Úloha III.5 ... Nedostavěný obchvat

7 bodů; (chybí statistiky)

Město Výfučkov leží na hlavní cestě mezi Prahou a Brnem, tedy většina aut, která jím projíždí, se snaží dostat ze severu na jih. Bohužel však městem protéká ve směru z východu na západ řeka.

Aby auta nejezdila městem, rozhodli se ve Výfučkově stavět obchvat. Jelikož se ale zastupitelé severní a jižní části nedohodli, začali ze severu stavbu obchvatu západním směrem a z jihu začali stavět z východní strany, přičemž oba obchvaty dostavěli až po most přes řeku (starý most v centru během stavebního šílenství strhla povodeň). Pro průjezd ze severu na jih tedy zbyly dvě možnosti, využívající vždy na jednom břehu obchvat a na druhém průjezd městem.

Každá část obchvatu je kapacitní a cesta po ní trvá 30 minut bez ohledu na to, kolik aut ji využívá. Druhou část cesty však řidiči musí jet městem, kde cesta trvá 4 minuty za každých 100 aut, které po dané silnici projíždějí jedním směrem.

1. *Městem každé ráno projíždí jedním směrem 1 000 aut, jejichž řidiči mají chytré navigace, tedy si každý z nich zvolí nejvýhodnější cestu včetně dopravního vytížení: buď obchvatem a pak městem z jedné strany, nebo městem a pak obchvatem z druhé strany (most přes řeku město-město pro auta neexistuje). Jak dlouho bude každému řidiči trvat průjezd městem? Nakreslete si diagram cest.*

2. *Nový primátor se rozhodl části usmířit, dopravní situaci vyřešit a vybudovat tunel, který nedostavěné části obchvatu propojí. Tato vymoženost dokonale spojuje cesty v půlce města: tedy když auto začne jet po obchvatu, může pokračovat běžně městem, nebo projet tunelem na druhou část obchvatu. Ale i když začne cestu městem, může se v půlce rozhodnout, jestli bude pokračovat po obchvatu jako běžně, nebo projede tunelem a zase pojede městem. Průjezd tunelem trvá 3 minuty bez ohledu na to, kolik aut jím projíždí. Jak dlouho bude nyní každému řidiči trvat nejvýhodnější trasa?*

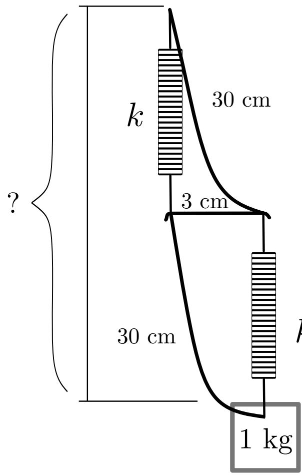
3. *Výfuček se rozhodl primátorovi ukázat, co svou iniciativou provedl, a to jak jinak než pomocí fyzikálního modelu. Vzal tedy dvě pružinky o tuhosti $k = 0{,}25\,\mathrm{N{\cdot}cm^{-1}}$ a počáteční délce téměř nulové, na každou navázal provázek dlouhý $30\,\mathrm{cm}$ a pružinky propojil provázkem dlouhým $3\,\mathrm{cm}$. Sestava tedy odpovídala městským cestám, kde provázky jsou tunel/obchvat a pružinky cesta městem. Na obě pružinky zároveň pak Výfuček pověsil závaží působící silou $10\,\mathrm{N}$.*

   Jaká bude vzdálenost závaží od bodu závěsu? Nejspíš budete muset použít vztah pro skládání tuhosti dvou sériově visících pružinek.

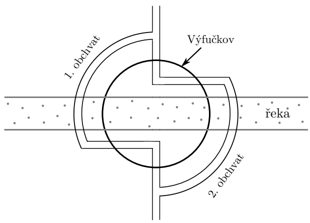
4. *Výfuček poté vzal nůžky a krátký provázek $3\,\mathrm{cm}$ přestřihl. Co se stalo se závažím? Jak tato situace odpovídá dopravní situaci popsané výše (tj. které „pružinkové“ veličiny odpovídají kterým dopravním)?*

Předpokládejte, že pružinky mají nulovou klidovou délku.

1. Auta jedoucí jedním směrem mají na výběr dvě možnosti. Jako první budeme uvažovat cestu nejdříve přes obchvat a poté přes město, jako druhou možnost nejdříve přes město a poté přes druhý obchvat. V případě, kdy je v obou možnostech počet aut na trase stejný, je stejný i čas potřebný k překonání cesty v obou možnostech – ty jsou totiž symetrické (což je mimo jiné viditelné i na diagramu).



Obr. 1: Výfučkův model s pružinkami



Intuitivně platí, že se auta rozdělí na dvě poloviny, tedy na každé z možností bude 500 aut. Pojďme to trochu lépe vysvětlit: představme si, že jednou trasou jede více aut než druhou. To je však v rozporu se zadáním, v takovém případě by některý z řidičů na delší trase přejel na kratší, čímž by si ušetřil čas. Proto se nutně dostaneme do situace, kdy si řidiči nemohou zkrátit čas, tedy obě cesty trvají stejně, takže všude je stejně aut. Cesta potom každému řidiči trvá:

$$t = t_\mathrm{O} + t_\mathrm{M} = 30\,\mathrm{min} + 4\,\mathrm{min} \cdot \frac{500}{100} = 50\,\mathrm{min}\,,$$

a to v obou možnostech. Jako t_O myslíme čas strávený v obchvatu, jako t_M ve městě.

2. Ve výsledku zde máme čtyři různé možnosti. První možností bude opět cesta obchvat–město, druhou opět město–obchvat, třetí nově obchvat–tunel–obchvat a čtvrtou město–tunel–město. Situace zde bude o něco složitější, protože všechny cesty již nejsou symetrické (v takovém případě bychom mohli rozdělit auta na čtvrtiny a každá cesta by trvala stejně). Pro první možnost bude doba průjezdu:

$$t_1 = t_\mathrm{O} + t_\mathrm{M2}\,,$$

kde za t_{M2} bereme čas strávený v druhé polovině města. Pro druhý případ analogicky:

$$t_2 = t_{\mathrm{M1}} + t_{\mathrm{O}}\,.$$

Dále pro třetí případ:

$$t_3 = 2t_{\mathrm{O}} + t_{\mathrm{T}} = 2 \cdot 30\,\mathrm{min} + 3\,\mathrm{min} = 63\,\mathrm{min}\,,$$

přičemž t_T je doba strávená v tunelu. Pro čtvrtý případ platí:

$$t_4 = t_{\mathrm{M1}} + t_{\mathrm{M2}} + t_{\mathrm{T}}\,.$$

Jediná z možností, která je zcela nezávislá na počtu aut, je třetí možnost. Průjezd tudy by však trval přehnaně dlouho, proto zkusíme tuto možnost vyloučit – pokud by vyšel výsledný čas průjezdu víc, než čas pro třetí možnost, pak by byl náš předpoklad špatný. Auta se tedy rozdělí tak, aby byl ve všech (třech) možnostech čas průjezdu stejný,[1] tedy platí:

$$t_1 = t_2 = t_4\,.$$

Z rovnosti prvních dvou možností dostáváme:

$$t_{\mathrm{M1}} = t_{\mathrm{M2}} \equiv t_{\mathrm{M}}\,,$$

(oba časy jsme si označili jako t_M) což můžeme dosadit do rovnosti $t_2 = t_4$:

$$\begin{aligned} t_{\mathrm{O}} + t_{\mathrm{M}} &= 2t_{\mathrm{M}} + t_{\mathrm{T}}\,, \\ t_{\mathrm{M}} &= t_{\mathrm{O}} - t_{\mathrm{T}} = 27\,\mathrm{min}\,. \end{aligned}$$

Z toho lze vypočíst celkový čas průjezdu, který si označíme T:

$$t_1 = t_2 = t_4 \equiv T = t_{\mathrm{O}} + t_{\mathrm{M}} = 2t_{\mathrm{O}} - t_{\mathrm{T}} = 2 \cdot 30\,\mathrm{min} - 3\,\mathrm{min} = 57\,\mathrm{min}\,.$$

Celkový čas průjezdu tedy bude vždy 57 min, což je méně než 63 min v nevyužité možnosti. Aby však tento čas mohl platit, musíme si ještě ověřit, zda se shodují počty projíždějících aut. Pro $t_{\mathrm{M}} = 27\,\mathrm{min}$ platí:

$$t_{\mathrm{M}} = \frac{n}{100} \cdot 4\,\mathrm{min} \quad \Rightarrow \quad n = 100 \cdot \frac{t_M}{4\,\mathrm{min}} = 675\,\mathrm{aut}\,,$$

což je počet aut projíždějících jak první, tak druhou částí města. Plyne z toho, že obchvatu využije v první, resp. v druhé možnosti 325 aut, což dává smysl, protože obě možnosti jsou symetrické.

[1] Pro stejný čas průjezdu všemi trasami lze argumentovat podobně jako v první otázce.

3. Nyní řešíme úlohu s pružinkami, která je analogická právě vyřešené úloze. Na každou z pružinek působí stejná síla o velikosti:

$$F = kl\,,$$

kde l je natažená délka obou pružinek. To si vyjádříme:

$$l = \frac{F}{k} = 40\,\mathrm{cm}\,.$$

Tato hodnota je ale vyšší než délka lanka, což znamená, že se pružinky plně nenapnou a závaží bude drženo z velké části pouze provázky (kromě té tíhy, která pružinky natáhne tak, aby se svojí délkou vyrovnaly provázkům). Mezi lanky je však ještě krátký provázek, který bude natažen horní pružinkou, a tím pádem zvedne druhý provázek o svou délku. Výsledná vzdálenost závaží od bodu závěsu tedy bude:

$$L = 2 \cdot 30\,\mathrm{cm} - 3\,\mathrm{cm} = 57\,\mathrm{cm}\,.$$

4. Přestřihne-li Výfuček kratší provázek, pak nastane situace, kdy je závaží zavěšeno na dvou systémech – pružinka–lanko a lanko–pružinka. Oba dva systémy jsou symetrické, tím pádem se tíha závaží rozdělí rovnoměrně. Na každou pružinku tedy působí polovina síly a prodlouží se o:

$$l = \frac{F}{2k} = 20\,\mathrm{cm}\,.$$

K celkové vzdálenosti od bodu závěsu pak ještě musíme přičíst délku lanka:

$$L = l + 30\,\mathrm{cm} = 50\,\mathrm{cm}\,.$$

Vzdálenost závaží od bodu závěsu můžeme srovnávat s celkovou dobou průjezdu. Delší lanka představují obchvaty ($30\,\mathrm{cm} = 30\,\mathrm{min}$), kratší tunel ($3\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{min}$). Pružinky jsou pak se zvyšující se zátěží čím dál delší, a tedy doba potřebná k průjezdu jimi představovaným úsekem se prodlužuje, což odpovídá městským úsekům. Jelikož délku pružinky bereme jako čas potřebný k překonání úseku ($1\,\mathrm{cm} \Leftrightarrow 1\,\mathrm{min}$), pak můžeme působící sílu brát jako počet aut ($1\,\mathrm{N} \Leftrightarrow 100\,\mathrm{aut}$), a tím pádem převrácenou tuhost pružinky k jako zvýšení doby průjezdu na počet projíždějících aut ($1\,\mathrm{cm{\cdot}N^{-1}} \Leftrightarrow 100\,\mathrm{min{\cdot}aut^{-1}}$). Výsledky jsou pak analogické – třetí podúloha odpovídá druhé a čtvrtá odpovídá první.

Zákony ještě formulujeme matematicky, což lépe zdůrazní jejich podobnost. Pro pružinku máme:

$$l = F \cdot \frac{1}{k}\,.$$

Pro dobu průjezdu t, počet aut N a průjezdnost p (průjezdnost definovanou jako doba průjezdu vztažená na počet projíždějících aut) máme tento vztah:

$$t = N \cdot p\,.$$

Tuto úlohu bychom mohli označit za příklad Braessova paradoxu – po odstranění tunelu došlo k záhadnému zlepšení provozu (přestože každý z řidičů si volil pro něj nejvýhodnější trasu). Braessův paradox vychází z tzv. Nashovy rovnováhy, tedy stavu, kdy už žádný z účastníků nemůže svou situaci jednostranně zlepšit (tj. naši řidiči). Přitom z hlediska celkového výkonu provozu úseku není Nashova rovnováha nejlepším řešením. Při nepromyšleném přidávání dalších dopravních spojů se tedy dopravní situace může paradoxně zhoršit.

Naopak pokud by se řidiči nerozhodovali podle Nashovy rovnováhy, mohla by se tak situace pro část řidičů mírně zhoršit, zatímco pro druhou část výrazně zlepšit, a došlo by tak ke zlepšení celkového výkonu dopravy úseku. Ve Výfučkově modelu byl tento paradox vyjádřen pomocí změny zapojení pružinek – v prvním případě sériově, ve druhém paralelně. Při paralelním zapojení se tíha rozloží, a tím pádem se pružinky tolik neprodlouží.

Pokud by řidiči byli dokonale koordinovaní (například pomocí samořídících aut), mohli by se v určitých případech shodnout a naleznout řešení optimální pro všechny: to by odpovídalo tomu, kdyby po postavení tunelu ve městě ho řidiči ignorovali. Museli by se na tom nicméně všichni shodnout, což je velmi nepraktické.

Dalšími dopravními paradoxy jsou například Pigou-Knight-Downsův paradox a Downs-Thomsonův paradox. Pigou-Knight-Downsův paradox tvrdí, že rozšiřování kapacity silnice nemusí nutně znamenat vyšší efektivitu dopravy, jelikož se doprava může přesunout na vedlejší silnici. Navíc více silnic motivuje lidi k nákupu aut, což provoz ještě zhorší. Downs-Thomsonův paradox je velmi podobný – při rozšíření kapacity soukromého úseku se mírně sníží zátěž veřejného úseku a naopak silně zvýší zátěž soukromého úseku, což má ve výsledku pokles efektivity dopravy. Tyto paradoxy však narozdíl od Braessova nepočítají s Nashovou rovnováhou.

Tomáš Patsch
`patscht@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.