oba dva systémy jsou symetrické, tím pádem se tíha závaží rozdělí rovnoměrně. Na každou pružinku tedy působí polovina síly a prodlouží se o:

$$l = \frac{F}{2k} = 20\,\mathrm{cm}\,.$$

K celkové vzdálenosti od bodu závěsu pak ještě musíme přičíst délku lanka:

$$L = l + 30\,\mathrm{cm} = 50\,\mathrm{cm}\,.$$

Vzdálenost závaží od bodu závěsu můžeme srovnávat s celkovou dobou průjezdu. Delší lanka představují obchvaty (30 cm = 30 min), kratší tunel (3 cm = 3 min). Pružinky jsou pak se zvyšující se zátěží čím dál delší, a tedy doba potřebná k průjezdu jimi představovaným úsekem se prodlužuje, což odpovídá městským úsekům. Jelikož délku pružinky bereme jako čas potřebný k překonání úseku ($1\,\mathrm{cm} \Leftrightarrow 1\,\mathrm{min}$), pak můžeme působící sílu brát jako počet aut ($1\,\mathrm{N} \Leftrightarrow 100\,\mathrm{aut}$), a tím pádem převrácenou tuhost pružinky k jako zvýšení doby průjezdu na počet projíždějících aut ($1\,\mathrm{cm{\cdot}N^{-1}} \Leftrightarrow 100\,\mathrm{min{\cdot}aut^{-1}}$). Výsledky jsou pak analogické – třetí podúloha odpovídá druhé a čtvrtá odpovídá první.

Zákony ještě formulujeme matematicky, což lépe zdůrazní jejich podobnost. Pro pružinku máme:

$$l = F \cdot \frac{1}{k}\,.$$

Pro dobu průjezdu t, počet aut N a průjezdnost p (průjezdnost definovanou jako doba průjezdu vztažená na počet projíždějících aut) máme tento vztah:

$$t = N \cdot p\,.$$

Tuto úlohu bychom mohli označit za příklad Braessova paradoxu – po odstranění tunelu došlo k záhadnému zlepšení provozu (přestože každý z řidičů si volil pro něj nejvýhodnější trasu). Braessův paradox vychází z tzv. Nashovy rovnováhy, tedy stavu, kdy už žádný z účastníků nemůže svou situaci jednostranně zlepšit (tj. naši řidiči). Přitom z hlediska celkového výkonu provozu úseku není Nashova rovnováha nejlepším řešením. Při nepromyšleném přidávání dalších dopravních spojů se tedy dopravní situace může paradoxně zhoršit.

Naopak pokud by se řidiči nerozhodovali podle Nashovy rovnováhy, mohla by se tak situace pro část řidičů mírně zhoršit, zatímco pro druhou část výrazně zlepšit, a došlo by tak ke zlepšení celkového výkonu dopravy úseku. Ve Výfučkově modelu byl tento paradox vyjádřen pomocí změny zapojení pružinek – v prvním případě sériově, ve druhém paralelně. Při paralelním zapojení se tíha rozloží, a tím pádem se pružinky tolik neprodlouží.

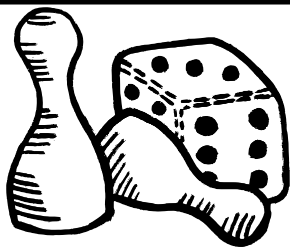
Pokud by řidiči byli dokonale koordinovaní (například pomocí samořídících aut), mohli by se v určitých případech shodnout a naleznout řešení optimální pro všechny: to by odpovídalo tomu, kdyby po postavení tunelu ve městě ho řidiči ignorovali. Museli by se na tom nicméně všichni shodnout, což je velmi nepraktické.

Dalšími dopravními paradoxy jsou například Pigou-Knight-Downsův paradox a Downs-Thomsonův paradox. Pigou-Knight-Downsův paradox tvrdí, že rozšiřování kapacity silnice nemusí nutně znamenat vyšší efektivitu dopravy, jelikož se doprava může přesunout na vedlejší silnici. Navíc více silnic motivuje lidi k nákupu aut, což provoz ještě zhorší. Downs-Thomsonův paradox je velmi podobný – při rozšíření kapacity soukromého úseku se mírně sníží zátěž veřejného úseku a naopak silně zvýší zátěž soukromého úseku, což má ve výsledku pokles efektivity dopravy. Tyto paradoxy však narozdíl od Braessova nepočítají s Nashovou rovnováhou.

Tomáš Patsch
patscht@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.E ... Cinknutá kostka

7 bodů; (chybí statistiky)



Baví vás hrát Člověče, nezlob se? Většina lidí odpoví ano, jen když zrovna vyhrává. K výhře však potřebujeme pořádnou dávku štěstí. A nebo si to štěstí můžeme nějak pojistit…

Vyrobte si tzv. cinknutou kostku, na které padají šestky častěji než ostatní čísla. Kostka by ale neměla být moc nápadná, těžko by si s vámi někdo zahrál, kdyby neházela nic jiného než šestky. Pokuste se proto, aby relativní četnost hození šestky (podíl počtu hodů, kdy padla šestka, a počtu všech hodů) byla co nejblíže ***jedné třetině****. Jednička by měla naopak padat co nejméně.*

Můžete jak upravit obyčejnou kostku, tak od základu vytvořit novou (např. z papíru). Pečlivě popište svůj postup výroby i výslednou stavbu kostky a změřte relativní četnost hození jednotlivých čísel. Je pro hodnoty mimo šestku a jedničku vaše kostka spravedlivá?

Teorie

Hrací kostka má tvar krychle s očíslovanými stěnami. Bývá zvykem, že součet čísel na každých dvou protějších stěnách je 7. Šestka tedy je na protější stěně od jedničky. Toho můžeme využít a změnit tak, jak často budou tato protější čísla padat.

Když hodíme kostku na nějakou rovnou tvrdou podložku, dodáme jí tím určitou pohybovou energii, kostka se většinou roztočí a začne se kutálet po podložce, případně se dokonce může i několikrát odrazit. Při kontaktu s podložkou však postupně kvůli tření zpomaluje až do chvíle, kdy už nemá dost energie, aby se opět překlopila. Nakonec vždy zůstane ležet ve stabilní poloze. Takovýchto stabilních poloh má kostka šest, může ležet na jedné z jejích šesti stěn.

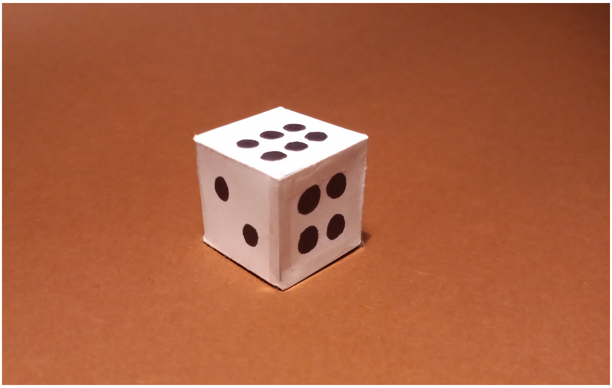
U vyvážené kostky leží její těžiště ve středu. Všech šest možných konečných poloh kostky má tedy těžiště stejně vysoko a jsou proto i stejně stabilní. Když ale stěnu s jedničkou zatížíme, posuneme tím těžiště blíže k této stěně. Poloha na této stěně bude poté pro kostku nejstabilnější (těžiště bude v této poloze nejníže) a častěji zůstane stát právě touto stěnou dolů, takže nahoře nám padne šestka. Naopak při poloze na stěně s šestkou bude těžiště nejvýše a pro kutálející se kostku bude snazší překlopit se na jinou stěnu. Jedničkou nahoru bude tedy padat méně často.

Abychom zjistili, jak často dané číslo padá, musíme samozřejmě kostkou házet opakovaně. Z výsledků potom vypočítáme relativní četnost hození daného čísla tak, že počet hození daného čísla vydělíme celkovým počtem hodů. Relativní četnost by měla i při měřeních s různým počtem hodů vycházet pořád přibližně stejně. Čím větší bude počet hodů, tím by se měla hodnota relativní četnosti ustalovat. Například u dokonale vyvážené kostky by při dostatečném počtu měření měla relativní četnost hození každého čísla vyjít jedna šestina.

Výroba kostky

Aby se nám s kostkou lépe pracovalo a mohli jsme ji vyvážit podle podmínek v zadání, vyrobili jsme si vlastní novou kostku. Kdybychom jako základ použili hrací kostku z nějaké hry, je velká pravděpodobnost, že by na začátku nebyla dobře vyvážená a úpravy by tedy byly náročnější.

Kostku vyrobíme z tvrdého kancelářského papíru. Z něj vystřihneme síť krychle s délkou hrany 2 cm. Pak popíšeme stěny čísly od jedné do šesti tak, aby na protějších stěnách byl součet čísel 7. Ke stěně s jedničkou potom přilepíme z vnitřní strany další čtvereček papíru, takže tato stěna bude mít dvě vrstvy a bude dvakrát těžší než ostatní. Pak už stačí jen kostku slepit dohromady kousky lepicí pásky a máme hotovo. Zvenku vypadá kostka úplně obyčejně, lze ji vidět na obrázku 18.



Obr. 18: Cinknutá kostka

Měření

Na rovném stole házeme kostkou a zapisujeme, kolikrát které číslo padlo. Celkem takto kostkou hodíme dvěstěkrát. Během měření je důležité dbát na to, abychom kostkou házeli stále přibližně stejným způsobem (ale dostatečně náhodným) a hlavně aby se kostka opakovaným házením nepoškodila nebo nezdeformovala. V tom případě by se mohly změnit její vlastnosti a měření (či dokonce výrobu kostky) bychom museli zopakovat.

Číslo	Počet dopadů	$\frac{\text{Relativní četnost}}{\%}$
1	11	5,5
2	33	16,5
3	36	18,0
4	31	15,5
5	25	12,5
6	64	32,0

Tab. 2: Absolutní a relativní četnosti hození jednotlivých čísel.

Z tabulky 2 vidíme, že – jak jsme i chtěli – šestka padá v průměru dvakrát častěji než čísla od dvojky do pětky. U jedničky se nám podařilo dosáhnout relativní četnosti 5,5 %, takže ve 100 hodech by jednička měla padnout průměrně pětkrát nebo šestkrát. Sice se nám nepovedlo, aby jednička nepadala vůbec, ale stále padala ve srovnání s ostatními čísly zhruba třikrát méně často.

Pro čísla mimo jedničku a šestku jsme nenaměřili stejné hodnoty. Trojka padla 36krát, zatímco pětka jen 25krát. Mohlo to být způsobeno jak náhodnými vlivy při házení, tak tím, že kostka nebyla úplně dokonale vyvážená.

Závěr

Házení kostkou je děj, jehož výsledek velmi závisí i na drobných rozdílech v jeho průběhu – např. natočení kostky před hodem, rychlost a způsob hodu, nerovnosti podložky. Přesto můžeme posunutím těžiště kostky ovlivnit pravděpodobnost hození různých čísel.

V našem experimentu jsme vyrobili kostku se stěnou s jedničkou přibližně dvakrát těžší než ostatní stěny. Kostka poté padala častěji šestkou nahoru, ve 32,0 % hodů. To je zhruba dvakrát více než ostatní čísla 2 až 5, každé padlo v průměru v 15,6 % hodů. Stěna s jedničkou, které bylo těžiště kostky nejblíže, zůstala ležet nahoře v 5,5 % případů.

Pro výrobu kostky jsme použili poměrně hrubou metodu, kdy jsme kostku pouze slepili z papíru a jednu stranu odhadem zatížili jednou vrstvou papíru navíc. Kostku by šlo ještě lépe vyvážit použitím pevnějšího papíru a pečlivějším slepením. Ale výrazně lepší kostku touto metodou nevyrobíme.

Pavla Šimová
paja@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.V ... Záření hvězd

7 bodů; (chybí statistiky)

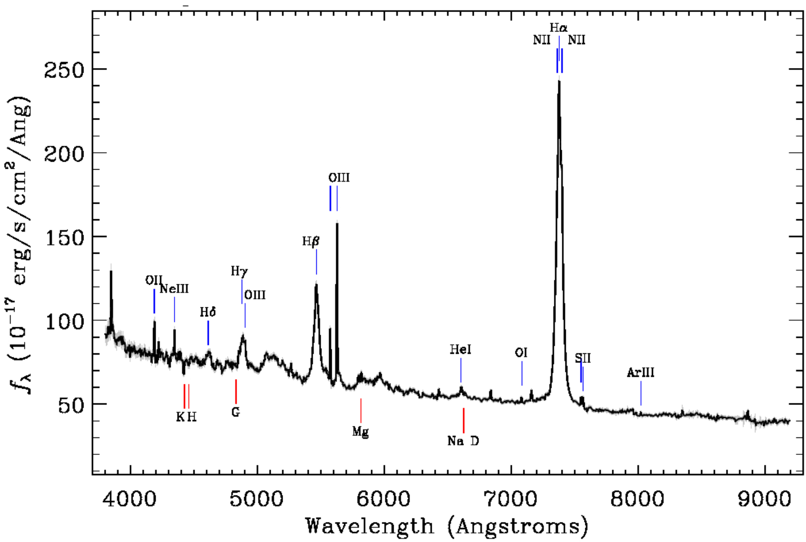
1. *Chemici nalezli ve spektru čáru H-epsilon – přechodem elektronu mezi kterými hladinami vznikla tato čára? Vypočtěte pomocí Balmerova vzorce, na jaké vlnové délce tuto čáru v laboratorních podmínkách najdeme. Dále spočtěte, jakou energii má foton vyzářený tímto přechodem.*
2. *Astronomové pozorovali vzdálenou galaxii a získali spektrum, které vidíte na obrázku. Na jaké vlnové délce najdeme čáru H-alpha? Pomozte astronomům spočítat radiální rychlost dané galaxie, když víte, že laboratorní vlnová délka čáry H-alpha je* $\lambda_0 = 656\,\mathrm{nm}$*. Pohybuje se galaxie směrem od nás, nebo se přibližuje?*

Přestože to pro řešení této úlohy není důležité, povšimněte si veličiny na svislé ose. Základní veličinou observační astronomie je intenzita, která udává výkon záření na jednotku plochy pozorovacího přístroje a jednotku vlnové délky nebo frekvence, pro danou úhlovou výseč zdroje. Například kolik wattů přichází na metr čtvereční na nanometr z dané úhlové výseče Slunce.

Zde je na svislé ose vynesena hustota zářivého toku, což je výkon vztažený na jednotku plochy a vlnové délky, ale z celého zdroje – není tedy vztažena na jednotku prostorového úhlu. V astronomii se někdy setkáme s neobvyklými jednotkami. Jedná se o pozůstatek soustavy cgs (centimetry-gramy-sekundy), která bývala v experimentální fyzice po dlouhou dobu používána.

Jednotkou energie v cgs soustavě je erg, který odpovídá $10^{-7}\,\mathrm{J}$*. Vlnová délka se někdy měří v jednotce zvané Angström, což je* $10^{-10}\,\mathrm{m}$*, tedy desetina nanometru. Za jednotku plochy byl zvolen čtvereční centimetr.*

1. H-epsilon je spektrální čára z Balmerovy řady. Čáry v této posloupnosti vznikají přechodem elektronů z n-té energetické hladiny na druhou. První z této posloupnosti je čára H-alpha, která vznikne přechodem z třetí hladiny na druhou, H-beta pak odpovídá přechodu mezi čtvrtou a druhou atd. V našem případě je čára označená písmenkem epsilon, to je páté písmeno v řecké abecedě, jedná se tedy o pátou čáru ze série a vzniká při přechodu ze sedmé energetické hladiny na druhou. Máme tedy $n = 7$ a po dosazení do Balmerova vzorce tedy zjistíme, že vlnová délka vyzářeného fotonu je:
$$\lambda = \lambda_B \cdot \frac{n^2}{n^2 - 4} \doteq 397{,}0\,\mathrm{nm}\,.$$



Obr. 19: Závislost hustoty zářivého toku na vlnové délce s vyznačenými spektrálními čarami.

Jen pro úplnost připomeňme, že $\lambda_\mathrm{B} \doteq 364{,}6\,\mathrm{nm}$. Dále potřebujeme spočítat energii fotonu o této vlnové délce. Platí:

$$E = hf\,,$$

kde $h \doteq 6{,}626\cdot 10^{-34}$ J·s je Planckova konstanta a f je frekvence fotonu, kterou převedeme na vlnovou délku pomocí vztahu $c = \lambda f$. Jen pro zajímavost (opravdu jen pro zajímavost, pro úspěšné řešení této úlohy toto nebylo třeba) nastíníme, z čeho tento vztah plyne. Vlnění je obecně šíření nějakých poruch. Touto poruchou mohou být změny výšky vodní hladiny, zhušťování a zřeďování molekul vzduchu (zvuk) nebo změny velikosti elektromagnetického pole. Pokud se poruchy pravidelně opakují, můžeme jim přiřadit nějakou časovou periodu $T = 1/f$. Ukazuje se, že fotony jsou změny elektromagnetického pole, a tyto změny mají tím vyšší energii, čím větší mají frekvenci.

Rychlost šíření vlnění c si můžeme představit tak, že za čas T urazí vlna vzdálenost odpovídající jedné prostorové periodě, což je vlastně vlnová délka, tedy: $\lambda = cT = c/f$. Energie našeho fotonu pak je:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_\mathrm{B}} \cdot \frac{n^2 - 4}{n^2} \doteq 5{,}004 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}\,.$$

2. Z grafu vyčteme, že pozorovaná vlnová délka čáry H-alpha je přibližně $\lambda = 740\,\mathrm{nm}$. Je tedy větší oproti laboratorní délce, z čehož plyne, že se galaxie vzdaluje. Ještě spočítáme

velikost rychlosti ze vztahu pro Dopplerův jev:

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$
$$v = 0{,}13c \doteq 3{,}9 \cdot 10^7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Pro zvídavé čtenáře opět uvedeme, jak se dá použitý vzorec odvodit. Představme si, že místo vlnění vysílá zdroj záření krátké impulzy s frekvencí $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Tyto impulzy se šíří prostorem rychlostí c vzhledem k pozorovateli (nejedná se o rychlost $c - v$, jak bychom očekávali, pozorování ukazují, že světlo se šíří stejnou rychlostí vzhledem ke všem pozorovatelům nezávisle na jejich relativních rychlostech, je to i jeden z postulátů speciální teorie relativity). Kdyby se zdroj nepohyboval, byly by impulzy od sebe vzdáleny o $\lambda_0 = cT_0$. Pohyb však způsobí, že se před vysláním dalšího impulzu zdroj přesune o vzdálenost vT_0. Tím se vlnová délka prodlouží na:

$$\lambda = \lambda_0 + v \cdot T_0\,,$$

kde po dosazení $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{\lambda_0}{c}$ a několika úpravách dostaneme námi využitý vztah:

$$\lambda - \lambda_0 = v \cdot \frac{\lambda_0}{c}\,,$$
$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}\,.$$

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz

Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**129**
1.	*Eliška Knopfová*	Bratrská škola, Praha 7	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
2.	*Emma Burešová*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	**25**
3.	*Dat Nguyen*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
4.	*Václav Prachař*	G, Omská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**
5.	*Anežka Prachařová*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**129**
1.	*Petr Barták*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**66**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**129**
2.	*Lucie Kohoutková*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**47**
3.	*Alžběta Sochorová*	G, Blovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
4.–5.	*Eva Kundratová*	ZŠ Komenského II Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
4.–5.	*Zuzana Kýrová*	ZŠ nám. Svornosti, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
6.	*Julie Krčmařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**24**
7.	*Lukáš Hobza*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
8.	*Petr Urválek*	ZŠ Sokolovská, Mnichovo Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
9.	*Juraj Štefina*	CZŠ sv. Gorazda, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**114**
1.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	–	–	–	–	–	–	–	**72**
2.	*Lucie Endlová*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**67**
3.	*Jan Herzig*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	**59**
4.	*Kamilo Tomáš*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**57**
5.	*Marie Steinhauserová*	ZŠ Strmilov	–	–	–	–	–	–	–	–	**40**
6.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**39**
7.	*Vojtěch Černý*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**34**
8.	*Božena Lednická*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**30**
9.	*Pavel Křivý*	G a SOŠ, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
10.	*Natálie Jochová*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
11.	*Petra Šilerová*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
12.	*Michaela Urbanová*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
13.	*Lenka Hromádková*	G, Hlinsko	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**114**
1.–2.	*Lada Srpová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**76**
1.–2.	*Stela Srpová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**76**
3.	*Veronika Menšíková*	Arcibiskupské G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**72**
4.–5.	*Jiří Preč*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**68**
4.–5.	*Damian Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	–	–	–	–	–	–	–	**68**
6.	*Vojtěch Zielina*	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	–	**67**
7.	*Ludmila Šírová*	Mensa G, Praha 6	–	–	–	–	–	–	–	–	**66**
8.	*Patrik Pöschl*	ZŠ Školní ul., Hrádek nad Nisou	–	–	–	–	–	–	–	–	**61**
9.	*Helena Muchová*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**59**
10.	*Jana Jackaninová*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**58**
11.	*Filip Černý*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	**53**
12.	*Vojtěch Janáček*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	**51**
13.	*Mikuláš Vlčan*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**48**
14.	*Michal Dobrovolný*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	**44**
15.	*Mark Joly*	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**43**
16.	*Šimon Mach*	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**40**
17.–18.	*Sofie Prchalová*	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	**35**
17.–18.	*Marie Sára Stejskalová*	G Na Pražačce, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**35**
19.	*Vít Novák*	ZŠ Chyšky	–	–	–	–	–	–	–	–	**33**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	38	114
20.	*Vojtěch Novosad*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	**32**
21.	*Jindřich Anderle*	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**30**
22.–23.	*Nikola Jarošová*	ZŠ a MŠ Dolní Loučky	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
22.–23.	*Jana Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
24.	*Natálie Kamenická*	ZŠ E.Krásnohorské, Ústí nad Labe	–	–	–	–	–	–	–	–	**26**
25.	*Tereza Nejezchlebová*	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	**24**
26.–27.	*Tomáš Řehák*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
26.–27.	*Ester Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
28.	*Alexander Spálený*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
29.	*Barbora Bouberlová*	ZŠ Bavorovská, Vodňany	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
30.	*Adam Mikulič*	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
31.	*Tomáš Zvolánek*	ZŠ V Sadech, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
32.	*Patricie Labuťová*	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
33.	*Amelie Vítková*	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
34.	*Žaneta Rozhonová*	ZŠ Strakonice, Dukelská	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
35.–36.	*Jiří Janda*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
35.–36.	*Marek Janda*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
37.	*Melánie Boušková*	G Pod Svatou horou, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
https://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.