Úloha IV.E ... Stabilita nápojového kartonu

7 bodů; (chybí statistiky)

Marco s Kačkou jeli ve vlaku a pili mléko z nápojového kartonu. Uvědomili si, že když je karton plný, otřesy vlaku jej převrhnou mnohem snáze, než když už bude trochu mléka upito.

Vaším úkolem bude vzít si uzavíratelný karton ve tvaru kvádru (např. od mléka nebo džusu) a zkoumat jeho stabilitu. Pro alespoň deset různých (počátečních) výšek kapaliny v kartonu určete úhel, o který jej můžete naklonit, než se převrhne. Měření opakujte vícekrát. Určení výšky kapaliny v kartonu necháváme na vás (lze např. kapalinu vážit nebo nalévat daný objem).

Co nejpřesněji určete, pro jakou výšku kapaliny je nápojový karton nejstabilnější. Pokuste se k vašemu řešení přiložit nějaké fotografie. Nezapomeňte taktéž specifikovat rozměry kartonu a další relevantní parametry.

Teorie experimentu

Za stabilní polohu jakéhokoli tělesa můžeme považovat stav, kdy se po mírném vychýlení vrátí zpět do původní polohy. Energii, kterou je třeba vynaložit, aby těleso takovou polohu opustilo, nazýváme stabilitou tělesa. Další takovou možnou polohou je poloha labilní, pro kterou platí, že se po mírném vychýlení přesune do jiné stabilní polohy. V našem případě je labilní polohou situace, kdy se těžiště celého tělesa nachází nad osou rotace. V případě prázdného kartonu se těžiště nachází přibližně ve středu, pokud předpokládáme, že jsou všechny stěny přibližně stejně tlusté. Pro úhel, který při labilní poloze svírají stěny kartonu a vodorovná rovina, by tak mělo platit:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_0}{a} \,,$$

kde h_0 je výška kartonu a $a \cdot b$ rozměry podstavy kartonu s tím, že jej překláníme po straně b. Úhel jsme zvolili tak, aby při stabilní poloze byl roven $90\,^\circ$. Pokud však přidáme do kartonu kapalinu, poloha těžiště se změní. Posun závisí jednak na hmotnosti kapaliny, jednak na poloze těžiště kapaliny samotné. V případě, že by byl karton plný, by těžiště kartonu i kapaliny splývala a úhel by byl shodný s úhlem při prázdném kartonu. Největší vliv tedy na stabilitu bude kapalina mít při menším množství, jehož teoretické určení by bylo příliš složité.

Principem úlohy je experimentálně určit závislost úhlu náklonu při labilní poloze na počáteční výšce kapaliny. Výšku kapaliny je však těžké určit kvůli neprůhlednosti kartonu. Proto můžeme odměřit určitý objem ΔV, který přidáváme do kartonu, z čehož určíme přidanou výšku Δh:

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{ab} \,.$$

Praktičtější však bude změřit před každým měřením hmotnost kartonu m a od ní odečíst hmotnost prázdného kartonu m_0. Výšku hladiny kapaliny pak odvodíme:

$$m = m_0 + V\rho = m_0 + abh\rho \,,$$

$$h = \frac{m - m_0}{ab\rho} \,.$$

Problém výpočtu úhlu náklonu spočívá ve skutečnosti, že kapalina bude s náklonem tvar měnit z trojbokých hranolů na čtyřboké až pětiboké, přičemž k výpočtu polohy jejich těžiště je zapotřebí složitějších matematických operací. Jednodušší je tedy určovat jej experimentálně.

Měření

Začneme nejprve s prázdným kartonem, změříme jeho výšku a rozměry podstavy (tyto hodnoty budou relativně nepřesné, protože žádný karton není dokonalý kvádr). Poté jej opřeme o držák zkonstruovaný tak, že tlačí na horní část kartonu, a pohybujeme s ním směrem ke kartonu do doby, kdy již začne samovolně padat. V této chvíli hledáme labilní polohu, kdy se ještě mírně opírá o držák, avšak při slabším postrčení přepadne. Úhloměrem změříme úhel mezi stěnami kartonu a vodorovnou podložkou. Následně karton zvážíme. Postupně přidáváme po malém množství vody a celý postup opakujeme. Karton bychom měli překlápět po delší straně, jelikož se převrátí snadněji. Rozměry a hmotnost prázdného kartonu jsou zaznamenány v tabulce 1.

	Průměr	Abs. odchylka	Rel. nejistota
Výška h_0	225 mm	5 mm	2,2 %
Strana a	63 mm	2 mm	3,2 %
Strana b	75 mm	2 mm	2,7 %
Hmotnost m_0	33 g	0,5 g	1,5 %

Tab. 1: Specifikace kartonu

Tyto rozměry jsou zapotřebí k tomu, abychom mohli vypočítat klidovou výšku hladiny vody pomocí hmotnosti kartonu ze vztahu:

$$h = \frac{m - m_0}{ab\rho}\,.$$

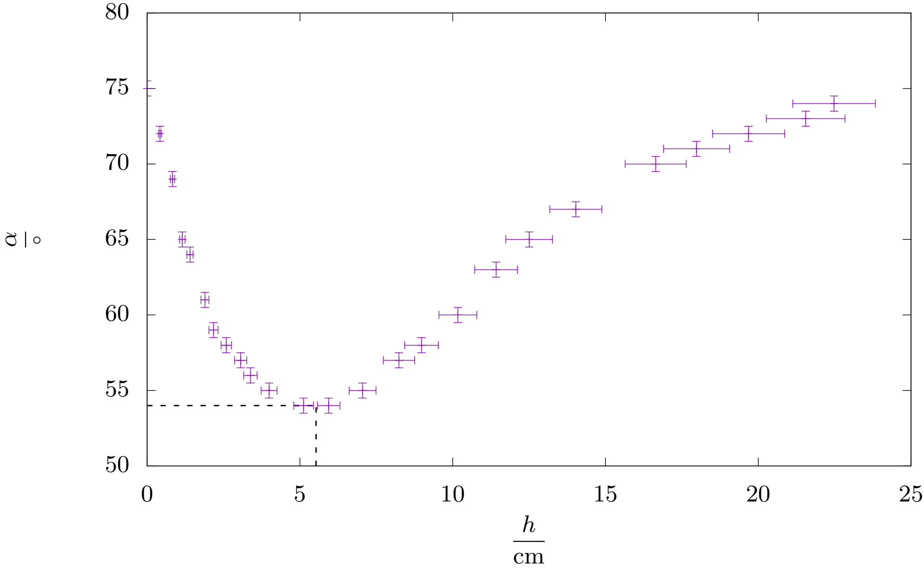
Budeme počítat s hustotou vody $\rho = 0{,}997\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Absolutní odchylka vah bude vždy stejná, a to $\Delta m = 0{,}5\,\mathrm{g}$ (polovina nejmenšího dílku). Výpočet odchylky výšky se může zdát poněkud problematický, nicméně pokud si rozdělíme zlomek na čitatele $M = m - m_0$ a jmenovatele $x = ab\rho$, můžeme vypočítat jejich relativní nejistotu a z toho už si lehce odvodíme relativní nejistotu h. Vypočtěme je tedy:

$$\begin{aligned}
\Delta M &= \Delta m + \Delta m_0 = 2\Delta m\\
\delta M &= \frac{\Delta M}{\bar{M}} = \frac{2\Delta m}{m - m_0}\\
\delta x &= \delta a + \delta b\\
\delta h &= \delta M + \delta x = \frac{2\Delta m}{m - m_0} + \delta a + \delta b\\
\Delta h &= \delta h \cdot \bar{h} = \frac{2\Delta m + (\delta a + \delta b)(m - m_0)}{ab\rho}\,.
\end{aligned}$$

Chybí už jen absolutní odchylka úhlu. Jelikož úhloměr měří na jednotky stupňů, bude se odchylka vždy rovnat $\Delta\alpha = 0{,}5\,^\circ$. Naměřené hodnoty i s výškami a jejich odchylkami jsou zanesené v tabulce 2 a výsledná závislost je vidět v grafu 1 se zvýrazněnou hodnotou minima.

N	$\frac{m}{\mathrm{g}}$	$\frac{h}{\mathrm{cm}}$	$\frac{\Delta h}{\mathrm{cm}}$	$\frac{\alpha}{\circ}$
1	33	0,00	0,00	75
2	53	0,42	0,05	72
3	72	0,83	0,07	69
4	87	1,15	0,09	65
5	99	1,40	0,10	64
6	122	1,89	0,13	61
7	135	2,17	0,15	59
8	155	2,59	0,17	58
9	177	3,06	0,20	57
10	192	3,38	0,22	56
11	221	3,99	0,26	55
12	274	5,12	0,32	54
13	313	5,94	0,37	54
14	365	7,05	0,44	55
15	421	8,24	0,51	57
16	456	8,98	0,55	58
17	512	10,17	0,62	60
18	571	11,42	0,70	63
19	622	12,50	0,76	65
20	694	14,03	0,85	67
21	817	16,64	1,00	70
22	880	17,98	1,08	71
23	960	19,68	1,18	72
24	1048	21,55	1,29	73
25	1092	22,48	1,35	74

Tab. 2: Naměřené hodnoty pro labilní polohu kartonu



Obr. 1: Závislost úhlu náklonu na výšce hladiny

Závěr

Naměřili jsme závislost úhlu náklonu kartonu při labilní poloze na výšce kapaliny ve svislé poloze. Minimální hodnota úhlu náklonu, a tedy nejstabilnější situace, činí zhruba $\alpha_{\mathrm{MIN}} = 54\,^\circ$, což odpovídá výšce hladiny mezi 12. a 13. měřením. Zprůměrováním získáváme odhad výšky hladiny, při které je karton nejstabilnější:

$$\bar{h} \doteq \frac{h_{12} + h_{13}}{2} = 5{,}5\,\mathrm{cm}\,,$$

přičemž absolutní odchylka činí:

$$\Delta h = \Delta h_{12} + \Delta h_{13} = 0{,}7\,\mathrm{cm}\,.$$

Karton je tedy nejstabilnější při výšce:

$$h = (5{,}5 \pm 0{,}7)\ \mathrm{cm}\,,$$

což odpovídá téměř čtvrtině výšky celého kartonu. Jak si můžeme všimnout z tvaru křivky, plný karton musíme otočit o stejný úhel jako prázdný, což odpovídá teorii.

Přesnost experimentu mohla být ovlivněna především „nedokonalostí“ kartonu jako kvádru. Navíc se stěny s přibývající vodou více prohýbají, a tím pádem se mění předpokládaná výška. Další roli hraje uzávěr kartonu. Nepřesnosti mohla způsobit i nemožnost přesného měření při labilní poloze kartonu nebo tvar vnitřních stěn.

Další možností, jak zjišťovat výšku hladiny v kartonu, je nalévání určitého objemu kapaliny. Zde by však vznikaly další nepřesnosti, například při vylití části objemu mimo karton nebo u nepřesných odměrných nádob.

Tomáš Patsch
patscht@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.