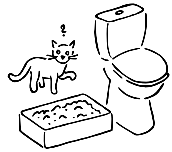
Úloha IV.2 ... Toaletní problém

5 bodů; (chybí statistiky)

Soňa má dva kocoury, Kosíka a Datlíka. Svůj záchod mají ve stejné místnosti jako Soňa, se svými kocoury se tak na toaletě Soňa občas potká. Kocour Kosík chodí na toaletu s frekvencí $f = 0{,}187\,5\,\mathrm{h}^{-1}$, kocour Datlík třikrát denně v pravidelných intervalech a Soňa každých 192 minut. Kolikrát za den a v jakých časech se všichni tři potkají, jestliže naposledy se potkali v 10 hodin večer?



Nejdříve si převedeme všechny periody na stejné jednotky – minuty. Začněme u Kosíka. U něj jako jediného nemáme zadanou periodu, ale frekvenci. Pro frekvenci a periodu platí:

$$T = \frac{1}{f}\,,$$

kde T značí periodu (v jednotkách podle jednotky frekvence) a f frekvenci. Známe Kosíkovu frekvenci $f_1 = 0{,}187\,5\,\mathrm{h}^{-1}$. S pomocí našeho vzorce tedy zjistíme, že perioda $T_1 = 16/3\,\mathrm{h} = 320\,\mathrm{min}$ (pro převedení údaje na minuty stačí periodu v hodinách vynásobit $60\,\mathrm{min{\cdot}h}^{-1}$).

Nyní se můžeme přesunout ke kocourovi Datlíkovi. U něj víme, že na záchod chodí třikrát za den v pravidelných intervalech. Den je dlouhý $t = 24\,\mathrm{hod} \cdot 60\,\mathrm{min{\cdot}h}^{-1} = 1\,440\,\mathrm{min}$. Datlíkova perioda tak bude $T_2 = 1440/3\,\mathrm{min} = 480\,\mathrm{min}$.

Zbývá nám už jen Soňa. U ní máme periodu zadanou v námi požadovaných minutách: $T_3 = 192\,\mathrm{min}$. Stačí nám tedy spočítat, v jakých časových intervalech se nám "potkají" všechny tři periody T_1, T_2 i T_3. K tomu můžeme využít matematickou funkci, kterou nazýváme „nejmenší společný násobek“. Když do ní zadáme několik přirozených čísel, tak nám tato funkce vrátí nejmenší přirozené číslo, které je dělitelné beze zbytku všemi čísly, které jsme do funkce zadali. Tuto funkci nejčastěji značíme $\mathrm{nsn}(x)$.

Víme, že nejkratší interval bude takový, když bude beze zbytku dělitelný jak T_1, tak i T_2 a T_3 – v jednom našem časovém intervalu musí všechny tři periody uběhnout celočíselněkrát. Použijeme tedy naši funkci nejmenšího společného násobku a získáme:

$$\mathrm{nsn}(T_1; T_2; T_3) = \mathrm{nsn}(320; 480; 192) = \mathrm{nsn}(2^6 \cdot 5; 2^5 \cdot 3 \cdot 5; 2^6 \cdot 3)$$
$$\mathrm{nsn}(T_1; T_2; T_3) = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960\,\mathrm{min}\,.$$

Díky tomuto jsme tedy zjistili, že se na záchodě budou všichni tři potkávat s periodou $T_\Sigma = 960\,\mathrm{min}/60\,\mathrm{min} \cdot \mathrm{h}^{-1} = 16\,\mathrm{h}$. Pokud se tedy naposledy potkali v deset hodin večer, znovu se všichni tři setkají v 14 hodin následujícího dne a poté znovu v 6 a 22 hodin dne třetího. Všimněme si, že po dvou dnech (mezi prvním a třetím dnem uběhnou dny dva) se znovu začne opakovat cyklus 22 $\rightarrow$ 14 $\rightarrow$ 6 $\rightarrow$ 22 hodin. Můžeme tak říci, že na záchodě se všichni potkají třikrát za dva dny, a to postupně v časech 22, 14 a 6 hodin. Pokud bychom chtěli říci, kolikrát se průměrně všichni na záchodě potkají za jeden den, tak pokud je to třikrát za dva dny, pak za jeden den je to průměrně jedenapůlkrát (jednou za dva dny je to jednou a podruhé dvakrát – aritmetický průměr z jedničky a dvojky je 1,5).

Václav Verner
vasek@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.