Úloha III.3 ... Sypká věž

6 bodů; (chybí statistiky)

Organizátoři Výfuku si uspořádali párty. Podmínkou ke vstupu na párty bylo přinést alespoň litr sypké substance.

Kačka přinesla litr popela, který má sypný úhel 20°*. Viktor přinesl litr mletého kakaa, které má sypný úhel* 30°*. Marco přinesl litr práškové křídy, která má sypný úhel* 45°*.*

První vysypali hromádku popela, ta měla tvar komolého kužele, tedy kužele s useknutou špičkou. Splácli ji takovým způsobem, aby na ni mohli vršit kakao. Styčné plochy mezi jednotlivými sypkými látkami jsou vždy jen vodorovné. Prostřední hromádka kakaa má také tvar komolého kužele a na ní je umístěn kužel z práškové křídy.

Jak (nejvíce) vysoká může být tato hromádka?

Nejdříve se pokusíme naši hromádku co nejpřesněji popsat. Skládá se ze tří různých (z toho dvou komolých) kuželů, které leží na sobě. Každý má svou výšku, označíme si je shora jako v_1, v_2 a v_3. Mezi horními dvěma kužely je pak sdílena plocha S_1, mezi dolními dvěma S_2 a celá věž stojí na podstavě S_3. To, že jsou plochy sdílené a stejně velké, si můžeme ukázat jednoduchou úvahou – vrchní plocha nemůže být větší než ta spodní – substance jsou sypké a její část ležící na rozdílu ploch vrchní a spodní části věže by se tedy sesypala.

Důvod, proč nemůže být spodní plocha na našem spoji kuželů větší než ta vrchní, není zřejmý z fyzikálních principů, ale ze zadání: snažíme se vytvořit co největší (komolé) kužely, přičemž při daném objemu je obsah podstavy lineárně nepřímo úměrný výšce kužele (pro výpočet objemu kužele můžeme využít vzorec $V = (S_{\text{podstavy}} \cdot v)/3$, kde v je výška našeho kužele). U komolého kužele pak také platí, že se stoupajícím obsahem podstavy klesá výška, ale u něj je již podstatný obsah obou dvou jeho podstav. Protože chceme co největší výšku, je v našem zájmu mít obsah podstav co nejmenší – a při největším omezení obsahu podstav získáme to, že podstavy tedy musí být stejně velké (jak je již výše uvedeno, dolní podstavu už nemůžeme zmenšit – naše sypká věž by se začala sypat.)

Nyní se již zaměříme na řešení samotné úlohy. Pouze ze zadaného objemu nejsme schopni říci, jak bude kužel vypadat. Jsme to ale schopni jednoznačně určit, jakmile známe úhel mezi podstavou a stěnami a víme, že se snažíme dosáhnout co největší výšky. Pro další výpočty ale budeme používat goniometrické funkce – pokud tedy nevíte, co goniometrické funkce jsou, nebo si nejste jistí, jak je používat, můžete si o nich přečíst ve Výfučtení 3. série 1. ročníku Výfuku.[1] Pro určení vzhledu našich (komolých) kuželů tedy využijeme veličinu *sypný úhel*, která nám udává, jaký může být maximální úhel mezi podstavou a pláštěm kužele, než se začne naše sypká substance sesypávat po povrchu kužele. Prášek se při překročení úhlu sype, dokud je úhel větší než ten sypný – zbude nám kužel se sypným úhlem mezi podstavou a pláštěm.

Jaký ale bude mít úhel, chceme-li, aby byl kužel na svůj objem co nejvyšší? U tohoto problému stačí, když si uvědomíme, že jakmile je úhel mezi podstavou a pláštěm (označme si ho α) 0°, pak nemáme kužel, ale placku. Naopak s úhlem α blížícím se 90° se nám kužel stává čím dál tím špičatějším – platí tedy, že čím větší máme úhel α, tím více nám u našeho kužele roste výška (jak se ale dozvíme i ze vzorce uvedeného níže, při neměnícím se objemu se u kuželu bude nepřímo úměrně měnit i obsah podstavy). Pokud se tedy snažíme mít co největší výšku v našem kuželu, chceme, aby úhel α byl co největší, a to jak u kuželů, tak u komolých kuželů. Pokud tedy naše (komolé) kužely mohou mít úhel α rovný nebo menší než jejich sypný úhel, budeme vždy chtít, aby se α rovnala sypnému úhlu.

[1] `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r1/vyfucteni/vyfucteni_3.pdf`

Víme tedy, že úhly jednotlivých kuželů budou $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_2 = 30°$, $\alpha_3 = 20°$. Jak ale využijeme goniometrické funkce? To nám bude zřejmé, jakmile si uděláme řez (komolým) kuželem podle výšky.

Řez kuželem

Po provedení řezu u kužele získáme rovnoramenný trojúhelník, který, když si ho následně rozpůlíme podél výšky, vytvoří pravoúhlé trojúhelníky o úhlech $90°$, α a $90° - \alpha$. Strany tohoto pravoúhlého trojúhelníku pak budou:

Odvěsna 1 výška v_1 pro kužel 1 atd.,

Odvěsna 2 poloměr podstavy původního kužele (na kulaté podstavě S_1 si jej označíme r_1 apod.),

Přepona délka s – ta nám značí vzdálenost mezi vrcholem a libovolným bodem na okraji podstavy původního kužele.

Využijeme toho, že známe úhly α, a vzpomeneme si na definici funkce tangens: tg(úhel) = = protilehlá/přilehlá. Proto můžeme psát $\mathrm{tg}(\alpha) = v/r$, resp. $v = r \cdot \mathrm{tg}(\alpha)$, což nám později pomůže.

Řez komolým kuželem

Řezem skrz komolý kužel (znovu vedený skrz výšku) získáme rovnoramenný lichoběžník. U něj máme dva jeho úhly o velikosti α – oba u spodní základny, u vrchní základny nalézáme dva úhly o velikosti $180° - \alpha$ (součet úhlů v čtyřúhelníku je $360°$). Strany tohoto lichoběžníku pak mají tyto velikosti:

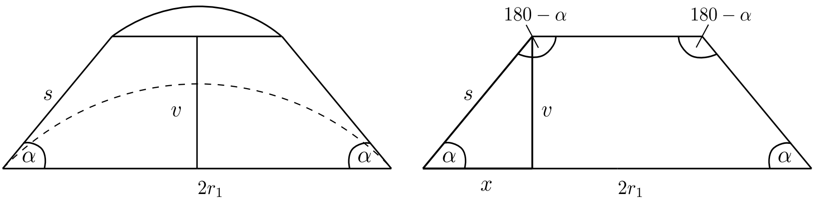
Základny: dvakrát poloměr podstavy komolého kužele, na které základna leží, tj. $2r_1$ apod.,

Ramena: obě jsou stejně dlouhá a můžeme si je znovu označit jako s, pro náš výpočet ale tuto hodnotu potřebovat nebudeme.

Nyní využijeme goniometrické funkce znovu – lichoběžník je na všech místech stejně vysoký, výšku (ta je kolmá na obě základny) si tedy můžeme mezi základnami spustit v libovolném místě.

Pokud si ji spustíme přesně v některém z vrchních vrcholů lichoběžníku, tak nám krom pravoúhlého lichoběžníku vznikne i pravoúhlý trojúhelník. Ten má strany s, v a ještě jednu, kterou si označíme x. Proměnná x má poté hodnotu rozdílu poloměrů podstav, na kterých lichoběžník leží (pro q-tý komolý kužel získáme $x_q = r_{q+1} - r_q$). Díky tomuto také dokážeme říci, že pokud vezmeme horní poloměr a přičteme k němu odpovídající x, získáme poloměr dolní. Tuto rovnici si pak zavádíme proto, že spolu s ní znovu využijeme goniometrické funkce. Stále platí, že tg(úhel) = protilehlá/přilehlá, tím pádem i $\mathrm{tg}(\alpha) = v/x$, resp. $v = x \cdot \mathrm{tg}(\alpha)$, resp. $v = (r_{q+1} - r_q) \cdot \mathrm{tg}(\alpha)$. Vzorce se nám budou hodit právě v tomto tvaru – klíčová je pro nás výška. Pro samotné dosazení do příkladu ještě potřebujeme znát vzoreček na výpočet objemu komolého kuželu: $V = (\pi \cdot v/3) \cdot (r_q^2 + r_q \cdot r_{q+1} + r_{q+1}^2)$, kde V je objem, v výška a r_q a r_{q+1} je menší, resp. větší poloměr podstavy. Protože jsme si ale řekli, že si zadefinujeme $r_{q+1} = r_q + x_q$, můžeme si to vyjádřit do našeho vzorečku na výpočet objemu – bude to pro nás praktičtější:

$$V = \left(\pi \cdot \frac{v}{3}\right) \cdot \left(r_q^2 + r_q \cdot (r_q + x_q) + (r_q + x_q)^2\right) = \left(\pi \cdot \frac{v}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_q^2 + 3 \cdot r_q \cdot x_q + x_q^2\right) .$$



Obr. 1: Řez komolým kuželem a náčrt lichoběžníka

Poslední důležitá poznámka je, že si musíme dávat pozor na dosazování ve správných jednotkách, zde jsme si vybrali ty základní – metry (s tím souvisí to, že musíme převést litry na metry krychlové). Alternativní volbou by mohly být decimetry, neboť pak bychom litry převádět nemuseli.

Můžeme tedy dosazovat. Musíme začít u vrchního kužele, protože pro výpočet komolých kuželů zatím nemáme dostatek zadaných údajů.

$$V = \frac{S_{\text{podstavy}} v}{3}\,,$$

kde S_{podstavy} je obsah kruhové podstavy, který spočteme jako $S_{\text{podstavy}} = \pi \cdot r^2$. Dosazením za obsah dostaneme

$$V = \frac{\pi r^2 v}{3}\,.$$

A pro kužel z goniometrických funkcí jsme si řekli, že platí:

$$v = r \cdot \operatorname{tg}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi r^2 r \operatorname{tg}(\alpha)}{3} = \frac{\pi r^3 \operatorname{tg}(\alpha)}{3}\,.$$

Pro r_1 tedy:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_1}{\pi \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1)}}\,.$$

A s hodnotami:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0{,}001}{\pi \cdot 1}} \doteq 9{,}8\,\mathrm{cm}\,.$$

Z toho můžeme spočítat i výšku horního kužele:

$$v_1 = r_1 \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1)\,,$$
$$v_1 \doteq 9{,}8\,\mathrm{cm}\,.$$

Díky těmto výpočtům již známe r_1 – poloměr ležící na S_1, a jsme tedy schopni dopočítat i výšku prostředního (komolého) kužele. Platí, že:

$$V = \left(\pi \cdot \frac{v}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_q^2 + 3 \cdot r_q \cdot x_q + x_q^2\right)\,,$$
$$v = x \cdot \operatorname{tg}(\alpha)\,.$$

Vyjádříme tedy první vzoreček za pomoci toho druhého:

$$V = \left(\pi \cdot \frac{v}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_q^2 + 3 \cdot r_q \cdot x_q + x_q^2\right) = \pi \cdot x \cdot \frac{\mathrm{tg}(\alpha_2)}{3} \cdot \left(3 \cdot r_q^2 + 3 \cdot r_q \cdot x_q + x_q^2\right) .$$

Ještě naši rovnici vydělíme π a $\mathrm{tg}(\alpha_2)/3$:

$$V_2 = \left(\pi \cdot x_1 \cdot \frac{\mathrm{tg}(\alpha_2)}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_1^2 + 3 \cdot r_1 \cdot x_1 + x_1^2\right) ,$$

$$3 \cdot \frac{V_2}{\pi \cdot \mathrm{tg}(\alpha_2)} = x_1 \cdot \left(3 \cdot r_1^2 + 3 \cdot r_1 \cdot x_1 + x_1^2\right) .$$

Získáme tím kubickou rovnici:

$$x_1^3 + 3 \cdot r_1 \cdot x_1^2 + 3 \cdot r_1^2 \cdot x_1 - 3 \cdot \frac{V_2}{\pi \cdot \mathrm{tg}(\alpha_2)} = 0 .$$

Po dosazení hodnot:

$$x_1^3 + 0{,}295\,42 \cdot x_1^2 + 0{,}029\,09 \cdot x_1 - 0,001\ 65 = 0 .$$

Kubickou rovnici bohužel nejsme schopni vyřešit jednoduše (vzorce pro ni sice existují, ale jsou velmi složité). K řešení však můžeme využít nějaký matematický program, např. WolframAlpha. Po zadání do kalkulátoru získáme hodnotu (kubické rovnice mohou mít až tři kořeny, v těchto případech je ale reálný vždy pouze jeden z nich):

$$x_1 \doteq 3{,}9\,\mathrm{cm} .$$

Z toho můžeme spočítat i chtěnou výšku komolého kužele v_2:

$$v_2 = x_1 \cdot \mathrm{tg}(\alpha_2) \doteq 2{,}3\,\mathrm{cm} .$$

Díky tomuto výpočtu jsme znovu, v tomto případě nepřímo, získali další r, tentokrát r_2 ležící na S_2:

$$r_2 = r_1 + x_1 = 0{,}137\,66\,\mathrm{m} = 13{,}766\,\mathrm{cm} .$$

Můžeme tak vypočítat i výšku posledního kuželu. Znovu platí, že:

$$V = \left(\pi \cdot \frac{v}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_q^2 + 3 \cdot r_q \cdot x_q + x_q^2\right) ,$$

$$v = x \cdot \mathrm{tg}(\alpha) ,$$

Můžeme dosadit a vzorec upravit:

$$V_3 = \left(\pi \cdot x_2 \cdot \frac{\mathrm{tg}(\alpha_3)}{3}\right) \cdot \left(3 \cdot r_2^2 + 3 \cdot r_2 \cdot x_2 + x_2^2\right) ,$$

$$3 \cdot \frac{V_3}{\pi \cdot \mathrm{tg}(\alpha_3)} = x_2 \cdot \left(3 \cdot r_2^2 + 3 \cdot r_2 \cdot x_2 + x_2^2\right) .$$

Znovu získáme kubickou rovnici

$$x_2^3 + 3 \cdot r_2 \cdot x_2^2 + 3 \cdot r_2^2 \cdot x_2 - 3 \cdot \frac{V_3}{\pi \cdot \mathrm{tg}(\alpha_3)} = 0$$

a znovu můžeme dosadit:

$$x_2^3 + 0{,}412\,98 \cdot x_2^2 + 0{,}056\,85 \cdot x_2 - 0{,}002\,62 = 0\,.$$

Pokud znovu použijeme počítač k vyřešení této rovnice, získáme

$$x_2 = 0{,}035\,95\,\mathrm{m} = 3{,}595\,\mathrm{cm}\,.$$

Z čehož jsme znovu schopni zjistit výšku (i poloměr dolní podstavy):

$$v = x \cdot \mathrm{tg}(\alpha) \doteq 1{,}3\,\mathrm{cm}\,,$$
$$r_3 = r_2 + x_2 \doteq 17{,}4\,\mathrm{cm}\,.$$

Výšku celé věže pak získáme velmi jednoduše – stačí sečíst výšky všech tří (komolých) kuželů na sobě – protože jsou plochy mezi kužely vodorovné, můžeme si všechny výšky dát doprostřed všech kuželů, a ty nám svým spojením vytvoří velkou výšku celého útvaru, platí tedy, že:

$$v_{\text{celková}} = v_1 + v_2 + v_3 \doteq 9{,}8\,\mathrm{cm} + 2{,}3\,\mathrm{cm} + 1{,}3\,\mathrm{cm} \doteq 13\,\mathrm{cm}\,.$$

Celkově tedy můžeme získat věž o výšce maximálně 13 cm.

Václav Verner
vasek@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.