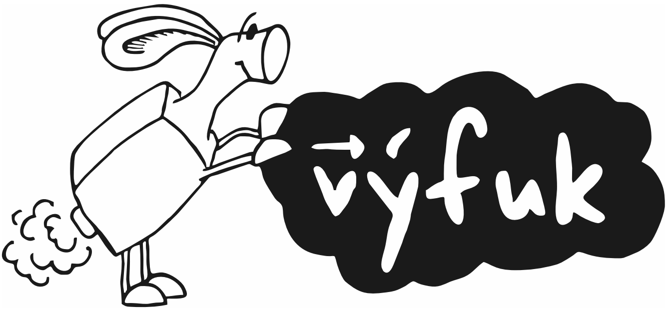


výpočty fyzikálních úkolů

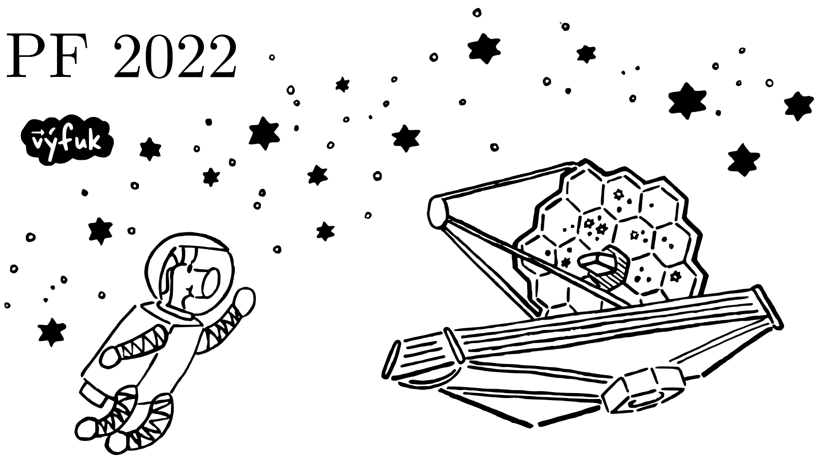
Milí kamarádi,

právě v rukou držíte čtvrtou brožurku letošního ročníku Výfuku. Naleznete zde již tradičně zadání čtvrté série, ve které se tentokrát podíváme, jak vyhrát soutěž Milionář, jak daleko dojede parní lokomotiva nebo jak se chová lahev ponořená do bazénu. Výfučtení se zabývá mezihvězdným cestováním a je k němu přidružená i úloha o fotonické plachetnici. Naleznete zde také vzorová řešení 2. série a pořadí po této sérii.

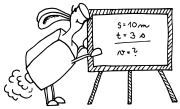
Kromě letního tábora, na který se již můžete přihlašovat, budeme pořádat i Kyber Koncil, který se uskuteční 26.–27. února online na Discordu. Pro další informace sledujte náš web a sociální sítě.

Hodně štěstí do nového roku

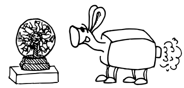
Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



matfyz



Zadání IV. série



Termín odeslání: 21. 2. 2022 20.00

Úloha IV.1 ... Milionář ❻ ❼ 5 bodů

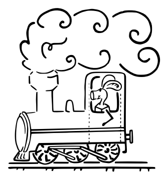
Robert se přihlásil do soutěže Milionář. Soutěžící dostane vždy otázku a čtyři možné odpovědi, z nichž musí vybrat tu správnou, aby postoupil do dalšího kola. Takovýchto kol má soutěž celkem patnáct. Aby to ale nebylo tak přímočaré, má soutěžící možnost jednou využít nápovědu padesát na padesát, díky čemuž pak bude moct u dané otázky vybírat už pouze ze dvou možných odpovědí, jednou zavolat některému ze svých přátel a poprosit ho o radu a jednou nechat hlasovat publikum o tom, která odpověď je správná. Jaká je pravděpodobnost, že Robert odpoví na všechny otázky správně, pokud nebude znát ani jednu správnou odpověď, a navíc využije jen padesát na padesát, neboť nevěří svým přátelům a už vůbec ne divákům?

Úloha IV.2 ... Toaletní problém ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Soňa má dva kocoury, Kosíka a Datlíka. Svůj záchod mají ve stejné místnosti jako Soňa, se svými kocoury se tak na toaletě Soňa občas potká. Kocour Kosík chodí na toaletu s frekvencí $f = 0{,}187\,5\,\mathrm{hod}^{-1}$, kocour Datlík třikrát denně v pravidelných intervalech a Soňa každých 192 minut. Kolikrát za den a v jakých časech se všichni tři potkají, jestliže naposledy se potkali v 10 hodin večer?

Úloha IV.3 ... Orient expres ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Parní vlak si s sebou veze 10 t černého uhlí. Výhřevnost černého uhlí je 20 MJ/kg, parní stroj ovšem dosahuje ve spalování účinnosti jen 8 %. Aby náš vlak překonal veškerý odpor, musí vykonávat sílu 100 kN (pro jednoduchost je tento odpor konstantní, nezávislý na hmotnosti uhlí). Jak daleko dokáže tento vlak na 10 t černého uhlí dojet? Kolik uhlí by bylo třeba, aby dojel z Prahy do Brna, tedy ujel vzdálenost 257 km?



Úloha IV.4 ... Žhavá lavička ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Lukáš seděl při parném letním odpoledni v parku a čekal na kamarády. Bylo takové vedro, až se Lukáš podivil, že se lavička, na kterou již od rána svítilo slunce, ještě neroztavila. Hned si však uvědomil, že lavička teplo nejen přijímá, ale také odevzdává. Lukáše tato úvaha zaujala, a tak se rozhodl spočítat, na jaké hodnotě by se teplota lavičky měla ustálit. Ví, že ze Slunce dopadá na jeden metr čtvereční výkon 1 360 W, a také ví, že intenzitu tepelného záření, které vyzařuje lavička, může vypočítat pomocí Stefanova-Boltzmannova zákona

$$I = \sigma T^4\,,$$

kde $\sigma \doteq 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^2{\cdot}K^{-1}}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a T je teplota v kelvinech. Dále Lukáš odhadl, že sluneční záření dopadá na polovinu povrchu lavičky a že přenos tepla mezi lavičkou a vzduchem odebere lavičce čtvrtinu[1] dopadajícího výkonu. K jaké teplotě by měl Lukáš výpočtem dojít?

Úloha IV.5 ... Milionářská párty ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Robertovi se podařilo vyhrát v soutěži Milionář, aniž by znal jedinou správnou odpověď (musel tipovat). Za výhru uspořádal velkou párty v bazénu. Rozlil hostům poslední jahodový mošt ze skleněné lahve válcového tvaru o objemu $V = 1\,\mathrm{l}$, jejíž stěny mají zanedbatelnou tloušťku, když ho v tu chvíli napadlo, že ji může využít k fyzikálnímu experimentu.

Zavřel lahev a ponořil se ke dnu bazénu, jehož hloubka je $h = 2\,\mathrm{m}$.

1. Jaká vztlaková síla působila na plně ponořenou lahev? Měnila se tato síla s hloubkou?
2. Jak velký hydrostatický tlak pociťovala lahev na dně bazénu?
3. Robert pak držel hrdlo lahve směrem dolů a lahev otevřel tak, že z ní neunikl žádný vzduch, ale natekla do ní voda. Jaký objem vody natekl do lahve?

Předpokládejte, že vzduch v lahvi zůstane při stejné teplotě, protože voda přebytečné teplo odvede. Atmosférický tlak je za normálních podmínek roven $p_\mathrm{A} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$.
Nápověda: Může vám pomoci stavová rovnice ideálního plynu. Ta dává do vztahu tlak p, objem plynu V a jeho teplotu T:

$$\frac{pV}{T} = nR\,,$$

kde n je látkové množství plynu v molech a R je molární plynová konstanta. Pokud se teplota plynu při ději nemění, je součin $pV =$ konst, a je tedy na začátku děje stejný jako na jeho konci.

Úloha IV.E ... Stabilita nápojového kartonu ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Marco s Kačkou jeli ve vlaku a pili mléko z nápojového kartonu. Uvědomili si, že když je karton plný, otřesy vlaku jej převrhnou mnohem snáze, než když už bude trochu mléka upito.

Vaším úkolem bude vzít si uzavíratelný karton ve tvaru kvádru (např. od mléka nebo džusu) a zkoumat jeho stabilitu. Pro alespoň deset různých (počátečních) výšek kapaliny v kartonu určete úhel, o který jej můžete naklonit, než se převrhne. Měření opakujte vícekrát. Určení výšky kapaliny v kartonu necháváme na vás (lze např. kapalinu vážit nebo nalévat daný objem).

Co nejpřesněji určete, pro jakou výšku kapaliny je nápojový karton nejstabilnější. Pokuste se k vašemu řešení přiložit nějaké fotografie. Nezapomeňte taktéž specifikovat rozměry kartonu a další relevantní parametry.

Úloha IV.V ... Fotonická plachetnice ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Zkusme si na chvíli představit, že se nám energetickou a environmentální krizi podaří úspěšně překonat. Přenesme se do budoucnosti, ve které má lidstvo k dispozici vyspělé technologie a prakticky neomezené množství energie, a zkusme se zamyslet, jak by mohla vypadat fotonická plachetnice s lidskou posádkou.

[1] To zhruba platí v určitých případech pro okolní teplotu 20°C.

1. Mějme fotonickou plachetnici s hmotností (vč. plachty) $m = 2\,000\,\mathrm{t}$, která se pohybuje rychlostí 0,2 c. Jakou má tato plachetnice (relativistickou) kinetickou energii? Jak by nejspíš dopadla planeta, ke které by mířila, kdyby se ji nepodařilo zabrzdit? Doporučujeme srovnání s jaderným výbuchem přes ekvivalent TNT.

2. Nyní již počítejme pro jednoduchost nerelativisticky. Plachetnici urychlujme konstantní silou po vzdálenost s. Odvoďte vztah pro rychlost plachetnice v na konci urychlování. Tato rychlost bude záviset na velikosti působící síly F a hmotnosti plachetnice m (najděte obecný vztah mezi veličinami, nepočítejte s konkrétními číselnými hodnotami jako v minulém příkladě). Počáteční rychlost plachetnice je nulová.

3. Uvažujme laser o výkonu P. Jaká síla bude na plachetnici působit v závislosti na tomto výkonu? Nápověda: Zkuste upravit vztah ve Výfučtení. Energii jednoho fotonu spočítáme jako $E = hc/\lambda$.

4. Mějme laser o výkonu $P = 10\,\mathrm{PW}$, který fotonickou plachetnici dokáže efektivně urychlovat až na vzdálenost $s = 10 \cdot 10^{11}\,\mathrm{km}$. Jakou rychlost plachetnice získá? Za jak dlouho doletí k našemu nejbližšímu hvězdnému sousedovi?

Výfučtení: Rychlé interstelární cestování

Úvod

Dne 4. října roku 1957 lidstvo vypustilo na oběžnou dráhu Země první umělou družici a vstoupilo tak do své kosmické éry. I přes následné dosažení celé řady dílčích úspěchů je však budoucnost, ve které jsou lety do vesmíru běžnou součástí našich životů, stále velmi vzdálená. Vstup soukromého kapitálu a vznikající konkurenční prostředí nám sice přináší určitou naději, že se lety do vesmíru v následující dekádě dále významně zlevní, ale určitě ne natolik, aby se status quo zásadně změnil. V tomto Výfučtení se zkusíme zamyslet nad tím, co expanzi lidstva do vesmíru brzdí. Nebudeme se držet při Zemi. Zaměříme se rovnou na interstelární cestování. Představíme si jeden zcela zásadní problém, který nám v cestách k našim hvězdným sousedům brání, podíváme se na jeho možná řešení využívající již existující technologie a nakonec se v zadání úlohy k Výfučtení krátce zamyslíme nad tím, jak by interstelární cestování mohlo vypadat, kdyby se nám zmíněný problém podařilo odstranit.

Univerzální měna vesmíru

Vědecký pokrok je chaotický, nepředvídatelný a vyžaduje velmi specifické incentivy. Je prakticky nemožné jej jakkoliv organizovat nebo plánovat. Právě proto nelze napsat, že by rychlejšímu vývoji kosmických technologií bezprostředně bránila jedna konkrétní věc. Ostatně to by bylo neuctivé vůči tisícům raketových inženýrů a vědců, kteří neustále přicházejí s novými inovacemi, které teprve dohromady umožňují dosáhnout viditelného pokroku, jenž následně vnímá i široká veřejnost. K podobným tvrzením se můžeme uchýlit teprve tehdy, když se zaměříme na ty nejobecnější principy a prodloužíme časový horizont. Potom poměrně snadno dospějeme k názoru, že všechny operace ve vesmíru, které zatím známe jen od autorů sci-fi, mají jedno společné. Vyžadují řádově větší množství energie, než jakým lidstvo v současnosti disponuje.

Spotřeba energie je s vědeckotechnickým pokrokem svázána už od nepaměti. Na začátku byl člověk odkázán pouze na sílu svých svalů. Veškerou energii získával z potravy. Později se naučil používat sílu ohně a vody. Mnohem později, teprve když začalo lidstvo ve velkém spalovat fosilní paliva a získalo tak obrovské množství relativně levné energie, mohly být položeny základy moderního světa, ve kterém dnes žijeme. Domnívat se, že pokrok může být na spotřebě energie nezávislý, by bylo velmi naivní. Ostatně když se podíváme na světovou spotřebu elektrické energie, můžeme si všimnout, že v tomto století viditelně poklesla jen jednou. Došlo k tomu během největší finanční krize, tedy v době, kdy současně klesala i životní úroveň obyvatelstva.

Výše uvedené skutečnosti nám naznačují, že významného pokroku v dobývání vesmíru se nedočkáme dříve, než se nám podaří dosáhnout stejně významného pokroku v energetice. Průlom zde by mohl teoreticky nastat také v důsledku zvyšování tlaku na snižování emisí skleníkových plynů. Tato výzva, které čelíme nyní a v následujících letech, je jednou z vůbec největších výzev v historii.

Naštěstí by se interstelární lety daly za určitých podmínek uskutečnit i bez ohledu na výsledek transformace energetického sektoru. Než si ale tento koncept představíme, zkusíme si spočítat, o jakém množství energie potřebné na interstelární let, se tu konkrétně bavíme.

Řádový odhad potřebné energie

Abychom získali představu, jak enormně je interstelární cestování náročné, zkusme si spočítat, kolik energie by bylo potřeba pro interstelární let malé lodě s posádkou tvořenou čtyřmi astronauty. Můžeme vyjít z předpokladu, že taková loď by se musela pohybovat velmi rychle. Skoro tak rychle jako světlo. Pokud by se loď pohybovala řádově pomaleji než světlo, celá posádka by během letu zemřela stářím. Určitou alternativu představuje koncept obří lodě schopné pojmout řádově desítky tisíc kolonistů, která by mohla plout vesmírem celá milénia. U takové lodě by však nižší potřebnou rychlost vyvážila obří hmotnost a s potřebnou energií bychom na tom byli ještě hůře než v případě malé, lehké a rychlé lodě. Cestování rychlostí vyšší než světlo si zakažme. Jisté slibné koncepty nám sice třeba jednou umožní obejít Einsteinovu teorii relativity, ale bude lepší, když pro tentokrát zůstaneme nohama na zemi a podobné teorie prozatím přenecháme autorům sci-fi.

Nyní se vraťme k našemu modelovému případu. Řekněme, že by loď vážila $m = 1\,000\,\mathrm{t}$ a potřebovali bychom ji urychlit na $v = 0{,}3\,\mathrm{c}$. Energii takové lodi spočítáme podle relativistického vzorce, protože při takto velkých rychlostech už se začínají projevovat relativistické efekty. Pokud jste o speciální teorii relativity dosud neslyšeli nebo s ní neumíte počítat, nebojte se a klidně přeskočte až na výsledek. Pro řešení úlohy k Výfučtení nebude její znalost potřebná. Doporučujeme zkusit si dosadit do standardního nerelativistického vzorce $E = mv^2/2$ a porovnat, o kolik se váš výsledek při této rychlosti liší.

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2$$

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}3^2}} - 1 \right) \left(1 \cdot 10^6\,\mathrm{kg} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2 \right)$$

$$E \doteq 4{,}34 \cdot 10^{21}\,\mathrm{J}$$

Číslo, které nám vyšlo, nám o energetické náročnosti interstelárních letů neřekne nic povzbudivého. Lidstvo dnes každou sekundu spotřebuje[2] řádově $10 \cdot 10^{13}$ J energie. Vyrobit potřebné množství energie pro jediný interstelární let malé lodě by nám tímto tempem trvalo tisíce let. Situace by se dramaticky nezlepšila, ani kdybychom se stali plnohodnotnou civilizací prvního typu na Kardašovově škále, (využili bychom veškeré energetické zdroje Země). Polepšili bychom si sice o čtyři řády, ale i tak by výroba potřebného množství energie trvala celý rok. Dá se tedy předpokládat, že lidé nebudou moci cestovat mezi hvězdami dříve, než dokážou využít významné procento veškeré dostupné energie ve Sluneční soustavě.

Připomeňme si, že se stále bavíme výhradně o interstelárním cestování. Rychlé a pohodlné lety uvnitř Sluneční soustavy, které byly krátce zmíněny na začátku, by samozřejmě vyžadovaly o několik řádů méně energie. K jejich uskutečnění by nám proto mohl pomoci i méně radikální průlom v energetice, který by nemusel nutně spočívat ve vybudování Dysonovy sféry. Prozatím se však naděje na rychlé interstelární cestování úplně nevzdávejme. Pravda, budeme muset slevit z požadavku na lidskou posádku, ale výměnou se dostaneme ke konceptu, který je mnohem blíž současným technologickým možnostem a není ani limitován něčím tak fundamentálním jako je potřebné množství energie.

Nanofotonické plachetnice

Důvodem, proč obětovat lidskou posádku, je především snížení hmotnosti. To musí být skutečně radikální. Určitě nechceme dospět ke konceptu pomalé sondy, která by do nejbližší hvězdné soustavy letěla tisíce let. Zkusme si představit sondu s hmotností $m = 10\,\mathrm{g}$ a stejnou rychlostí jako v předchozím příkladě a spočítejme pro ni její kinetickou energii. Vyjde nám $4{,}34 \cdot 10^{13}$ J.

To už vypadá mnohem nadějněji. Můžeme si všimnout, že tentokrát už bychom potřebnou energii dokázali vyrobit během několika minut. Zbývá si položit otázku, jestli lze vyrobit sondu vážící pouhých pár gramů, kterou by šlo urychlit na rychlost řádově srovnatelnou s rychlostí světla, která by byla schopná proletět skrz mezihvězdný prostor a ideálně by nám potom na vzdálenost několika světelných let dokázala poslat nasbíraná data. Odpovědí je koncept nanofotonické plachetnice.

Začneme tím, že si nejprve představíme solární plachtu. Solární plachta funguje na velmi podobném principu jako plachty, které používají plachetnice na moři. Okolní pohybující se částice předávají plachtě část své hybnosti, což ji urychluje ve směru pohybu částic. V konečném důsledku se společně s plachtou dává do pohybu i plavidlo s posádkou. Zatímco v případě pozemských plachetnic jsou pohybujícími se částicemi molekuly vzduchu, ve vesmíru si plachetnice musí vystačit s fotony. Fotony jsou částice, které mají nulovou klidovou hmotnost a pohybují se rychlostí světla. Proto jejich hybnost nelze počítat standardním způsobem. Odvozením z relativistického vztahu pro energii pohybující se částice lze dospět k elegantnímu vztahu ve tvaru $p = \frac{h}{\lambda}$, kde h je Planckova konstanta a λ vlnová délka fotonu. Můžeme si všimnout, že s prodlužující se vlnovou délkou energie fotonů klesá. Různými úvahami bychom nyní mohli dospět k řadě dalších zajímavých poznatků o fotonech. Pro pochopení principu fungování fotonických plachetnic si ale vystačíme se samotným vztahem.

Určitě by nás například zajímalo, jakou silou fotony na plachtu působí a jaké zrychlení plachetnici udělují. Můžeme si rozmyslet, že síla bude určitě záviset na počtu dopadajících

[2] `https://ourworldindata.org/energy-production-consumption`

fotonů a jejich energii. Jelikož už jsme si vyjádřili hybnost fotonů v závislosti na jejich vlnové délce, vyjdeme ze vztahu pro sílu, který ji definuje jako změnu hybnosti za čas:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}\,.$$

Za předpokladu, že se fotony od plachty odrážejí a nejsou jí pohlcovány, dosadíme za změnu hybnosti dvojnásobek hybnosti jednoho fotonu vynásobenou časem t, plošnou hustotou fotonů dopadajících za jednotku času n a plochou plachty S. Dospějeme k následujícímu vztahu:

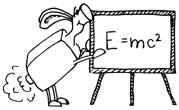
$$F = \frac{2hSn}{\lambda}\,.$$

Pokud by nás zajímalo zrychlení plachetnice, stačilo by výslednou sílu vydělit její hmotností. Kdybychom do vztahu dosadili konkrétní hodnoty, vyšlo by nám, že v rozumné vzdálenosti od Slunce jeho fotony skutečně dokážou plachetnici nezanedbatelně urychlit. To zní skvěle, neboť solární plachetnice mají oproti konvenčně poháněným vesmírným lodím jednu obrovskou výhodu: nemusí s sebou vézt těžké palivo. Výpočty raketových inženýrů následované letem Ikaru, první solární plachetnice, nám ale zároveň ukázaly jejich značnou nevýhodu: jsou sice urychlovány jistě, ale zato hodně pomalu. Tak pomalu, že bychom se k nejbližší hvězdě dostali opět nejdříve za několik tisíc let. Právě tady ale přichází do hry omezení na velmi malou hmotnost. Pokud bychom vyrobili nanofotonickou plachetnici vážící jen několik málo gramů, mohli bychom se místo na fotony pocházející ze Slunce spolehnout na výkonné pozemské lasery. Pokud by se nám na takovou plachetnici podařilo svítit lasery s výkonem řádově ve stovkách gigawattů alespoň několik desítek minut, fotony by ji dokázaly urychlit třeba i na dvacet procent rychlosti světla. A touto rychlostí už by cesta k nejbližší hvězdě trvala jen dvacet let. Problém v tomto případě by bylo nasměrovat laser na plachetnici a vytvořit dostatečně málo rozbíhavý laserový paprsek.

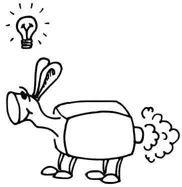
Závěr

Představený koncept miniaturní sondy vážící sotva pár gramů, cestující významným procentem rychlosti světla a urychlované lasery, takzvané nanofotonické plachetnice, získal v posledních letech značnou pozornost. V cestě ke hvězdám nám ovšem brání i jiné problémy než jen nedostatek energie. Předně jde o pevnost plachty. Ta by musela mít současně maximální plochu a minimální hmotnost. V ideálním případě by proto neměla být tlustší než jen několik málo atomových vrstev. Dále by musela odrážet téměř sto procent fotonů a zvládat se dostatečně rychle ochlazovat vyzařováním, aby se neroztavila. Kromě toho by plachta měla být odolná kolizím s mezihvězdným prachem při rychlostech v řádu desítek tisíc kilometrů za sekundu. Asi není potřeba zdůrazňovat, že najít materiál s požadovanými vlastnostmi není snadné. Možným řešením je poslat ne jednu, ale rovnou tisíce nanofotonických plachetnic a doufat, že alespoň jedna extrémní podmínky přežije. To ale samozřejmě není univerzální řešení všech zmíněných problémů a před realizací projektu bude ještě potřeba další výzkum.

Viktor Materna
materna@vyfuk.mff.cuni.cz



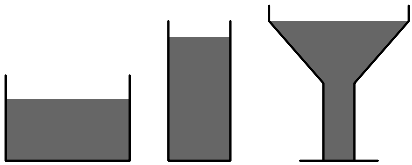
Řešení II. série



Úloha II.1 ... Rovnovážná

5 bodů; průměr 3,29; řešilo 7 studentů

Na obrázku 1 můžete vidět tři různé nádoby. Která z nich má nejvyšší stabilitu, tedy kterou z nich je nejtěžší převrhnout? Rozměry nádob pro potřeby výpočtu odhadněte. Nádoby jsou osově symetrické, tedy např. první nádoba je válec. Připomínáme, že pro určení stability lze použít např. veličinu stabilita, která je definovaná jako rozdíl potenciální energie labilní a aktuální polohy.



Obr. 1: Vyobrazení nádob

Problém stability nádob naplněných kapalinou je všechno jen ne jednoduchý. Platí to i pro nádoby s dobře matematicky popsatelným tvarem, které se objevily v zadání. Přesto, když se nad ním krátce zamyslíme, dospějeme nejspíš všichni ke správnému výsledku, aniž bychom museli cokoliv počítat. Cílem tedy bude najít rozumný kompromis mezi ničím nepodloženým odhadem a přesným výpočtem stability pro každou z nádob, který by se neobešel bez velmi pokročilé matematiky.

Začněme nastíněním postupu, pomocí kterého by bylo možné stabilitu nádob exaktně spočítat. Pokud jde o první dvě nádoby, museli bychom být schopni spočítat objem libovolného řezu válce a následně určit polohu jeho těžiště. Jako proměnnou bychom si zvolili úhel naklonění kuželu a hledali bychom jeho hodnotu pro případ, kdy by se nádoba nacházela v labilní poloze, tedy pro případ, kdy by se těžiště nacházelo přesně nad bodem, kterým by se nádoba dotýkala země. Podobný princip by byl uplatnitelný i na třetí nádobu, zde by ovšem byly všechny výpočty podstatně komplikovanější. Nakonec bychom spočítali stabilitu jako rozdíl potenciální energie ve výchozí a labilní poloze[3].

Kde je problém? K odvození příslušných vzorců bychom museli umět tzv. integrovat. Navíc jsme zcela zanedbali možnost, že by se nějaká voda mohla z nádoby vylít, což je u všech tří nádob velmi reálný scénář, který by nám řešení opět významně zkomplikoval. Začalo by se totiž měnit množství vody v nádobách a spolu s ním i síla nezbytná pro jejich další naklánění. Potom už bychom do vzorce pro stabilitu nemohli tak snadno dosadit a museli bychom použít další nástroje diferenciálního a integrálního počtu.

[3]Tj. poloze, ze které nádoba každou chvíli spadne.

Zkusme se tedy nad příkladem zamyslet, aniž bychom chtěli cokoliv počítat. Když se podíváme na první dvě válcové nádoby, můžeme si všimnout, že v druhé je odhadem dvakrát méně vody než v první. Zároveň je zřejmé, že první nádobu budeme muset naklonit minimálně o stejný úhel jako druhou, aby se dostala do labilní polohy. Pokud tedy ve druhém případě budeme působit přibližně poloviční silou po nanejvýš stejně velké dráze, dospějeme k závěru, že na převrhnutí první nádoby bychom museli vykonat asi dvojnásobek práce, a proto je stabilnější než druhá.

U poslední nádoby si všimneme například toho, že když ji budeme chtít převrhnout, výška jejího těžiště nad zemí se v průběhu překlápění mění podstatně méně než u nádoby uprostřed (tedy i rozdíl stabilní a labilní energie bude nejspíš malý). Samo o sobě by to jako argument asi nestačilo, ale můžeme svou domněnku podpořit třeba tím, že nádoba napravo má těžiště výš a poloměr podstavy je přibližně poloviční. O moc víc vody než v nádobě uprostřed v ní navíc také určitě nebude.

Na závěr tedy můžeme napsat, že nejstabilnější je nádoba nalevo, následovaná nádobou uprostřed. Nejméně stabilní je nádoba napravo.

Viktor Materna
`materna@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.2 ... Rychlé čtení

5 bodů; průměr 4,85; řešilo 46 studentů

Kačka s Evou jednou porovnávaly, jak rychle dokáží číst v různých jazycích. Kačce trvá přečtení jedné stránky anglicky dvakrát tolik minut co přečtení jedné stránky česky a přečtení jedné stránky francouzsky dvakrát tak dlouho co anglicky. Eva čte všemi jazyky stejně rychle. Přečtení textu o jedné české a jedné anglické stránce trvá oběma stejně dlouho, a to 3 minuty. Jednou dostaly za domácí úkol přečíst českou knížku o 250 stránkách, anglickou o 100 stránkách a francouzskou o 50 stránkách. Která bude mít knížky přečtené rychleji?

Naším základním úkolem je převést slovní zadání úlohy do jazyka matematiky, tedy čísel, neznámých a rovnic, se kterými již můžeme matematicky operovat a úspěšně se dopočítat k výsledku. Tento princip je základem řešení každé slovní úlohy. Na tomto příkladu si ukážeme, jak je transformace užitečná a občas opravdu jednoduchá.

Jediný údaj, který máme v zadání úlohy číselně, je čas, pro nás je tedy výhodné zavést si i další neznámé ve formátu času. Označme si čas, za který Eva přečte jednu stránku v angličtině, jako e_a, obdobným způsobem to udělejme i se všemi dalšími veličinami zmíněnými v zadání.

Nyní si již můžeme všechny vztahy vyjádřit pomocí našich neznámých. Eva čte ve všech jazycích stejně rychle. Tuto skutečnost můžeme zaznamenat jako

$$e_\mathrm{f} = e_\mathrm{a} = e_\mathrm{c}\,.$$

Kaččiny časy můžeme zapsat dvěma rovnicemi:

$$k_\mathrm{a} = 2k_\mathrm{c};\; k_\mathrm{f} = 2k_\mathrm{a}\,,$$

a nakonec můžeme napsat, že

$$k_\mathrm{c} + k_\mathrm{a} = e_\mathrm{c} + e_\mathrm{a} = 3\,\mathrm{min}\,.$$

Nyní nám nezbude nic jiného než tyto rovnice vyřešit, a to tak, že vždy postupně dosadíme do poslední rovnice, dokud nedostaneme číselné výsledky pro každou neznámou.

Začneme tedy s dosazením za k_a, což můžeme vyjádřit jako $2k_\mathrm{c}$, a za e_a můžeme dosadit e_c. Tím pádem máme všechny časy vztažené ke stránkám v češtině, tedy

$$k_\mathrm{c} + 2k_\mathrm{c} = e_\mathrm{c} + e_\mathrm{c} = 3\,\mathrm{min}$$
$$3k_\mathrm{c} = 2e_\mathrm{c} = 3min\,.$$

Z toho vyplývá, že $k_\mathrm{c} = 1$min a $\cdot 10^\mathrm{c} = 1{,}5$min, z čehož už snadno odvodíme, že $k_\mathrm{f} = 4\,\mathrm{min}$, $k_\mathrm{a} = 2\,\mathrm{min}$ a $e_\mathrm{f} = e_\mathrm{a} = e_\mathrm{c} = 1{,}5\,\mathrm{min}$.

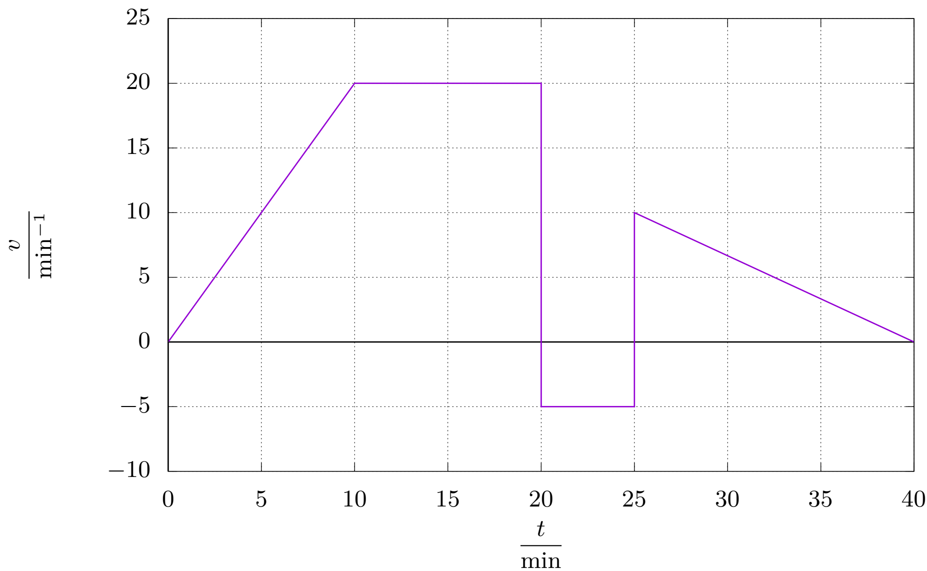
Nyní již tyto časy jen vynásobíme počtem stránek, které musí Eva s Kačkou přečíst. Pro Kačku platí $1 \cdot 250\,\mathrm{min} + 2 \cdot 100\,\mathrm{min} + 4 \cdot 50\,\mathrm{min} = 650\,\mathrm{min}$ a pro Evu $1,5 \cdot 400\,\mathrm{min} = 600\,\mathrm{min}$. Knížky tak bude mít přečtené rychleji Eva.

Karolína Letochová
`kaja@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.3 ... Psaní slohovky

6 bodů; průměr 5,19; řešilo 42 studentů

Adam se snažil napsat slohovou práci o minimálním počtu 250 slov. Rychlost, s jakou ji psal, je znázorněna v grafu 2. Kdy Adam dosáhl potřebného počtu slov a kolik jich měl po dopsání?

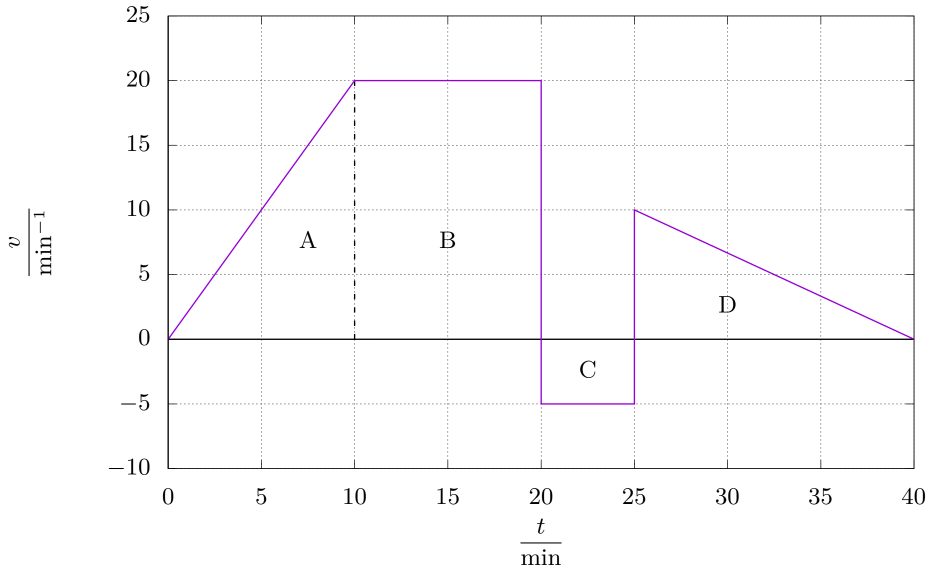


Obr. 2: Graf rychlosti psaní ve slovech za minutu

To, kolik slov Adam za určitý časový úsek napsal, můžeme vyčíst z grafu. V něm je znázorněna rychlost psaní ve slovech za minutu (podobně bychom do grafu mohli zanést třeba rychlost auta v metrech za minutu). Celkový počet napsaných slov pak můžeme vypočítat jako obsah plochy pod křivkou znázorňující rychlost. Pro lepší pochopení stejného principu se můžete podívat na vzorové řešení[4] úlohy 9. ročníku 5. série č. 5.

Pro jednodušší počítání si plochu rozdělíme na více částí. Začneme s částí A od času $t_1 = 0$ do času $t_2 = 10\,\mathrm{min}$. Plochu vypočteme jako plochu trojúhelníku s podstavou $t_2 - t_1$ a výškou $v_1 = 20\,\mathrm{min}^{-1}$:

$$A = \frac{v_1(t_2 - t_1)}{2}\,,$$
$$A = \frac{10 \cdot 20}{2}\,,$$
$$A = 100\,.$$



Obr. 3: Graf rozdělen do jednotlivých úseků

Z obrázku 3 můžeme vidět, že oblast B od $t_3 = 10\,\mathrm{min}$ do $t_4 = 20\,\mathrm{min}$ je 2krát větší než oblast A, což znamená, že v tomto úseku napíše Adam 200 slov. Dohromady s částí A má už 300 slov. My ale potřebujeme zjistit, kdy napíše 250. slovo. Víme, že prvních 100 slov napsal

[4] `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r09/s5/priklad5-5.pdf?cache=`

za 10 minut, a následně rychlostí 20 slov za minutu musí napsat slov 150. Sestavme si tedy rovnici, ze které zjistíme čas t potřebný na dopsání 150 slov od desáté minuty:

$$\begin{aligned} 20t &= 150 \\ t &= 7{,}5\,\mathrm{min}\,. \end{aligned}$$

Přičteme k výsledku oněch deset minut a zjistíme, že Adam napíše 250 slov za 17,5 min.

V úseku C od $t_5 = 20\,\mathrm{min}$ do $t_6 = 25\,\mathrm{min}$ se Adam dostane na -5 slov za minutu (toho mohl dosáhnout např. gumováním). Spočítáme, kolik slov napíše (respektive vygumuje) v tomto úseku ($v_2 = -5\,\mathrm{min}^{-1}$):

$$\begin{aligned} C &= v_2(t_6 - t_5) \\ C &= -5 \cdot 5 \\ C &= -25 \end{aligned}$$

Celkem tedy má

$$(100 + 200 - 25)\,\mathrm{slov} = 275\,\mathrm{slov}\,.$$

Nakonec vypočítáme, kolik slov Adam napíše na posledním úseku D, který trvá od $t_7 = 25\,\mathrm{min}$ do $t_8 = 40\,\mathrm{min}$, a jak obsáhlá bude celá jeho slohovka. Opět k tomu použijeme vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku, tentokrát s výškou $v_3 = 10\,\mathrm{min}^{-1}$.

$$\begin{aligned} D &= \frac{v_3(t_8 - t_7)}{2} \\ D &= \frac{10 \cdot 15}{2} \\ D &= 75\,. \end{aligned}$$

Když vše sečteme, zjistíme, že Adamova slohová práce má celkem 350 slov.

Anežka Čechová
anezka@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.4 ... Tepelné čerpadlo

6 bodů; průměr 5,62; řešilo 26 studentů

Viktor si chce pořídit na chatu nové bazénové tepelné čerpadlo. Zajímá ho však, za jak dlouho se investice do něj vrátí. Tepelné čerpadlo, které si vybral, stojí 24 000 Kč, má příkon 1 kW a tepelný výkon 6,8 kW. Bazén má objem 20 m³ a 1 kWh elektřiny stojí 4 Kč. Předpokládejte, že Viktor chce typicky svůj bazén ohřát o 5 °C, aby Luborovi nebyla zima, a za rok pořádá v průměru dvacet bazénových párty.

Situaci porovnávejte s případem, kdy by Viktor bazén vytápěl přímo pomocí elektřiny ze sítě se 100% účinností.

Abychom mohli odpovědět na otázku v zadání, musíme zjistit, o kolik méně bude Viktora stát jedna bazénová párty, pokud si pořídí tepelné čerpadlo. K tomu se nám v první řadě bude hodit zjistit, jaké teplo Q_B musí voda v bazénu přijmout, aby se ohřála o potřebných $\Delta T = 5\,^\circ\mathrm{C}$.

Jelikož známe objem bazénu a zbývající potřebné vlastnosti vody si můžeme snadno dohledat v tabulkách, můžeme výpočet provést přímým dosazením do známého vzorce.

$$Q_\mathrm{B} = mc\Delta T = \rho V c\Delta T = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}.20\,\mathrm{m^3}.4\,200\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot {}^\circ C^{-1}}.5\,{}^\circ\mathrm{C} = 420\,\mathrm{MJ}$$

Když už známe potřebné teplo na ohřátí bazénu na jednu bazénovou párty, můžeme spočítat, kolik bude toto ohřátí stát bez tepelného čerpadla. Stačí si vzpomenout, že $1\,\mathrm{kWh} = 3{,}6\,\mathrm{MJ}$.

$$P_\mathrm{B1} = \frac{Q_\mathrm{B}}{3{,}6\,\mathrm{MJ}}.4\,\mathrm{Kč} \doteq 467\,\mathrm{Kč}$$

Teď už nám zbývá jen spočítat, kolik by Viktora stálo ohřátí bazénu tepelným čerpadlem. Poměr mezi tepelným výkonem a příkonem nám říká, kolikrát je ohřev s pomocí tepelného čerpadla efektivnější. Můžeme si to představit tak, že elektřina není použita k ohřevu přímo, ale s její pomocí je teplo odebíráno vzduchu a předáváno vodě. Nejedná se tedy o perpetuum mobile, neboť čerpadlo odebírá energii za vzduchu. Ve výsledku je tedy ohřev pomocí tepelného čerpadla 6,8krát efektivnější, a tedy i 6,8krát levnější. Cena ohřevu tepelným čerpadlem je tedy:

$$P_\mathrm{B2} = P_\mathrm{B1}\frac{1}{6{,}8} \doteq 69\,\mathrm{Kč}$$

Nakonec už nám zbývá jen spočítat rozdíl vyjadřující množství peněz, které Viktor ušetří na každé bazénové párty, a vydělit jím celkovou pořizovací cenu tepelného čerpadla.

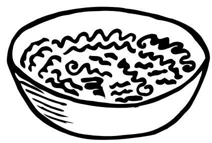
$$n = \frac{24\,000\,\mathrm{Kč}}{467\,\mathrm{Kč} - 69\,\mathrm{Kč}} \doteq 60,3$$

Viktor tedy musí uspořádat alespoň šedesát jedna bazénových párty, aby se mu investice do tepelného čerpadla vrátila. Pokud jich bude pořádat dvacet každý rok, investice se mu vrátí po přibližně třech letech.

Viktor Materna
materna@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.5 ... Lukáš vaří

7 bodů; průměr 4,85; řešilo 27 studentů



Lukáš se rozhodl připravit si k obědu instantní čínskou polévku. Na obalu si přečetl, že obsah pytlíku má vhodit do jednoho litru vařící vody. Naštěstí si ale včas uvědomil, že kdyby na plotnu postavil hrnec s jedním litrem vody, dopustil by se osudové chyby, neboť by vody připravil příliš mnoho. Kvůli teplotní roztažnosti by se totiž objem vody během ohřívání zvětšil, a tak by jí po dosažení teploty $100\,{}^\circ\mathrm{C}$ *bylo více než* $1{,}0\,\mathrm{l}$.

1. *Kolik vody by měl tedy odměřit, aby jí v hrnci po ohřátí byl právě jeden litr, pokud mu z kohoutku teče voda o teplotě* $20\,{}^\circ\mathrm{C}$*? Počítejte s neměnným koeficientem teplotní objemové roztažnosti* $\beta = 190 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$.

2. *Lukáš ale zjistil, že doma bohužel nemá vhodnou odměrku, aby mohl takovéto množství odměřit. Napadlo ho však alternativní řešení. Do hrnce odměří* $1{,}0\,\mathrm{l}$ *vody, následně vodu ohřeje a poté chvilku počká až se přebytečné množství odpaří, aby mu v hrnci zbyl kýžený jeden litr. Jak dlouho od dosažení bodu varu bude muset počkat, než se přebytečné množství odpaří, pokud má jeho sporák výkon* $3{,}0\,\mathrm{kW}$*?*

1. Zahřátí způsobí zvětšení objemu vody – tomuto jevu říkáme objemová teplotní roztažnost a můžeme ho popsat vzorcem
$$\Delta V = V_0 \beta \Delta T\,,$$
kde ΔV je změna objemu z původního objemu V_0 a β je koeficient objemové roztažnosti, který máme zadaný jako $\beta = 190 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ (můžeme najít i v tabulkách). Dále ΔT je změna teploty, která v tomto konkrétním případě činí $\Delta T = 100\,°\mathrm{C} - 20\,°\mathrm{C} = 80\,°\mathrm{C}$. Všimněme si, že když se zde objevuje rozdíl teplot, vůbec nás nemusí trápit, že používáme stupně Celsia místo Kelvinů, protože velikost jednoho dílku obou stupnic je stejná.
Vzorec pro objemovou roztažnost si upravíme, aby se v něm vyskytoval objem po ohřátí, který známe. Činí $V = 1{,}0\,\mathrm{l}$. Nahradíme tedy ΔV rozdílem objemů a získáme
$$V - V_0 = V_0 \beta \Delta T\,.$$
Z tohoto vzorce již snadno dokážeme vyjádřit objem V_0 jen pomocí známých veličin.
$$V - V_0 = V_0 \beta \Delta T \quad \Rightarrow \quad V = V_0(1 + \beta \Delta T) \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{V}{1 + \beta \Delta T}$$
Dosazením zadaných hodnot zjistíme, kolik vody musí Lukáš použít, aby splnil instrukce na obalu:
$$V = \frac{1{,}0\,\mathrm{l}}{1 + 190 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1} \cdot 80\,°\mathrm{C}} \doteq 0{,}99\,\mathrm{l}\,.$$
Vidíme, že změna objemu není nijak enormní a zásadní vliv na polévku by nejspíše neměla, chce-li však Lukáš návod striktně dodržet, musí odměřit 0,99 l vody.
2. V tomto případě vyjdeme z rovnice
$$Q = l_\mathrm{v} m_\mathrm{v}\,,$$
která říká, že k odpaření hmotnosti m_v vody, jejíž měrné skupenské teplo varu[5] je $l_\mathrm{v} = 2\,257\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, je třeba dodat energii Q. Víme, že energie je rovna součinu výkonu a času, můžeme tedy rovnost přepsat a vyjádřit čas t:
$$Pt = l_\mathrm{v} m_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{l_\mathrm{v} m_\mathrm{v}}{P}\,.$$
V tomto okamžiku je důležité si uvědomit, co se vlastně skrývá pod hmotností m_v. Je to hmotnost přebytku vody ΔV, který vznikl rozepnutím vody při ohřevu. Objem ΔV tedy můžeme vyjádřit jako
$$\Delta V = V_0 \beta \Delta T\,,$$
kde V_0 je v tomto případě 1,0 l a ostatní veličiny jsou stejné jako výše. Hmotnost pak dopočteme přes hustotu a objem. Nesmíme však opomenout přepočítat hustotu, protože objem se sice při ohřevu zvětšuje, ale hmotnost zůstává stejná – hustota se tak musí zákonitě měnit.
Když máme na počátku vodu s hustotou ρ_0 o objemu V_0 a hmotnosti m_0, pak po ohřevu o ΔT máme vodu se stejnou hmotností, ale objemem $V = V_0(1 + \beta \Delta T)$. Hustota se tedy změní na hodnotu
$$\rho = \frac{m_0}{V} = \frac{m_0}{V_0(1 + \beta \Delta T)}\,.$$

[5] Můžeme najít např. ve fyzikálních tabulkách.

Abychom se zbavili hmotnosti v čitateli, zapíšeme si ji standardně jako součin původní hustoty a původního objemu. Pak dostaneme vyjádření pro hustotu

$$\rho = \frac{\rho_0 V_0}{V_0(1+\beta\Delta T)} = \frac{\rho_0}{1+\beta\Delta T}\,.$$

Když máme vyjádřenou hustotu ρ, můžeme hmotnost m_v napsat jako

$$m_\mathrm{v} = \rho\Delta V \;= \frac{\rho_0}{1+\beta\Delta T}\cdot V_0\beta\Delta T$$

a dosadit do vzorce pro čas odpařování. Dostáváme

$$t = \frac{l_\mathrm{v} m_\mathrm{v}}{P} = \frac{l_\mathrm{v}\rho_0 V_0\beta\Delta T}{P(1+\beta\Delta T)}\,.$$

Pak už zbývá jen dosadit zadané hodnoty, které ještě musíme převést do základních jednotek, a dostaneme výsledek

$$t = \frac{2\,257\cdot 10^3\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\cdot 1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}\cdot 190\cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}\cdot 80\,{}^\circ\mathrm{C}}{3\,000\,\mathrm{W}\cdot(1+190\cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}\cdot 80\,{}^\circ\mathrm{C})} \doteq 11\,\mathrm{s}\,.$$

Pakliže Lukáš zvolí tento způsob dosažení potřebného objemu, musí počkat 11 s od dosažení varu. Dodejme, že by kýženého objemu pravděpodobně nedosáhl, neboť vypařování probíhá průběžně, nikoliv pouze striktně od bodu varu. Navíc jsme v celé úloze počítali s konstantním koeficientem roztažnosti, který je ve skutečnosti závislý na teplotě, což je další zjednodušení, které má na naše „malé“ výsledky jistě vliv.

Lukáš Linhart
`lukasl@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.E ... Poločas čočky

7 bodů; průměr 5,93; řešilo 28 studentů

Experimenty s radioaktivitou, o kterých se můžete dočíst ve Výfučtení, jsou pro provedení doma příliš nebezpečné. Můžeme si však radioaktivní rozpad namodelovat pomocí čočky. Vezměte si několik zrnek kuchyňské čočky (doporučujeme alespoň 200) a na každou z nich namalujte na jednu stranu tečku. Poté čočku rozsypte a separujte a spočítejte zrnka s tečkou nahoře, která reprezentují rozpadlé atomy. Postup několikrát opakujte, ideálně dokud vám zbývají „nerozpadlá“ zrnka. Poté sestavte graf závislosti počtu nerozpadlých jader na počtu hodů, do kterého kromě naměřených hodnot vyneste i předpokládaný průběh experimentu. Abyste zjistili, zda je takovýto rozpad konsistentní, můžete jej samozřejmě opakovat.

Jaký je poločas rozpadu čočky? Modeluje čočka radioaktivní rozpad věrohodně? Pokud zjistíte výrazné odchylky od předpokládané závislosti, diskutujte, čím by mohly být způsobeny. Místo čočky lze samozřejmě použít cokoliv symetrického, například jednokoruny či bonbóny Skittles.

Teorie

Cílem experimentu je modelovat radioaktivní rozpad, je tedy vhodné se letmo podívat na vztahy, kterými se takový rozpad řídí. Poločas rozpadu t_0 udává časový úsek, po jehož uběhnutí očekáváme, že se polovina jader rozpadla. Počet jader N, která od začátku experimentu zbyla po uplynutí času t, popíšeme vztahem

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_0}} \,,$$

kde N_0 představuje počáteční počet jader. Jelikož se čas vyskytuje v exponentu, říkáme, že je funkce exponenciální. Takové funkce se vyznačují rychlým růstem, v našem případě klesáním, jelikož je exponent záporný.

Při hodu čočkou mohou nastat právě dvě situace, čočka se ustálí s nahoře označenou, nebo s neoznačenou stranou. Jelikož nečekáme, že čočka preferuje jednu stranu více než druhou, budeme předpokládat, že oba jevy jsou stejně pravděpodobné. Pravděpodobnost, že nastane námi preferovaná situace (vrchní strana neoznačená) je $p = 1/2$. Po jednom hodu se rozpadne přesně jedna polovina čočky, jeden hod čočkou tedy můžeme interpretovat jako náš poločas rozpadu. Můžeme tak vytvořit naši rovnici rozpadu

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{n}{n_0}} \,,$$

kde n představuje počet opakování experimentu a $n_0 = 1$. Hlavní rozdíl mezi vzorci je, že náš dává smysl jen pro n náležící přirozeným číslům, nedává smysl hodnota např. $n = 1{,}5$, tedy jeden a půl hodu.

Postup

Řídíme se podle návodu uvedeného v zadání. Po označení čočky ji vyvrhneme na připravenou plochu a spočítáme počet "rozpadlých" jader, tedy ta, která mají na vrchní straně značku. Ta dáme stranou a zapíšeme počet zbylých jader. S nimi poté proces budeme opakovat, dokud nám nezbude žádné nerozpadlé jádro. Pokud házíme s předměty, u kterých může nastat, že dopadnou na třetí stranu (např. mince), budeme s objekty, které dopadly právě na třetí stranu házet ještě jednou, abychom získali validní výsledek.

Měření

Měření jsme provedli celkem 3. Jednotlivá měření lze nalézt ve spodní tabulce spolu s teoreticky předpokládaným výsledkem, který pro nás vyjadřuje rovnice

$$N_t = N_0 \cdot 2^{-\frac{n}{n_0}} = 200 \cdot 2^{-n} \,.$$

Lze vidět, že naměřené hodnoty souhlasí s teoretickým modelem. Očekávaný počet hodů před rozpadem všech částic je 9. My jsme toho dosáhli při 8 a 10 hodech. Pro lepší porovnání teorie a praxe vyneseme data do grafu na obr. č. 4

Je dobré zmínit, že poločas rozpadu je statistická veličina, tedy že udává jen očekávanou dobu, kdy se polovina částic rozpadne. Je tedy možné, že po čase t_0 se rozpadne o něco více, či méně částic, přesně jak vidíme u našeho experimentu.

n	$\frac{n_{p1}}{1}$	$\frac{n_{p2}}{1}$	$\frac{n_{p3}}{1}$	$\frac{n_{pt}}{1}$
0	200	200	200	200
1	109	87	103	100
2	62	49	53	50
3	36	27	25	25
4	23	13	11	13
5	12	6	5	6
6	8	3	4	3
7	4	3	1	2
8	2	3	0	1
9	1	2	0	0
10	0	0	0	0

Tab. 1: Počet čočky po n hodech.

Chyby měření

Toto je jeden z mála experimentů, který není prakticky náchylný na chyby. Jediné, co je důležité, je to, aby čočka opravdu měla stejnou pravděpodobnost dopadu na obě strany. Vše závisí na naší technice hodu. Pokud ale dokážeme zaručit, že je čočka dostatečně promíchána, neměly by vnější vlivy hrát roli.

Možná se ptáte, co jsou odchylky pozorovaných hodnot od teoreticky předpovězené závislosti. Nejedná se o chybu měření, neboť měříme statistický jev. Ani neočekáváme, že data budou křivku přesně kopírovat. Zajímá nás pouze statistická shoda, kterou bychom mohli zlepšit větším množstvím čočky či více opakováními. Statistickou shodu předpovědi a teorie zde však nekvantifikujeme nějak přesně, proto ani nemá smysl řešit chyby.

Závěr

V experimentu jsme úspěšně simulovali radioaktivní rozpad pomocí čočky. Obměnu experimentu bychom získali při použití např. hrací kostky. Rozpad podmíněný hozením jedné číslice z šesti by nastával méně častěji, tudíž i náš "poločas" rozpadu by byl menší.

Patrik Kašpárek
`patrik@vyfuk.mff.cuni.cz`

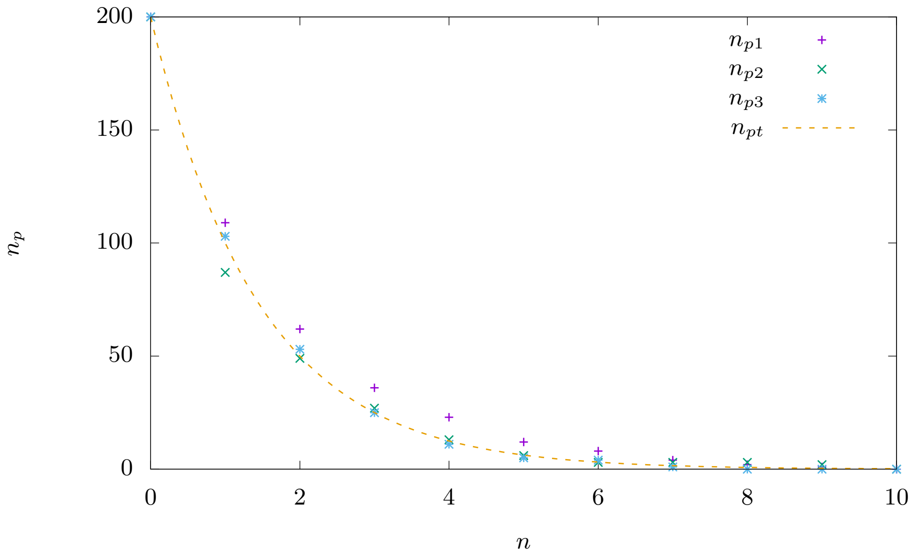
Úloha II.V ... Jádro pudla

7 bodů; průměr 5,70; řešilo 23 studentů

1. *Existují jaderné reaktory, které místo štěpení směsi uranových izotopů štěpí jádra ^{239}Pu. Jednou z reakcí, které v reaktoru probíhají, je*

$$^{239}\mathrm{Pu} + {}^{1}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{234}\mathrm{U} + {}^{4}\mathrm{He} + 2\,{}^{1}\mathrm{n}\,.$$

Určete, kolik energie se během reakce vyprodukuje. Toto číslo srovnejte s energií, kterou vyprodukovala reakce popsaná ve Výfučtení.



Obr. 4: Počet čočky po n hodech s teoretickou závislostí n_{pt}. Teoretická závislost je pro přehlednost vyvedena spojitě.

2. *Po spotřebování veškerého vodíku dochází ve hvězdách k fúzi vzniklých jader helia, a to podle rovnice*

$$^{3}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{7}\mathrm{Be}\,.$$

   Vaším úkolem je zjistit, jaká energie se uvolňuje během této reakce. Také porovnejte uvolněnou energii z reakce s energií uvolněnou sloučením vodíkových jader.

3. *V medicíně využíváme izotop ^{18}F, a to ke zjišťování rozsahu šíření rakoviny v těle. Ten se vyrábí jadernou reakcí*

$$^{18}\mathrm{O} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{18}\mathrm{F} + {}^{1}\mathrm{n}\,.$$

   Určete, zda se jedná o reakci energii spotřebovávající, nebo produkující, a případně kolik energie se uvolní nebo kolik energie musíme reakci dodat, aby proběhla.

Potřebné údaje si vyhledejte na internetu, např. v odkazu uvedeném ve Výfučtení.

Nejdůležitější dovedností v této úloze bude počítat klidové energie. K vyjádření energie budeme používat jednotky eV zavedené ve Výfučtení, připomeňme si, že platí:

$$1\,\mathrm{eV} \doteq 1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}\,.$$

Při výpočtech v jaderné fyzice se elektronvolty často používají i při vyjadřování hmotností, neboť vztah mezi hmotností a energií je:

$$m = \frac{E}{c^2}\,.$$

Na základě tohoto vztahu si zadefinujeme jednotku hmotnosti eV/c^2, která nám zajistí, že energie částic bude mít stejnou číselnou hodnotu jako jejich hmotnost. Například elektron s klidovou energií 0,511 MeV má hmotnost:

$$m_\mathrm{e} \doteq 0{,}511\,\mathrm{MeV}/c^2\,.$$

K výpočtu energií jednotlivých částic budeme dále potřebovat jejich tzv. *relativní atomovou hmotnost*, kterou vyčteme buď z tabulky uvedené ve Výfučtení[6], nebo v podstatě z kterékoliv chemické periodické tabulky prvků (hmotnosti se mohou v jednotlivých tabulkách nepatrně lišit, proto je třeba výsledky brát s rezervou). V těchto tabulkách je atomová hmotnost vyjádřena v násobcích atomové hmotnostní jednotky, pro kterou platí:

$$1\,\mathrm{u} \doteq 1{,}660\,539 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,,$$

pro další výpočty bude výhodné si ji převést na elektronvolty:

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{u} &\doteq \frac{1{,}660\,539 \cdot 10^{-27} \cdot (2{,}997\,925 \cdot 10^{8})^2}{1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}}\,\mathrm{eV}/c^2 \\ 1\,\mathrm{u} &\doteq 931{,}494\,\mathrm{MeV}/c^2\,. \end{aligned}$$

1. Postup výpočtu vyprodukované energie je jednoduchý, stačí si najít v tabulkách relativní atomové hmotnosti jednotlivých částic a vypočítat rozdíl energie před a po reakci:

$$m(^{239}\mathrm{Pu}) \doteq 239{,}052\,163\,\mathrm{u} \qquad m(^{234}\mathrm{U}) \doteq 234{,}040\,946\,\mathrm{u}$$
$$m(^{4}\mathrm{He}) \doteq 4{,}002\,603\,\mathrm{u} \qquad m(^{1}\mathrm{n}) \doteq 1{,}008\,665\,\mathrm{u}$$

Rozdíl energie pak bude:

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &= \left(m(^{239}\mathrm{Pu}) + m(^{1}\mathrm{n}) - m(^{234}\mathrm{U}) - m(^{4}\mathrm{He}) - 2 \cdot m(^{1}\mathrm{n})\right) c^2 \\ \Delta E_1 &= -5{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot 931{,}494\,\mathrm{MeV} = -47{,}5\,\mathrm{keV} \end{aligned}$$

Stejným způsobem pak vypočítáme i vyprodukovanou energii z reakce ve Výfučtení. Připomeňme si, že tato reakce byla

$$^{235}\mathrm{U} + {}^{1}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{92}\mathrm{Kr} + {}^{141}\mathrm{Ba} + 3\,{}^{1}\mathrm{n}\,,$$

z čehož dostaneme vyprodukovanou energii:

$$\begin{aligned} \Delta E_2 &= (235{,}043\,923 - 91{,}926\,156 - 140{,}914\,40 - 2 \cdot 1{,}008\,665) \cdot 931{,}494\,\mathrm{MeV} \\ \Delta E_2 &= 173\,\mathrm{MeV}\,. \end{aligned}$$

Na střední škole možná někdy uslyšíte, že je energeticky výhodné štěpit prvky těžší než železo a slučovat prvky lehčí než železo. Všimněme si, že i když v první reakci dochází ke štěpení těžkého plutonia, tak na rozdíl od druhé reakce energii spotřebovává. Poučky tohoto typu je tedy vždy třeba brát s rezervou, neboť to, že fungují ve velkém množství případů, neznamená, že mají obecnou platnost.

[6] https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9783527618798.app2

2. Spočítejme napřed energii uvolněnou slučováním helia:

$$\Delta E_1 = \left(m(^3\mathrm{He}) + m(^4\mathrm{He}) - m(^7\mathrm{Be})\right) c^2$$
$$\Delta E_1 = (3{,}016\,029 + 4{,}002\,603 - 7{,}016\,929) \cdot 931{,}494\,\mathrm{MeV}$$
$$\Delta E_1 = 1{,}59\,\mathrm{MeV}$$

Reakci, při které dochází ke slučování vodíkových jader, si můžeme zjednodušeně (jak se dočtete v poznámce pod tímto příkladem) zapsat následovně:

$$^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \longrightarrow {}^2\mathrm{H}\,.$$

Energie uvolněná při této reakci pak bude:

$$\Delta E_2 = (2 \cdot 1{,}007\,825 - 2{,}014\,102) \cdot 931{,}494\,\mathrm{MeV} = 1{,}442\,\mathrm{MeV}\,.$$

Pozornější čtenář si možná všimne několika problémů, které s sebou tento postup nese. Například do rovnice pro výpočet uvolněné energie dosazujeme relativní atomové hmotnosti neutrálních atomů, přitom ve hvězdách spolu naprosto zjevně reagují atomová jádra. Počítejme tedy přesněji – klidovou energii jádra získáme odečtením energie elektronů:

$$E_{\text{jádra}} = E_{\text{neut. atomu}} - N_{\text{elektronů}} m_\mathrm{e} c^2\,,$$

(správně bychom ještě měli odečíst vazebnou energii mezi protony a elektrony, ale ta je oproti ostatním energiím velmi malá, proto ji zanedbáme). Z periodické tabulky vyčteme, že helium má 2 elektrony a berylium 4. Přesnější rovnice pro uvolněnou energii pak je:

$$\Delta E_1' = \left(m(^3\mathrm{He}) - 2m_\mathrm{e} + m(^4\mathrm{He}) - 2m_\mathrm{e} - (m(^7\mathrm{Be}) - 4m_\mathrm{e})\right) c^2\,,$$
$$\Delta E_1' = \left(m(^3\mathrm{He}) + m(^4\mathrm{He}) - (m(^7\mathrm{Be})\right) c^2 = \Delta E_1\,.$$

Vidíme, že naše rovnice jsou proti této nepřesnosti „imunní“ a žádné chyby jsme se tedy nedopustili. Podívejme se však na rovnici pro slučování vodíků. Tam už nás nezachrání odečtení energie elektronů jako v předchozích příkladech, přesto je číselný výsledek shodou okolností správně, pokud ho interpretujeme vhodným způsobem, jak uvidíme za chvíli.

Podívejme se opět na přesnější verzi naší reakce. Aby rovnice splňovala všechny zákony zachování (jejich podrobnější vysvětlení je bohužel nad rámec tohoto textu), musíme do ní přidat další elementární částice. První z nich je *pozitron*, což je tzv. *antičástice* elektronu. Její vlastnosti (jako např. hmotnost) jsou stejné jako vlastnosti elektronu, až na náboj, který je opačný. Druhou elementární částicí je *neutrino*, které pochází ze stejné rodiny částic (tzv. *leptonů*) jako elektron a pozitron. Náboj neutrina je nulový a jeho hmotnost je v porovnání s hmotnostmi ostatních elementárních částic prakticky nulová, proto neutrino uvádíme pouze pro úplnost, z výpočtů ho můžeme vynechat. Správná rovnice popisující slučování protonů tedy je:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \longrightarrow {}^2_1\mathrm{D} + \mathrm{e}^+ + \nu_e\,,$$

kde p je proton, ${}^2_1\mathrm{D}$ je jádro deuteria, e^+ je pozitron a ν_e je elektronové neutrino. Hmotnost protonu si najdeme na internetu: $m_\mathrm{p} = 938{,}272\,088\,\mathrm{MeV}/c^2$, hmotnost jádra deuteria vypočteme z hmotnosti deuteria odečtením hmotnosti jednoho elektronu, hmotnost pozitronu je stejná jako hmotnost elektronu, tedy $m_\mathrm{e} = 0{,}510\,999\,\mathrm{MeV/c^2}$ a hmotnost neutrina je prakticky nulová, proto ji vynecháváme. Pro uvolněnou energii pak dostaneme:

$$\Delta E_2' = \left(2 \cdot m_\mathrm{p} - m(^2\mathrm{H}) + m_\mathrm{e} - m_\mathrm{e}\right)^2 \,,$$
$$\Delta E_2' = 0{,}420\,\mathrm{MeV}\,.$$

Uvolněná energie se značně liší od předchozího výsledku, přichází nás tedy zachránit vhodná interpretace. Ta spočívá v tom, že pozitron je antičástice a je to jen otázka času, než se ve Slunci srazí s elektronem (kterých je tam opravdu hodně) a *zanihilují* podle následující rovnice:

$$\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \longrightarrow 2\,\gamma\,.$$

Jejich veškerá energie se tedy přemění na elektromagnetickou energii (symbol γ představuje vysokoenergetický foton), kterou již můžeme přičíst k energii uvolněné po sloučení dvou protonů. Výsledek pak je:

$$\Delta E_2'' = \Delta E_2' + 2m_\mathrm{e}c^2 = 1{,}442\,\mathrm{MeV}$$
$$\Delta E_2'' = \Delta E_2\,.$$

Číselně tedy uvolněná energie sedí s tím, co jsme vypočítali původně, jen ji uvolňuje reakce:

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{e}^- \longrightarrow {}^2_1\mathrm{D} + \nu_\mathrm{e}\,.$$

3. V této reakci je počet protonů a neutronů na obou stranách rovnice stejný, proto se můžeme vyhnout všem dříve zmiňovaným složitostem a spočítat uvolněnou energii klasickým postupem. Napřed si najdeme hmotnosti jednotlivých částic:

$$m(^{18}\mathrm{O}) = 17{,}999\,160\,\mathrm{u}\,, \qquad m(^{1}\mathrm{H}) = 1{,}007\,825\,\mathrm{u}\,,$$
$$m(^{18}\mathrm{F}) = 18{,}000\,938\,\mathrm{u}\,, \qquad m(^{1}\mathrm{n}) = 1{,}008\,665\,\mathrm{u}\,.$$

Rozdíl energie před a po reakci je:

$$\Delta E = \left(m(^{18}\mathrm{O}) + m(^{1}\mathrm{H}) - m(^{18}\mathrm{F}) - m(^{1}\mathrm{n})\right) c^2$$
$$\Delta E = -2{,}44\,\mathrm{MeV}\,.$$

Aby tedy reakce proběhla, musíme dodat energii 2,44 MeV.

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz

Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**86**
1.	*Eliška Knopfová*	Bratrská škola, Praha 7	–	5	6	–	–	7	–	**18**	**29**
2.	*Emma Burešová*	Jiráskovo G, Náchod	3	5	2	6	1	2	6	**25**	**25**
3.	*Dat Nguyen*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
4.	*Václav Prachař*	G, Omská, Praha	–	–	4	–	–	–	–	**4**	**4**
5.	*Anežka Prachařová*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	3	–	–	–	–	–	–	**3**	**3**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**86**
1.	*Petr Barták*	Slovanské G, Olomouc	5	5	6	6	–	7	5	**34**	**66**
2.	*Lucie Kohoutková*	Masarykovo G, Plzeň	3	5	6	–	–	7	3	**24**	**47**
3.	*Alžběta Sochorová*	G, Blovice	3	5	5	–	–	4	–	**17**	**27**
4.–5.	*Eva Kundratová*	ZŠ Komenského II Zlín	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**26**
4.–5.	*Zuzana Kýrová*	ZŠ nám. Svornosti, Brno	–	5	3	–	–	–	–	**8**	**26**
6.	*Julie Krčmařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	3	5	3	–	–	–	–	**11**	**24**
7.	*Lukáš Hobza*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**23**
8.	*Petr Urválek*	ZŠ Sokolovská, Mnichovo Hradiště	3	5	3	–	3	–	–	**14**	**14**
9.	*Juraj Štefina*	CZŠ sv. Gorazda, Prešov	–	5	3	–	–	4	–	**12**	**12**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**76**
1.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**72**
2.	*Lucie Endlová*	G O. Havlové, Ostrava	–	5	6	4	2	7	6	**30**	**67**
3.	*Jan Herzig*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	5	6	6	5	6	6	**34**	**59**
4.	*Kamilo Tomáš*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	6	6	7	6	**36**	**57**
5.	*Marie Steinhauserová*	ZŠ Strmilov	–	5	6	5	–	7	–	**23**	**40**
6.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	–	7	–	–	**18**	**39**
7.	*Vojtěch Černý*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	–	5	–	7	**23**	**34**
8.	*Božena Lednická*	G O. Havlové, Ostrava	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**30**
9.	*Pavel Křivý*	G a SOŠ, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**27**
10.	*Natálie Jochová*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**22**
11.	*Petra Šilerová*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
12.	*Michaela Urbanová*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	2	–	–	–	–	–	**2**	**16**
13.	*Lenka Hromádková*	G, Hlinsko	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**14**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**II**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**76**
1.–2.	*Lada Srpová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**76**
1.–2.	*Stela Srpová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**76**
3.	*Veronika Menšíková*	Arcibiskupské G, Praha	–	5	6	6	7	7	6	**37**	**72**
4.–5.	*Jiří Preč*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	5	6	6	5	7	6	**35**	**68**
4.–5.	*Damian Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**68**
6.	*Vojtěch Zielina*	G, Třinec	–	5	6	6	7	6	7	**37**	**67**
7.	*Ludmila Šírová*	Mensa G, Praha 6	–	5	6	4	5	6	3	**29**	**66**
8.	*Patrik Pöschl*	ZŠ Školní ul., Hrádek nad Nisou	–	4	6	6	5	7	6	**34**	**61**
9.	*Helena Muchová*	G Jana Keplera, Praha	–	2	6	6	4	7	7	**32**	**59**
10.	*Jana Jackaninová*	G O. Havlové, Ostrava	–	5	6	6	3	6	5	**31**	**58**
11.	*Filip Černý*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	5	6	7	6	6	**35**	**53**
12.	*Vojtěch Janáček*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	5	6	5	7	6	**34**	**51**
13.	*Mikuláš Vlčan*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	5	4	6	6	6	4	**31**	**48**
14.	*Michal Dobrovolný*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	6	–	4	5	–	**20**	**44**
15.	*Mark Joly*	G, Havlíčkův Brod	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**43**
16.	*Šimon Mach*	G, Havlíčkův Brod	–	5	5	6	2	1	–	**19**	**40**
17.–18.	*Sofie Prchalová*	G, Šumperk	–	5	2	5	4	2	2	**20**	**35**
17.–18.	*Marie Sára Stejskalová*	G Na Pražačce, Praha	–	5	6	6	5	7	6	**35**	**35**
19.	*Vít Novák*	ZŠ Chyšky	–	5	4	–	–	–	–	**9**	**33**
20.	*Vojtěch Novosad*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	4	4	–	–	–	**13**	**32**
21.	*Jindřich Anderle*	G, Budějovická, Praha	–	5	6	4	2	–	–	**17**	**30**
22.–23.	*Nikola Jarošová*	ZŠ a MŠ Dolní Loučky	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
22.–23.	*Jana Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**27**
24.	*Natálie Kamenická*	ZŠ E.Krásnohorské, Ústí nad Labe	–	5	4	–	3	–	–	**12**	**26**
25.	*Tereza Nejezchlebová*	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	**24**
26.–27.	*Tomáš Řehák*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**22**
26.–27.	*Ester Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	–	**22**
28.	*Alexander Spálený*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
29.	*Barbora Bouberlová*	ZŠ Bavorovská, Vodňany	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
30.	*Adam Mikulič*	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
31.	*Tomáš Zvolánek*	ZŠ V Sadech, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
32.	*Patricie Labuťová*	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	**11**
33.	*Amelie Vítková*	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
34.	*Žaneta Rozhonová*	ZŠ Strakonice, Dukelská	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
35.–36.	*Jiří Janda*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
35.–36.	*Marek Janda*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**
37.	*Melánie Boušková*	G Pod Svatou horou, Příbram	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
https://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.