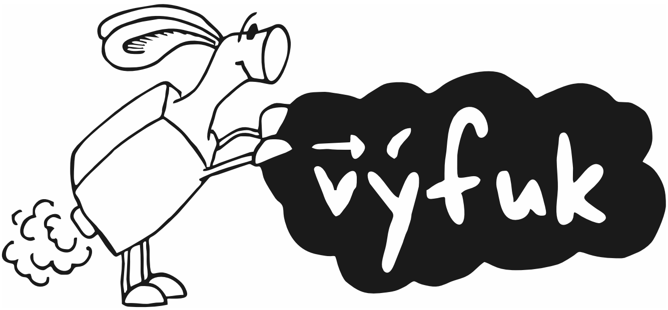


výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

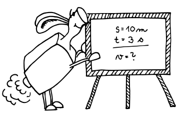
v ruce držíte již třetí brožurku letošního ročníku Výfuku. Najdete v ní zadání třetí série, kde se budete zabývat úbytkem mozkových buněk či chodem hodin. V experimentu si pak vyzkoušíte konstrukci cinknuté kostky a ve Výfučtení se dozvíte něco málo o spektrech.

Nedávno také proběhlo podzimní setkání, jehož se zúčastnilo 16 řešitelů, na které čekaly vnitřní hry i aktivity po Praze, přednášky od organizátorů i vědců a exkurze do hvězdárny s pozorováním Jupitera a Saturnu.

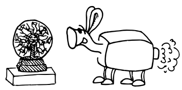
Pokud vás setkání zaujalo a chtěli byste se zúčastnit další akce, v nejbližší době budeme spouštět přihlašování na letní tábor, který se uskuteční 24. července až 6. srpna v Dobré Vodě nedaleko Třebíče.

Pěkné Vánoce a do nového roku hodně štěstí a úspěchů!

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



Zadání III. série



Termín odeslání: 10. 1. 2022 20.00

Úloha III.1 ... Jít, či nejít? ❻ ❼ 5 bodů

Výfuček si jednoho krásného odpoledne vyrazil na procházku. Počasí se však bohužel může měnit i velmi nečekaně, a tak během Výfučkovy zpáteční cesty začalo pršet. Aby co nejméně zmokl, rozhodl se Výfuček běžet. Pomohl mu ale běh opravdu v tom, aby byl na konci své cesty méně mokrý? Svou odpověď zdůvodněte. Uvažujte i jiné faktory než jen to, že bude doma dříve.

Uvažujte, že prší celou dobu stejně silně. To znamená, že na danou jednotku plochy dopadá v celém průběhu deště neměnné množství vody.

Úloha III.2 ... Mozková smrt ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

V kuchyni na Výfučím táboře se kuchařky rozhodly, že si uspořádají filmovou noc velmi špatných filmů. Tak špatných, že při jejichž sledování umírají mozkové buňky. Na začátku měla každá ze 4 přítomných organizátorek 100 000 000 000 mozkových buněk. Nejprve se promítal film dlouhý 35 minut s poločasem rozpadu mozkových buněk 5 minut a 50 sekund. Následoval film dlouhý 27 minut s poločasem rozpadu 2 minuty a 42 sekund, film dlouhý 55 minut s poločasem rozpadu 9 minut a 10 sekund, film dlouhý 39 minut s poločasem rozpadu 3 minuty a 15 sekund a na závěr si v kuchyni pustily film dlouhý 62 minut s poločasem rozpadu 15 minut a 30 sekund.

Zůstane na konci filmové noci v kuchyni dohromady alespoň jedna mozková buňka, kterou by kuchařky mohly sdílet?

Úloha III.3 ... Sypká věž ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Organizátoři Výfuku si uspořádali párty. Podmínkou ke vstupu na párty bylo přinést alespoň litr sypké substance.

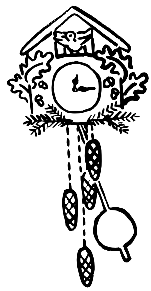
Kačka přinesla litr popela, který má sypný úhel 20°. Viktor přinesl litr mletého kakaa, které má sypný úhel 30°. Marco přinesl litr práškové křídy, která má sypný úhel 45°.

První vysypali hromádku popela, ta měla tvar komolého kužele, tedy kužele s useknutou špičkou. Splácli ji takovým způsobem, aby na ni mohli vršit kakao. Styčné plochy mezi jednotlivými sypkými látkami jsou vždy jen vodorovné. Prostřední hromádka kakaa má také tvar komolého kužele a na ní je umístěn kužel z práškové křídy.

Jak (nejvíce) vysoká může být tato hromádka?

Úloha III.4 ... Hodiny se šiškami a kukačkou ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Viktor má na chatě hodiny se čtyřmi šiškami, z nichž každá váží $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Jak dlouho po natažení budou hodiny fungovat, pokud mohou obě šišky klesnout až o $l = 1\,\mathrm{m}$ a pro pohon hodin je použitelných 20 % potenciální energie šišek? Hodiny mají hodinovou ručičku dlouhou 6 cm a vážící 15 g, minutovou ručičku dlouhou 7 cm a vážící 10 g a konečně sekundovou ručičku, která měří 8 cm a váží 5 g.



Ručičky hodin považujte za homogenní zanedbatelně tenké tyče a předpokládejte, že hodinový strojek na ně působí pouze během jejich pohybu od šestky ke dvanáctce. Také pro jednoduchost můžete učinit odhad, že během 12 hodin spotřebovávají ručičky energii lineárně. Hodiny Viktor natáhne přesně v poledne.

Úloha III.5 ... Nedostavěný obchvat ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Město Výfučkov leží na hlavní cestě mezi Prahou a Brnem, tedy většina aut, která jím projíždí, se snaží dostat ze severu na jih. Bohužel však městem protéká ve směru z východu na západ řeka.

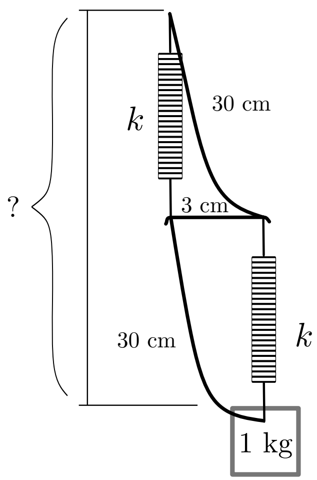
Aby auta nejezdila městem, rozhodli se ve Výfučkově stavět obchvat. Jelikož se ale zastupitelé severní a jižní části nedohodli, začali ze severu stavbu obchvatu západním směrem a z jihu začali stavět z východní strany, přičemž oba obchvaty dostavěli až po most přes řeku (starý most v centru během stavebního šílenství strhla povodeň). Pro průjezd ze severu na jih tedy zbyly dvě možnosti, využívající vždy na jednom břehu obchvat a na druhém průjezd městem.

Každá část obchvatu je kapacitní a cesta po ní trvá 30 minut bez ohledu na to, kolik aut ji využívá. Druhou část cesty však řidiči musí jet městem, kde cesta trvá 4 minuty za každých 100 aut, které po dané silnici projíždějí jedním směrem.

1. Městem každé ráno projíždí jedním směrem 1 000 aut, jejichž řidiči mají chytré navigace, tedy si každý z nich zvolí nejvýhodnější cestu včetně dopravního vytížení: buď obchvatem a pak městem z jedné strany, nebo městem a pak obchvatem z druhé strany (most přes řeku město-město pro auta neexistuje). Jak dlouho bude každému řidiči trvat průjezd městem? Nakreslete si diagram cest.

2. Nový primátor se rozhodl části usmířit, dopravní situaci vyřešit a vybudovat tunel, který nedostavěné části obchvatu propojí. Tato vymoženost dokonale spojuje cesty v půlce města: tedy když auto začne jet po obchvatu, může pokračovat běžně městem, nebo projet tunelem na druhou část obchvatu. Ale i když začne cestu městem, může se v půlce rozhodnout, jestli bude pokračovat po obchvatu jako běžně, nebo projede tunelem a zase pojede městem. Průjezd tunelem trvá 3 minuty bez ohledu na to, kolik aut jím projíždí. Jak dlouho bude nyní každému řidiči trvat nejvýhodnější trasa?

3. Výfuček se rozhodl primátorovi ukázat, co svou iniciativou provedl, a to jak jinak než pomocí fyzikálního modelu. Vzal tedy dvě pružinky o tuhosti $k = 0{,}25\,\mathrm{N{\cdot}cm^{-1}}$ a počáteční délce téměř nulové, na každou navázal provázek dlouhý 30 cm a pružinky propojil provázkem dlouhým 3 cm. Sestava tedy odpovídala městským cestám, kde provázky jsou tunel/obchvat a pružinky cesta městem. Na obě pružinky zároveň pak Výfuček pověsil závaží působící silou 10 N.



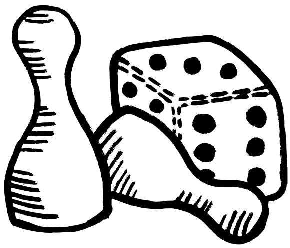
Obr. 1: Výfučkův model s pružinkami

Jaká bude vzdálenost závaží od bodu závěsu? Nejspíš budete muset použít vztah pro skládání tuhosti dvou sériově visících pružinek.

4. Výfuček poté vzal nůžky a krátký provázek 3 cm přestřihl. Co se stalo se závažím? Jak tato situace odpovídá dopravní situaci popsané výše (tj. které „pružinkové“ veličiny odpovídají kterým dopravním)?

Předpokládejte, že pružinky mají nulovou klidovou délku.

Úloha III.E ... Cinknutá kostka ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů



Baví vás hrát Člověče, nezlob se? Většina lidí odpoví ano, jen když zrovna vyhrává. K výhře však potřebujeme pořádnou dávku štěstí. A nebo si to štěstí můžeme nějak pojistit...

Vyrobte si tzv. cinknutou kostku, na které padají šestky častěji než ostatní čísla. Kostka by ale neměla být moc nápadná, těžko by si s vámi někdo zahrál, kdyby neházela nic jiného než šestky. Pokuste se proto, aby relativní četnost hození šestky (podíl počtu hodů, kdy padla šestka, a počtu všech hodů) byla co nejblíže **jedné třetině**. Jednička by měla naopak padat co nejméně.

Můžete jak upravit obyčejnou kostku, tak od základu vytvořit novou (např. z papíru). Pečlivě popište svůj postup výroby i výslednou stavbu kostky a změřte relativní četnost hození jednotlivých čísel. Je pro hodnoty mimo šestku a jedničku vaše kostka spravedlivá?

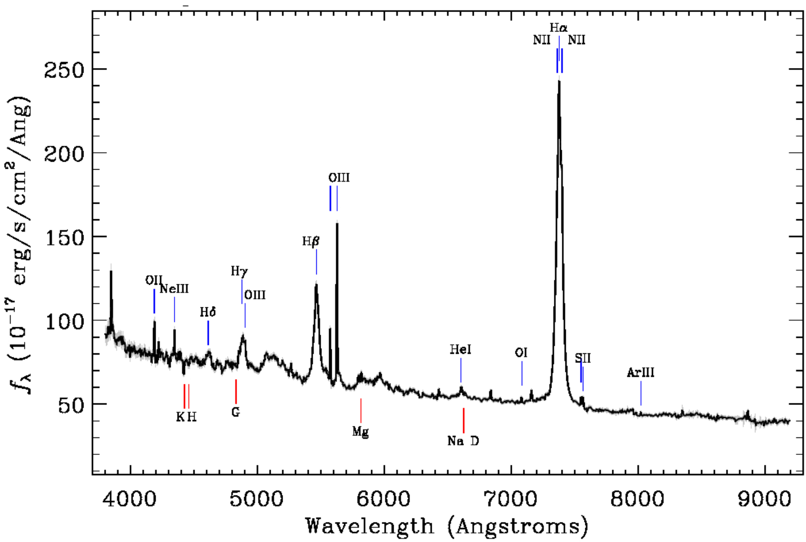
Úloha III.V ... Záření hvězd ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

1. Chemici nalezli ve spektru čáru H-epsilon – přechodem elektronu mezi kterými hladinami vznikla tato čára? Vypočtěte pomocí Balmerova vzorce, na jaké vlnové délce tuto čáru v laboratorních podmínkách najdeme. Dále spočtěte, jakou energii má foton vyzářený tímto přechodem.
2. Astronomové pozorovali vzdálenou galaxii a získali spektrum, které vidíte na obrázku. Na jaké vlnové délce najdeme čáru H-alpha? Pomozte astronomům spočítat radiální rychlost dané galaxie, když víte, že laboratorní vlnová délka čáry H-alpha je $\lambda_0 = 656\,\mathrm{nm}$. Pohybuje se galaxie směrem od nás, nebo se přibližuje?

Přestože to pro řešení této úlohy není důležité, povšimněte si veličiny na svislé ose. Základní veličinou observační astronomie je intenzita, která udává výkon záření na jednotku plochy pozorovacího přístroje a jednotku vlnové délky nebo frekvence, pro danou úhlovou výseč zdroje. Například kolik wattů přichází na metr čtvereční na nanometr z dané úhlové výseče Slunce.

Zde je na svislé ose vynesena hustota zářivého toku, což je výkon vztažený na jednotku plochy a vlnové délky, ale z celého zdroje – není tedy vztažena na jednotku prostorového úhlu. V astronomii se někdy setkáme s neobvyklými jednotkami. Jedná se o pozůstatek soustavy cgs (centimetry-gramy-sekundy), která bývala v experimentální fyzice po dlouhou dobu používána.

Jednotkou energie v cgs soustavě je erg, který odpovídá 10^{-7} J. Vlnová délka se někdy měří v jednotce zvané Angström, což je 10^{-10} m, tedy desetina nanometru. Za jednotku plochy byl zvolen čtvereční centimetr.



Obr. 2: Závislost hustoty zářivého toku na vlnové délce s vyznačenými spektrálními čarami.

Výfučtení: Spektroskopie

Úvod

Toto Výfučtení se zabývá spektroskopií, což je vědní obor umožňující zkoumání hmotných těles pomocí rozkladu světla. Spektroskopie hraje naprosto zásadní roli ve fyzice i chemii. Pomocí tohoto oboru bylo již v devatenáctém století možno zkoumat chemické složení hvězd, díky čemuž jsme již tehdy byli schopni s jistotou ztotožnit hvězdy a Slunce. Na začátku dvacátého století umožnilo pozorování tzv. spektrálních čar vodíku pochopit podstatu atomu. Spektroskopickými metodami bylo taktéž objeveno rozpínání vesmíru a velká řada exoplanet.

Historický úvod

Dlouho nebylo lidem zřejmé, jaký je vztah mezi barvou a světlem. Po určitou dobu existovala domněnka, že barvy vznikají mísením světla a tmy. Isaac Newton tuto domněnku vyvrátil jednoduchým pozorováním: díváme-li se z dálky na černý text na stránce bílého papíru, bude se nám stránka jevit jako šedá, a nikoliv barevná.

Newton udělal řadu pozorování pomocí skleněného hranolu. Jako první si povšiml, že nechá-li hranolem projít sluneční světlo přicházející několik centimetrů velkým kruhovým otvorem do tmavé místnosti, vzniklý bílý kruh je na jednom konci modrý a na druhém červený.

Zmenšováním kruhového otvoru na úzkou příčnou štěrbinu se Newtonovi povedlo rozložit světlo na posloupnost barev nápadně připomínající duhu, kterou můžeme vidět na obloze. Této posloupnosti barev se říká *spektrum*. Nebylo zřejmé, zda hranol světlo pouze nějakým způsobem nezabarvuje. Newton ovšem zjistil, že za pomoci druhého hranolu lze složit spektrum zpět v bílé světlo. O Newtonovi si můžete přečíst více ve Výfučtení 1. série 8. ročníku[1] (nicméně tam se dočtete spíše o jiných věcech, které zkoumal).

Dále pak William Herschel, objevitel Uranu a jeho měsíců, rozkládal sluneční světlo hranolem na spektrum a přikládal teploměr pod jednotlivé barvy světla. Tímto chtěl přesněji popsat skutečnost, že se prostředek spektra jevil jasnější než okraje. Povšiml si ale, že nejvyšší teplotu naměřil až za okrajem viditelné části, na červené straně spektra. Usoudil tedy, že musí existovat paprsky, které jsou neviditelné, a přesto skutečné, které zahřívají tělesa více než paprsky viditelného světla. Ty dnes nazýváme **paprsky infračerveného záření**.

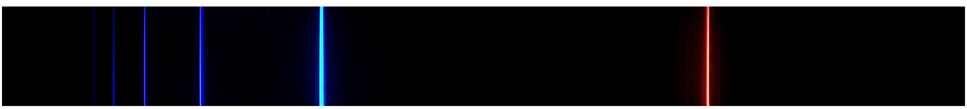
Pár let na to britský chemik Willam Wollatson rozkládal sluneční světlo pomocí hranolu a povšiml si, že ve spektru je šest úzkých černých čar. Nebylo zřejmé, jak je vysvětlit, považoval je za jakési přirozené dělení mezi sedmi barvami, které Isaac Newton označil za základní.

Později Joseph von Fraunhoffer sestavil první mřížkový spektroskop, tedy zařízení, které využívá vlnových vlastností světla a rozkládá jej pomocí jemné **difrakční mřížky**. Fraunhoffer se svým spektroskopem podíval na světlo plamene a povšiml si výrazné jasné čáry žlutooranžové barvy. Rozložíme-li světlo z plamene pomocí spektroskopu, nedostáváme spojitou duhu, ale od jedné barvy máme světla mnohem více. Poté se podíval na spektrum slunečního světla a nalezl *temnou* čáru na stejné vlnové délce. Tedy této barvy je ve spektru Slunce méně než jiných. Mřížkové spektroskopy mají mnohem větší rozlišení než hranolové a umožnily Fraunhofferovi objevit přes 500 takových *spektrálních čar*. Tyto nejvýraznější čáry ve slunečním spektru se nazývají Fraunhofferovy čáry.

Gustav Kirchhoff, známý svými zákony o elektrických obvodech, a Robert Bunsen zkoumali spektra prvků zahřátých v plameni. Bylo třeba, aby samotný plamen svítil co nejméně, což zajišťovali zařízením, které se dnes nazývá Bunsenův kahan. Podařilo se jim dospět k významnému výsledku. Ztotožnili totiž jasné, tzv. **emisní čáry**, v plamenových spektrech s čarami temnými, které se nazývají **absorpční**. Tytéž chemické látky, za různých teplot a tlaků, způsobují ve spektru buď zjasnění nebo zeslabení dané čáry. Rozšířili tak Fraunhofferovo pozorování žlutooranžové čáry na obecný princip a uvědomili si souvislost spektra a příslušného chemického prvku.

Dalším ze série fyziků, kteří se věnovali problematice spekter, byl švýcarský fyzik Johann Jakob Balmer. Ten se zaměřil na nejjednodušší a ve vesmíru nejběžnější prvek – vodík.

Vyšel z pozorování vodíku, které pořídil Anders Jonas Ångström, po kterém je pojmenovaná jednotka odpovídající délce 10^{-10} metrů, tedy $0{,}1\,\mathrm{nm} = 1\,\mathrm{Å}$. Tato jednotka, která je ve spektroskopii často používaná, není součástí soustavy SI, ale je součástí širší rodiny metrických jednotek.



Obr. 3: Viditelné spektrální čáry vodíku. Foto: Jan Homann, licence: CC-BY-SA 3.0 (`https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0`)

Balmer sledoval Angstromova pozorování šesti spektrálních čar vodíku. Tyto čáry nejsou rozmístěny rovnoměrně, ale postupně se směrem ke kratším vlnovým délkám (tedy ve směru

[1] `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r8/vyfucteni/vyfucteni_1.pdf`

od červeného k fialovému světlu) zahušťují. Přestože ještě mechanismus vzniku čar nebyl znám, podařilo se Balmerovi nalézt vztah popisující jejich vlnovou délku:

$$\lambda = \lambda_{\mathrm{B}} \frac{n^2}{n^2 - 4}\,,$$

v němž n odpovídá číslu čáry při vhodném očíslování a $\lambda_{\mathrm{B}} = 364{,}6\,\mathrm{nm}$ je Balmerova konstanta. Není vůbec zřejmé, proč by něco takového mělo platit. Co dělá ve jmenovateli číslo čtyři? Jaký je význam Balmerovy konstanty?

Vzorec, který je odvozen přímo z pozorování přírody a není odvozen z jiných dříve známých vztahů, se označuje jako *empirický*, případně *fenomenologický*. Balmerův vzorec je skvělým příkladem takového vztahu a umožnil mu předpovědět ještě sedmou spektrální čáru, která je již za hranicí viditelné oblasti. Této posloupnosti se říká *Balmerova řada* a čáry v ní se značí jako H-alpha, H-beta, H-gamma a tak dál.

Existence takového vztahu byla velmi záhadná a po dlouhou dobu neměla žádné fyzikální odůvodnění. To ovšem změnil Niels Bohr, který za tuto práci obdržel Nobelovu cenu.

Bohr ukázal, že se elektrony v atomovém obalu vyskytují jenom na určitých energetických hladinách. Tím se velmi liší od předmětů, se kterými máme každodenní zkušenost. Například těžítko na stole může mít potenciální energii 50 J a po dopadu na zem bude mít energii 0 J. Během pádu se potenciální energie těžítka měnila naprosto plynule, bez žádných skoků.

Naopak elektrony v atomovém obalu mohou mít pouze určité konkrétní množství energie, kterým se říká *kvanta*. Elektrony s vyšší energií osidlují energetické hladiny s vyšším hlavním kvantovým číslem n a pokud chtějí sestoupit na hladinu s nižším číslem, musí vyzářit *foton* (neboli světelné kvantum).

Vlnovou délku takto vyzářených fotonů pak můžeme určit ze známého Planckova-Einsteinova vztahu pro energii fotonu: $E = h \cdot f$, kde h je Planckova konstanta. O významu tohoto vztahu si můžete přečíst více ve Výfučtení o Maxi Planckovi.[2] Když dosadíme za frekvenci $f = c/\lambda$, vidíme, že

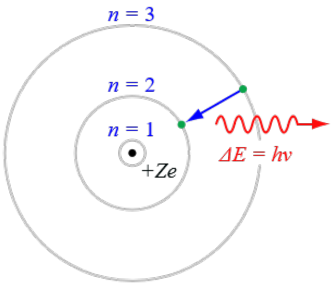
$$E_{\mathrm{n}} - E_{\mathrm{m}} = \Delta E = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{\Delta E}\,,$$

kde E_{n} je energie elektronu na původní vyšší hladině a E_{m} je energie na nižší hladině. Ze vzorečku vidíme, že čím bude větší rozdíl energií, tedy čím bude n větší, tím bude vlnová délka menší. Balmerovu vzorci pak odpovídají právě ty přechody, kdy elektrony přechází do druhé energetické hladiny, tedy $m = 2$. Záhadná čtyřka ve jmenovateli Balmerova vztahu se ještě za použití jiných kvantověmechanických vztahů dá vysvětlit jako $4 = m^2 = 2^2$.

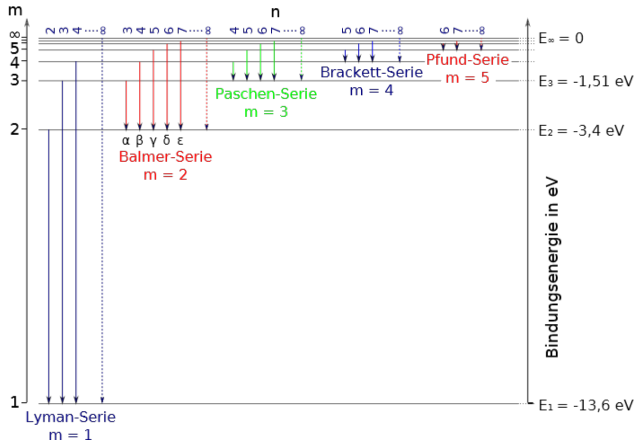
Nyní se pokusíme porozumět významu Balmerovy konstanty. Hladiny odpovídající vysokým hlavním kvantovým číslům n jsou na sebe velmi nahuštěné, mají tedy velmi podobnou energii. Rozdíly ve vlnové délce přechodů jsou tedy také velmi malé. Tzv. *Balmerův skok* odpovídá vlnové délce fotonu vyzářeného při přechodu elektronu z hypotetické hladiny n jdoucí do ∞ na $n = m = 2$.

Co je ale tato hypotetická hladina? To je v zásadě úplná „hranice atomu“. Elektrony za touto hranicí již nejsou k atomu nijak vázány. To také znamená, že mohou mít libovolnou energii, podobně jako předměty se kterými máme běžnou zkušenost.

[2] https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r8/vyfucteni/vyfucteni_2.pdf



Obr. 4: Bohrův model atomu. Elektron přechází ze stavu $n = 3$ do stavu $n = 2$, a tak se uvolní energie $\Delta E = E_2 - E_3$. Foto: JabberWok, licence: CC BY-SA 3.0 (`http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`)



Obr. 5: Schéma přechodů v obalu vodíku. Na vertikální ose je vazebná energie elektronu v atomu (napravo v eV). Vidíme, že může nabývat jen hodnot zanesených jako čáry, což odpovídá energetickým stavům elektronu E_n (nalevo jsou stavy očíslované). Foto: Herbert Schletter, licence: CC BY-SA 4.0 (`https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0`)

Využití

Vylíčili jsme si, jak se vyvíjely poznatky o spektroskopii, a objasnili základní pojmy. Jaké má ale vůbec toto všechno využití? A má vůbec nějaké? Aplikaci poznatků o spektrech najdeme v mnoha oborech.

Chemická analýza

Spektrum je pro daný chemický prvek trochu jako otisk prstu. Podle daných čar můžeme jednoznačně identifikovat daný prvek, nebo – jak tomu v historii několikrát bylo – objevit prvek zcela nový. Jedná se například o cesium, objevené Kirchhoffem a Bunsenem, které nese svůj název podle nebesky modré emisní čáry (nebe se latinsky řekne caelum). Podobně bylo objeveno rubidium, které se jmenuje podle své rubínově červené emisní čáry, nebo indium, jehož emisní čára má indigově modrou barvu.

Právě díky spektroskopii a tomu, že neexistují dvě chemicky odlišné látky, jejichž spektra by byla totožná, můžeme určovat složení různých věcí – od roztoků v laboratořích, přes hvězdy, až po atmosféry vzdálených exoplanet.

Když pak někde pozorujeme čáry, které nedokážeme přiřadit k žádnému známému prvku, je jasné, že jsme objevili prvek nový. Takto bylo objeveno třeba helium, když Pierre Janssen při zatmění Slunce roku 1868 pozoroval v jeho spektru neznámé žluté linie, které přiřadil novému prvku. Ten byl po bohu Slunce Heliovi pojmenován helium. Na zemi pak bylo helium izolováno až v roce 1895.

Obdobná situace nastala při pozorování spekter planetárních mlhovin, které mají výraznou zelenou emisní čáru. Ta nebyla ztotožněna s žádným známým prvkem, a tak se tato látka v mlhovinách označila jako nebulium. Až později bylo zjištěno, že se jedná o spektrální čáru ionizovaného kyslíku, která do té doby nebyla na Zemi pozorována.

Astronomie

Spektrum je pro nás velmi důležité i v jiných oblastech astronomie, zejména pro určování rychlostí. Jako pro každé jiné vlnění, i pro světlo totiž funguje Dopplerův jev, který způsobuje posuny vlnových délek při pohybu zdroje záření. Když tedy pozorujeme například ve hvězdě nějakou významnou čáru na vlnové délce λ a v laboratoři tu samou čáru máme na vlnové délce λ_0, zjistíme, že

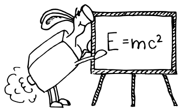
$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}\,,$$

kde c je rychlost světla a v je rychlost zdroje vůči pozorovateli v radiálním směru – tedy ve směru buď k přímo k nám, nebo přímo od nás. Podle toho, kam se čáry posouvají rozlišujeme rudý (vzdalování zdroje) a modrý (přibližování) posuv.

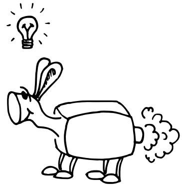
Měřením Dopplerova jevu u dvojhvězd tak například dokážeme velmi přesně změřit radiální rychlosti jednotlivých složek a dopočítat tak další parametry. Nebo můžeme na základě posunů ve spektru odhalit neznámého průvodce hvězdy – další hvězdu, ale třeba i exoplanetu.

Marco Souza de Joode
`marco@vyfuk.mff.cuni.cz`

Lukáš Linhart
`lukasl@vyfuk.mff.cuni.cz`



Řešení I. série



Úloha I.1 ... Sedimentace

5 bodů; průměr 4,57; řešilo 7 studentů

Vezměte si sklenici horké a studené vody a v každé z nich rozmíchejte dvě lžíce hlíny. Ve které sklenici se usadí kal dříve a jak dlouho to bude trvat? Kromě doby usazení nezapomeňte uvést i všechny relevantní údaje jako např. množství hlíny či nejistotu měření. Dokážete pro pozorovaný rozdíl nalézt fyzikální zdůvodnění?

Suspenze je různorodá směs dvou látek: v našem případě hlíny a vody. Na rozdíl od roztoků dochází v suspenzích k usazování pevné složky ke dnu. Tento proces se označuje jako sedimentace. Pokus jsme prováděli ve dvou identických sklenicích, které obě obsahovaly 200 gramů vody a 15 gramů hlíny.

Jak rychle se částice usazují je určeno především jejich velikostí a hustotou. Velká část hlíny je tvořena malými kamínky a pískem, který ihned po zamíchání začne klesat ke dnu sklenice s teplou i studenou vodou. Tyto částice po několika desítkách sekund vytvoří vrstvu usazeniny na dně.

Rychlost sedimentace těchto větších částic je spíše závislá na způsobu, kterým jste vodu ve sklenici zamíchali. Pokud jste míchali krouživým pohybem, který ve sklenici vytvořil vír, dochází k pomalejší sedimentaci. Odstředivá síla na ně působí podobně jako na skleněnku obíhající po vnitřku mísy: čím rychleji skleněnka v míse krouží, tím pomaleji klesá ke dnu. Pokud jste míchali chaoticky a vodu neroztáčeli, k této prvotní sedimentaci došlo trochu rychleji.

Na hladině obou sklenic vidíme drobné organické částečky, které mají menší hustotu než voda. Některé z nich časem klesají ke dnu. Hladinu může pokrývat vrstva bublinek tvořící pěnu, která díky povrchovému napětí postupně obklopí okraje sklenice.

Většinu objemu obou sklenic nyní zaplňuje voda znečištěná menšími částicemi. Kdybychom chtěli získat vodu čistou, mohli bychom tuto vrstvu odlít a dále třeba filtrovat. Takovéto odlití se označuje jako dekantace. My ovšem trpělivě pozorujeme, jak dochází k dalšímu postupnému usazování. Asi jste si povšimli, že nejde určit přesný okamžik, kdy se voda stane čirou. Jedná se totiž o postupný proces.

Již v prvních několika minutách lze ale vidět, že usazování ve sklenici s teplou vodou probíhá rychleji než ve sklenici s vodou studenou. Tento rozdíl lze nejlépe pozorovat v temné místnosti, kdy sklenice nasvítíme shora stejným zdrojem světla a sledujeme barevný přechod. Liší se také čirost vody u dna sklenice: ve sklenici s teplou vodou vidíme větší část usazeniny na dně, ve sklenici se studenou vodou usazeninu téměř nevidíme.

Po hodině usazování rozdíl stále vidíme, ale již se nezvětšuje. To proto, že dochází k postupnému vyrovnání teplotních rozdílů. Ve sklenici, ve které byla teplá voda, můžeme pozorovat drobné půdní organismy, zatímco ve druhé sklenici voda není dostatečně čirá.

Příčinou tohoto rozdílu je tepelný pohyb molekul vody. Již při míchání jsme si mohli všimnout, že teplá voda se snadno rozproudí a rozvíří v celém objemu sklenice, zatímco částečky ve studené vodě se jeví pomalé a líné. To je pro teplou vodu zpočátku nevýhoda, až do ustálení těchto počátečních vírů. Míra toho, jak kapalina vzdoruje pohybu, se označuje jako viskozita – velmi viskózní kapalinou je například med. Viskozita vody s teplotou klesá, a proto se teplá voda snáz rozvíří. Také to znamená, že teplá voda klade menší odpor na klesající částečky.

K úplnému usazení dochází jen velmi pomalu. Od určitého bodu zůstanou v suspenzi jen velmi malé částečky, kterým tepelný pohyb vody v usazení naopak brání. V praxi se k závěrečnému dočištění vody může použít vločkovač, což je chemická látka, která způsobí nabalování malých částeček na větší. Po přidání vločkovače se voda zdánlivě zakalí, protože v ní vzniknou z malých částic větší částice, které se ovšem s časem usadí ke dnu nebo mohou být odfiltrovány.

Marco Souza de Joode
`marco@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.2 ... Setkání organizátorů

5 bodů; průměr 4,87; řešilo 55 studentů

Organizátoři Výfuku se rozhodli, že se sejdou, aby vymysleli nové úlohy. Každý z nich měl ale specifické podmínky své účasti:

- *Eva přijde právě tehdy, když dorazí i Lubor s Kájou.*
- *Lubor ale nemá rád moc lidí a dorazí, jen pokud se neobjeví Jindra.*
- *Kája se dostaví, pokud dorazí Marco nebo Kačka.*
- *Kačka přijde, když se zúčastní aspoň čtyři další lidé.*
- *Jindra schůzku navštíví, jestliže dorazí i Kačka a zároveň nepřijde Marco.*
- *Viktor se zúčastní pouze tehdy, když nepřijde Jindra ani Kája.*
- *Marco přijde, pokud se zúčastní aspoň 2 organizátorky.*

Určete, kolik nejvíce organizátorů na setkání dorazí.

Tuto úlohu můžeme zařadit mezi problémy věnující se výrokové logice. Ty mohou na první pohled vypadat obtížně, máme však jednoduché nástroje, kterými je můžeme řešit. V tomto případě se bude jednat o tabulku. Do té napíšeme, zda jsou splněny podmínky, kdy daný výrok platí. Pokud ano, napíšeme 1, pokud ne, tak 0. Tímto způsobem si vyjádříme všechny situace, které mohou nastat. Tuto tabulku 1 si nyní sestavíme i k naší úloze. U Jindry je vždy nula,

Eva	Lubor	Kája	Kačka	Jindra	Marco	Viktor
1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1

Tab. 1: Tabulka podmínek

protože kdyby přišel, nemohl by přijít nikdo jiný a podmínky Jindrovy účasti se tudíž nikdy nedají splnit. Aby se totiž Jindra dostavil, musela by přijít Kačka a nesměl by přijít Marco. Aby přišla Kačka, musí přijít alespoň 4 další lidé, z nichž jeden je Jindra. Lubor určitě nedorazí (protože přišel Jindra), tím pádem nepřijde ani Eva. Kája by dojít mohla, ale kdyby přišla, tak už jsou splněny podmínky pro Marca, takže nepřijde. Poslední, kdo by mohl dorazit, je Viktor, který nepřijde, protože došel Jindra. Další tři organizátoři tedy určitě nedorazí, tedy nedorazí ani Kačka a tím pádem ani Jindra.

Víme tedy, že Jindra nepřijde. Tím pádem určitě přijde Lubor. Díky tomu víme, že Kája s Evou dorazí buď obě, nebo nepřijde ani jedna. Aby přišly, musí zároveň dojít i Marco, kterému plní podmínku dvou organizátorek. Pak už jsou na setkání 4 organizátoři (Eva, Kája, Marco, Lubor), tedy přijde i Kačka, a to je už pět lidí.

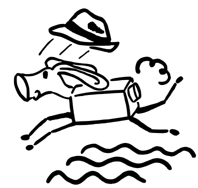
Alternativní možnost je, že Kája s Evou nepřijdou: nemohou pak přijít dvě organizátorky, tedy určitě nepřijde ani Marco, ale přijde Viktor. Na setkání jsou tedy Lubor a Viktor, což je méně než 4, takže nepřijde ani Kačka a počet organizátorů je nižší než v předchozím případě.

Jak můžeme vidět, v prvním případě se setkání zúčastní 5 lidí (Eva, Lubor, Kája, Kačka a Marco), což je možné maximum.

Anežka Čechová
anezka@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.3 ... Výfučkův klobouk

6 bodů; průměr 5,11; řešilo 55 studentů



Výfuček šel se svými kamarády na procházku do lesa, byl jí ale tak nadšený, že běžel dvakrát rychleji než jeho kamarádi. Po půl hodině musel přeskočit přes potok, byl ale neopatrný, a tak mu do něj spadl klobouk. Potok začal klobouk unášet v opačném směru, než šel Výfuček, ten se však nestrachoval, protože věděl, že jeho přátelé jdou podél potoka a klobouk chytí. Za jak dlouho od začátku cesty přátelé chytí klobouk, když víme, že rychlost potoka je $20\,\mathrm{km/h}$*, což je právě čtyřikrát víc než rychlost přátel? Jaká je rychlost Výfučka?*

Nejprve si ujasníme, jak rychle se jednotlivé objekty pohybují. Voda v potoce má rychlost $20\,\mathrm{km/h}$, Výfučkovi přátelé čtyřikrát menší, tedy $5\,\mathrm{km/h}$, a Výfuček zase dvakrát větší než přátelé, tedy $10\,\mathrm{km/h}$.

Pro čas, za který klobouk dopluje k přátelům, platí

$$t = \frac{s_\mathrm{k}}{v_\mathrm{k}}\,,$$

kde s_k je dráha, kterou musí klobouk k přátelům urazit, a v_k je rychlost, kterou klobouk vůči přátelům má.

Nejdříve se zamysleme nad velikostí v_k – samotný klobouk se pohybuje rychlostí $20\,\mathrm{km/h}$ (unáší ho řeka), přátelé rychlostí $5\,\mathrm{km/h}$, ale v opačném směru. Jelikož se pohybují naproti sobě, budou u sebe rychleji, než kdyby se pohybovali stejným směrem, obě rychlosti proto sečteme a získáme velikost rychlosti, kterou se klobouk pohybuje vůči přátelům.

Dráha, kterou musí překonat, vznikla tím, že se Výfuček pohyboval dvakrát rychleji než kamarádi, a získal tak náskok právě o velikosti s_k. Před ztrátou klobouku se Výfuček pohyboval půl hodiny, a jelikož známe rychlosti Výfučka i přátel, dokážeme jednoduše spočítat, jakou vzdálenost od startu mezitím urazili přátelé, a tedy jaký je vzdálenostní rozdíl mezi Výfučkem a přáteli.

Platí tak, že

$$t = \frac{(0{,}5\,\mathrm{h}\cdot 10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-}1}) - (0{,}5\,\mathrm{h}\cdot 5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-}1})}{20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-}1} + 5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-}1}}\,,$$

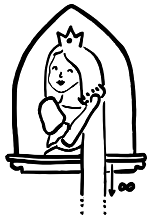
což je $0{,}1\,\mathrm{h}$, tedy šest minut. Od začátku cesty po zachycení klobouku Výfučkovými přáteli tudíž uplynulo 36 minut.

Můžeme si všimnout, že jsme v úloze šalamounsky využili to, že o rychlosti tělesa mluvíme vždy vůči nějakému jinému tělesu. V tomto případě jsme tak mohli uvažovat rychlost klobouku vůči přátelům a počítat s jednoduchou kinematickou rovnicí. Kdyby nás toto nenapadlo, byli bychom jistě přinejmenším zmatení, jak počítat vzdálenost Výfučka a přátel v každém okamžiku cesty.

Karolína Letochová
kaja@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... Princezna Zlatovláska

6 bodů; průměr 5,14; řešilo 44 studentů



Princezna Zlatovláska se rozhodla, že si nechá narůst co nejdelší zlaté vlasy. Jelikož je ale znalá vlastností materiálů, přemýšlela nad tím, jak maximálně dlouhé je může mít, aby se jí při spuštění z okna věže nepřetrhly vlastní vahou. Předpokládejme, že princezna má dostatečně pevný krk a kůži k udržení celkové hmotnosti svých vlasů a dostatečně vysokou věž, ze které může vlasy spouštět. Vlas má průměr $20\,\mathrm{\mu m}$*, zlato má mez pevnosti v tahu* $100\,\mathrm{MPa}$ *a jeho hustota je* $19{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$*. Pomozte princezně Zlatovlásce určit maximální možnou délku vlasů.*

Ze zadání známe hodnotu meze pevnosti v tahu. Tato hodnota nám říká, jaký největší tah vydrží daný materiál, při překročení této hodnoty se natahovaný materiál už přetrhne. Mez pevnosti má jednotku Pa, stejně jako tlak, a má i stejný fyzikální smysl. Použijeme tedy vztah pro výpočet tlaku $p = F/S$ a za sílu F dosadíme vztah pro tíhovou sílu: $F = mg$. Do plochy S dosadíme vzorec pro obsah průřezu vlasu, což není nic jiného než obsah kruhu.

Pokud si ale vyjádříme vztah pro hmotnost pomocí hustoty, dostaneme $m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot h$. Po dosazení do našeho vztahu pro tlak tak vidíme, že se hodnoty průřezu vykrátí. Hodnotu průměru vlasu ze zadání během řešení tedy nepotřebujeme a hodnota meze pevnosti na něm nezávisí:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho S h g}{S} = \rho h g\,.$$

Všimněme si, že vzorec je nápadně podobný vzorci pro hydrostatický tlak.

Z tohoto vztahu již můžeme vyjádřit vztah pro maximální délku h, neboť známe hodnotu meze pevnosti v tahu p, hustotu zlata ρ a za tíhové zrychlení dosadíme $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Před dosazením ale ještě převedeme hodnoty veličin do základních jednotek:

$$p = 100\,\mathrm{MPa} = 100\,000\,000\,\mathrm{Pa} = 100 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}\,,$$
$$\rho = 19{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}} = 19\,300\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Teď již můžeme dosadit:

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{100 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}}{19\,300\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} \doteq 530\,\mathrm{m}\,.$$

Princezna Zlatovláska tedy může mít vlasy maximálně dlouhé přibližně 530 m.

Alžběta Andrýsková
betka@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.5 ... Luborovi není zima

7 bodů; průměr 5,47; řešilo 30 studentů

Luborovi byla poté, co vylezl z bazénu, trochu zima, i přestože měla voda přijatelnou teplotu, a tak se rozhodl, že se trochu ohřeje na slunci. Aby se nenudil, začal počítat, jak rychle se bude ohřívat.

1. *Ihned si uvědomil, že ze všeho nejdříve bude muset spočítat intenzitu záření ve* $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$, *která na povrch Země, a tedy i na jeho tělo, dopadá. K jaké hodnotě by měl dojít? Zářivý výkon Slunce a další potřebné hodnoty si vyhledejte, výsledek uveďte s přesností na tři platné cifry.*
2. *Poté si ale uvědomil, že aby byl schopný dojít k nějakému výsledku, bude muset provést několik aproximací. Rozhodl se, že by své tělo mohl aproximovat jako kvádr o rozměrech* $175 \times 30{,}0 \times 13{,}0\,\mathrm{cm}$, *na jehož největší stěně leží a na protilehlou stěnu tak dopadá sluneční záření. Za jak dlouho se jeho tělo ohřeje o* $\Delta T = 1{,}00\,\mathrm{K}$, *pokud uvažujeme, že má hustotu i měrnou tepelnou kapacitu stejnou jako voda a že se bude ohřívat najednou a nebude ztrácet teplo do okolí? Také předpokládejte, že sluneční paprsky na Luborovo tělo dopadají kolmo.*
3. *Za jak dlouhou dobu by se tělo takto ohřálo na bod varu, pokud by mělo na počátku normální teplotu lidského těla, tedy* $36{,}5\,°\mathrm{C}$*? Naplnily by se v tu chvíli Luborovy obavy, že mu v žilách začne vřít krev?*

Intenzitu záření I_e spočítáme jako podíl celkového zářivého výkonu Slunce $L_\odot$ a povrchu koule S, skrz kterou toto záření na úrovni Země rovnoměrně prochází. Za poloměr koule dosadíme vzdálenost Země od Slunce.

$$I_\mathrm{e} = \frac{L_\odot}{4\pi r^2} = \frac{3{,}827 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{4.\pi.(1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2} \doteq 1\,361\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$$

Samozřejmě se jedná o přibližnou hodnotu – určitá část výkonu se ztratí po cestě (například v atmosféře).

Abychom spočítali čas t_0, za který se Luborovo tělo ohřeje o $\Delta T = 1\,°\mathrm{C}$, musíme vydělit celkové množství potřebného tepla Q výkonem dopadajícího slunečního záření P. Teplo Q spočítáme jako $Q = mc\Delta T$, kde $m = \rho V = \rho xyz$, c je tepelná kapacita vody a ΔT známý rozdíl teplot. Luborovo tělo samozřejmě kromě jednotkového objemu nemá ani jednotkový povrch, a proto musí být P spočítáno jako $P = I_\mathrm{e} xy$. Dodejme jen, že kdyby nebyl v zadání zjednodušující předpoklad, že záření dopadá kolmo na Lubora, museli bychom počítat s kolmou částí výkonu k Luborovu tělu.

Neznámé x, y a z po řadě označují jednotlivé rozměry aproximace Luborova těla tak, jak jdou po řadě v zadání.

$$t_0 = \frac{Q}{P} = \frac{mc\Delta T}{P}$$

$$t_0 = \frac{xyz\rho c\Delta T}{I_\mathrm{e} xy} = \frac{z\rho c\Delta T}{I_\mathrm{e}}$$

$$t_0 = \frac{0{,}130\,\mathrm{m} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}°C^{-1}} \cdot 1\,°\mathrm{C}}{1\,361\,\mathrm{W}} \doteq 401\,\mathrm{s}\,.$$

Výsledek předposledního kroku lze interpretovat například i tak, že se Luborovo tělo ohřívá o přibližně $1/401\,°\mathrm{C{\cdot}s^{-1}}$. Pokud chceme spočítat, za jak dlouho se ohřeje o $\Delta T' = 100 - 36{,}5 = 63{,}5\,°\mathrm{C}$, musíme výsledný rozdíl teplot vydělit rychlostí ohřevu.

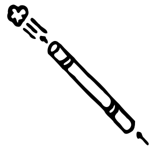
$$t_1 = \frac{63{,}5\,°\mathrm{C}}{\frac{1}{401}\,°\mathrm{C{\cdot}s^{-1}}} \doteq 25\,500\,\mathrm{s}\,.$$

To je více než sedm hodin. Pokud navíc vezmeme v úvahu značné tepelné ztráty a schopnost těla aktivně kontrolovat svou teplotu, je jasné, že Luborovi v žilách krev vřít určitě nezačne.

Viktor Materna
`materna@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.E ... Foukačka

7 bodů; průměr 4,11; řešilo 28 studentů



Vyrobte si z brčka nebo trubky foukací zbraň a co nejpřesněji ji popište včetně důležitých parametrů (můžete doplnit i fotografií či nákresem). Změřte, jak daleko s takovou zbraní dostřelíte projektil vyrobený ze zmuchlaného kusu papírového ubrousku nebo kapesníku – snažte se dostřel maximalizovat. Na jakých vlastnostech projektilu dostřel závisí? Nezapomeňte uvést nejistoty měření relevantních veličin.

Teorie

Foukací zbraň vypadá jako trubka. Z jedné strany do ní vložíme náboj a z té stejné strany do ní foukneme. Vytvoříme tak uvnitř zbraně přetlak a tlak vzduchu urychluje náš náboj po celou dobu cesty trubkou. Důležitým parametrem zbraně je tedy její délka, protože to je vzdálenost, po kterou na náboj působí síla, tedy vzdálenost, na které náboj zvyšuje svoji rychlost. Čím delší je zbraň, tím dále s ní můžeme dostřelit.

Jakmile náboj opustí trubku, jeho pohyb můžeme popisovat jako vrh vodorovný. Má to ovšem jeden háček – na papírové kuličky působí nezanedbatelný odpor vzduchu. Odporovou sílu prostředí můžeme vyjádřit jako

$$F = \frac{1}{2}\rho c S v^2\,,$$

kde ρ je hustota vzduchu, S je příčný průřez tělesa, v je rychlost tělesa a c je odporový koeficient. Hustotu vzduchu neovlivníme, předpokládáme, že kapesníková kulička přesně vyplní brčko, tedy příčný průřez nábojů budeme mít také totožný, rychlost, se kterou náboje opustí zbraň, by se rovněž neměla lišit. Jediné, co tedy ovlivníme, je odporový koeficient. Ten se stanovuje experimentálně, ale obecně víme, že koule má nižší odporový koeficient než stejně velká miska otočená dnem od směru pohybu. Současně platí, že čím více záhybů povrch tělesa má, tím vyšší má odporový koeficient. Můžeme tedy vyslovit předpoklad, že pevnější kulička doletí dál než kulička, která je napůl či úplně rozbalená.

Další veličina, která by mohla hrát roli, je hmotnost kuličky, ale její vliv by bylo složité odhadnout, jelikož hmotnější kulička by byla méně urychlená foukáním a k zemi by padala rychleji, ale na druhou stranu by zase byla méně brzděna odporem ve vodorovném směru. Tuto závislost tedy studovat nebudeme a experiment budeme provádět s kuličkami konstantní hmotnosti. Jak pevně jsme umotali kuličku z kapesníku ovšem nemůžeme nijak měřit. Provádíme tedy experiment spíše kvalitativní povahy, kde ověřujeme, jestli se něco chová, jak má, nezjišťujeme přesnou hodnotu. Jediná veličina, kterou můžeme změřit a spočítat její nejistotu, je tak samotný dostřel foukačky.

Měření

Umotáme si z papírového kapesníku čtyři různé kuličky, které seřadíme podle toho, jak „dokonalé“ jsou. Nejméně dokonalou nazveme koulí 1, nejdokonalejší pak koulí 4. Na obrázku 6 vidíme vyfocené všechny čtyři použité koule.

Obr. 6: Papírové kuličky seřazené (zleva) od nejméně pevné po nejpevnější.

Každou takovou kouli desetkrát vystřelíme z naší brčkové foukačky a změříme dostřel. Střílet budeme z brčka o délce 21 cm z výšky 10 cm. Kuličky mají průměr okolo 6 mm. Všechny kuličky střílíme ze stejné výšky, protože jak z teorie vodorovného vrhu víme, počáteční výška také ovlivňuje vzdálenost dopadu.

Kulička	$\frac{d}{\mathrm{m}}$	$\frac{\Delta d}{\mathrm{m}}$
1	1,23	0,04
2	1,96	0,04
3	2,99	0,05
4	4,03	0,06

Tab. 2: Průměrné vzdálenosti dopadu jednotlivých kuliček

Z tabulky 2 vidíme, že vzdálenost dopadu d opravdu s dokonalostí kuličky roste, jak jsme předpokládali. Roste nám ale i nejistota měření (vypočtená jako absolutní odchylka[3]). Při dopadu kuličky totiž dojde k pružné srážce s podlahou, kulička „poskočí“ a doletí ještě o kousek dál. Musíme tedy kvalifikovaným odhadem určit místo prvního dopadu, což se u dopadů dál od pozorovatele odhaduje znatelně hůře. Současně nejméně dokonalé kuličky jsou nejměkčí, odrazily se tedy méně, spíše se lehce smýkly a svou pozici od prvního dopadu moc nezměnily.

[3] Jak na výpočet nejistot se dozvíte na našich stránkách v sekci Hokus Pokus.

Závěr

Vzdálenost dopadu projektilu z brčkové foukací zbraně závisí na součiniteli odporu prostředí pro daný projektil. Pro kuličky z papírových kapesníků jej ovlivňuje to, jak pevně jsou umotané, resp. jak moc se blíží dokonalé kouli. Dostřel brčkové zbraně ve výšce 10 cm lze kvalitou kuličky ovlivnit až v řádu metrů. Nejpevnější kulička doletěla do vzdálenosti $d_4 = (4{,}03 \pm 0{,}06)\,\mathrm{m}$, nejméně pevná pak uletěla pouhých $d_1 = (1{,}23 \pm 0{,}04)\,\mathrm{m}$. Na přesnost měření měl největší vliv odhad místa prvního dopadu papírové kuličky.

Soňa Husáková
sona@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.V ... Olympiáda

7 bodů; průměr 3,36; řešilo 25 studentů

Výfuček sledoval olympiádu a udivovaly ho výkony, které podávali nejrůznější sportovci. Ještě zajímavější mu však připadalo, s jakou jistotou a přesností pracovali rozhodčí a personál zajišťující závody, obzvlášť ve sprintu na sto metrů.

1. *Jeden z běžců uběhl trať o délce $l = (100 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m}$ za čas $t = (10{,}230 \pm 0{,}005)\,\mathrm{s}$. Jaká byla jeho průměrná rychlost? Uveďte ve správném tvaru se správným počtem platných cifer.*

Výfuček si dále říkal, jaká je škoda, že běžci na sto metrů běží jen jednou. Někomu se totiž může stát, že špatně vystartuje a je pomalejší, někdo může mít příznivý vítr a být tak rychlejší. Řekl si, že kdyby se mělo určit, který ze sprinterů je nejlepší, možná by bylo spravedlivější je měřit vícekrát.

2. *Představte si tedy, že dva běžci běží závod na sto metrů desetkrát za sebou a měříme jejich časy t (první běžec) a T (druhý běžec). Za pomocí směrodatné odchylky můžeme vypočítat náhodnou nejistotu $\Delta t_1 = 0{,}05\,\mathrm{s}$, resp. $\Delta T_1 = 0{,}5\,\mathrm{s}$, která zohledňuje, že pokaždé zaběhnou jiný čas. Dále jejich časy měříme přístrojem s přístrojovou chybou $\Delta t_2 = \Delta T_2 = 0{,}05\,\mathrm{s}$. Běžci naběhali průměrné časy $\overline{t} = 10{,}1\,\mathrm{s}$ a $\overline{T} = 10{,}2\,\mathrm{s}$. Spočtěte nejistotu času obou běžců a napište časy závodníků ve správném zápisu. Který ze závodníků by podle vás měl být označen jako lepší běžec?*

1. U výpočtu použijeme poznatky z Výfučtení. Výsledná průměrná rychlost se musí skládat z pravděpodobné hodnoty a její nejistoty. Pravděpodobná hodnota průměrné rychlosti v se vypočte jako podíl pravděpodobných hodnot naměřené délky l a času t.

$$\overline{v} = \frac{\overline{l}}{\overline{t}} = \frac{100}{10{,}230}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 9{,}78\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Hodnotu jsme zaokrouhlili na nejmenší společný počet platných cifer, tedy tři platné číslice. Pro výpočet nejistoty podílu využijeme fakt, že relativní nejistoty se sčítají, dostaneme tak

$$\frac{\sigma_c}{\overline{c}} = \frac{\sigma_a}{\overline{a}} + \frac{\sigma_b}{\overline{b}}\,,$$

kde σ_X je absolutní nejistota veličiny X. Získáme tak výslednou hodnotu nejistoty rychlosti

$$\sigma_v = \overline{v}\left(\frac{\sigma_l}{\overline{l}} + \frac{\sigma_t}{\overline{t}}\right) = 9{,}78\left(\frac{0{,}5}{100} + \frac{0{,}005}{10{,}230}\right)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 0{,}05\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

kterou jsme zaokrouhlili na jednu platnou cifru, což je náhodou stejný počet desetinných míst jako pravděpodobná hodnota. (Pokud by to tak nebylo, museli bychom výslednou rychlost zaokrouhlit na stejný počet desetinných míst jako nejistotu.) Výslednou rychlost zapíšeme ve finálním tvaru

$$v = (9{,}78 \pm 0{,}05)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

2. Z Výfučtení víme, že dvě na sobě nezávislé nejistoty se sčítají ve tvaru $\Delta_c = \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_b^2}$, tudíž nejistoty jednotlivých běžců budou

$$\Delta t_c = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2} = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}05^2}\,\mathrm{s} = 0{,}07\,\mathrm{s}\,,$$
$$\Delta T_c = \sqrt{\Delta T_1^2 + \Delta T_2^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}05^2}\,\mathrm{s} = 0{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

Zapíšeme-li časy ve finálním tvaru, získáme

$$t = (10{,}1 \pm 0{,}07)\,\mathrm{s}\,,$$
$$T = (10{,}2 \pm 0{,}5)\,\mathrm{s}\,.$$

Jaká je tedy interpretace výsledku? První běžec má kratší průměrný čas a menší rozpětí ve svém výkonu, zatímco druhý běžec běží déle, ale má větší výkyvy v zaběhnutém času. Všimněme si, že druhý běžec může potenciálně zaběhnout čas $(10{,}2 - 0{,}5)\,\mathrm{s} = 9{,}7\,\mathrm{s}$, což je rychlejší čas, než ten, který může zaběhnout první běžec.

Máme tedy před sebou dilema: je lepší běžec ten, který konzistentně běží lépe, či ten, který má šanci zaběhnout lepší čas? Kdybychom byli na olympiádě, nemohli bychom říct, který ze dvou běžců zvítězí, pravděpodobně to bude ten první, ale je i nějaká šance, že zvítězí druhý.

Je tedy těžké říci, který z běžců je lepší, a není věcí fyzika, aby to rozhodl. V tomto vzorovém řešení se však přikláníme k tomu, že jako lepšího atleta bychom určili prvního běžce.

Patrik Kašpárek
`patrik@vyfuk.mff.cuni.cz`

Pořadí řešitelů po I. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**43**
1.	*Eliška Knopfová*	CírkBratská škola - církevní ZŠ	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
2.	*Dat Nguyen*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**43**
1.	*Petr Barták*	Slovanské G, Olomouc	5	5	6	6	7	3	–	**32**	**32**
2.–3.	*Lukáš Hobza*	G O. Havlové, Ostrava	4	5	0	5	4	2	3	**23**	**23**
2.–3.	*Lucie Kohoutková*	Masarykovo G, Plzeň	5	5	6	–	–	7	–	**23**	**23**
4.	*Eva Kundratová*	ZŠ Komenského II Zlín	4	5	6	–	–	6	–	**21**	**21**
5.	*Zuzana Kýrová*	ZŠ nám. Svornosti, Brno	5	5	6	–	–	2	–	**18**	**18**
6.	*Julie Krčmařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	4	5	1	–	–	3	–	**13**	**13**
7.	*Alžběta Sochorová*	G, Blovice	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**10**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
1.	*Lucie Endlová*	G O. Havlové, Ostrava	–	5	6	6	7	6	7	**37**	**37**
2.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	5	7	5	**34**	**34**
3.	*Pavel Křivý*	G a SOŠ, Frýdek-Místek	–	5	6	6	7	3	–	**27**	**27**
4.	*Jan Herzig*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	5	6	4	2	4	4	**25**	**25**
5.–6.	*Klára Souza de Joode*	G Jana Keplera, Praha	–	5	5	6	5	–	–	**21**	**21**
5.–6.	*Kamilo Tomáš*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	6	–	–	4	**21**	**21**
7.	*Božena Lednická*	G O. Havlové, Ostrava	–	–	6	6	7	–	–	**19**	**19**
8.–10.	*Natálie Jochová*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**17**
8.–10.	*Marie Steinhauserová*	ZŠ Strmilov	–	5	5	4	–	2	1	**17**	**17**
8.–10.	*Petra Šilerová*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**17**
11.	*Michaela Urbanová*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	6	–	–	3	–	**14**	**14**
12.	*Vojtěch Černý*	G Jana Keplera, Praha	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
13.	*Lenka Hromádková*	G, Hlinsko	–	5	4	–	–	–	–	**9**	**9**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
1.–2.	*Lada Srpová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
1.–2.	*Stela Srpová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
3.	*Ludmila Šírová*	Mensa G, Praha 6	–	5	6	6	7	7	6	**37**	**37**
4.	*Veronika Menšíková*	Arcibiskupské G, Praha	–	5	6	6	7	7	4	**35**	**35**
5.	*Jiří Preč*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	5	6	6	7	5	4	**33**	**33**
6.–7.	*Damian Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	5	6	7	7	0	**30**	**30**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**38**
6.–7.	*Vojtěch Zielina*	G, Třinec	–	5	6	6	7	3	3	**30**	**30**
8.–11.	*Jana Jackaninová*	G O. Havlové, Ostrava	–	5	6	5	4	4	3	**27**	**27**
8.–11.	*Nikola Jarošová*	ZŠ a MŠ Dolní Loučky	–	5	6	6	6	4	–	**27**	**27**
8.–11.	*Helena Muchová*	G Jana Keplera, Praha	–	5	5	6	6	–	5	**27**	**27**
8.–11.	*Patrik Pöschl*	ZŠ Školní ul., Hrádek nad Nisou	–	5	6	5	7	–	4	**27**	**27**
12.	*Mark Joly*	G, Havlíčkův Brod	–	5	6	6	5	–	4	**26**	**26**
13.–15.	*Michal Dobrovolný*	G Masarykovo nám., Třebíč	–	5	0	6	5	3	5	**24**	**24**
13.–15.	*Tereza Nejezchlebová*	G Dašická, Pardubice	–	5	6	6	–	4	3	**24**	**24**
13.–15.	*Vít Novák*	ZŠ Chyšky	–	5	6	6	5	1	1	**24**	**24**
16.	*Ester Šlapotová*	G Frýdecká, Český Těšín	–	5	6	6	5	–	–	**22**	**22**
17.–18.	*Šimon Mach*	G, Havlíčkův Brod	–	5	6	5	5	–	–	**21**	**21**
17.–18.	*Alexander Spálený*	Slovanské G, Olomouc	–	5	6	6	4	–	–	**21**	**21**
19.–20.	*Barbora Bouberlová*	ZŠ Bavorovská, Vodňany	–	3	5	5	3	3	–	**19**	**19**
19.–20.	*Vojtěch Novosad*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	5	4	5	–	–	**19**	**19**
21.	*Filip Černý*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	6	5	7	–	–	**18**	**18**
22.–24.	*Vojtěch Janáček*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	6	6	–	–	0	**17**	**17**
22.–24.	*Adam Mikulič*	G, Havlíčkův Brod	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**17**
22.–24.	*Mikuláš Vlčan*	ZŠ T. G. Masaryka Třebíč	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**17**
25.–26.	*Jana Vestfálová*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	5	6	5	–	–	–	**16**	**16**
25.–26.	*Tomáš Zvolánek*	ZŠ V Sadech, Havlíčkův Brod	–	5	6	5	–	–	–	**16**	**16**
27.	*Sofie Prchalová*	G, Šumperk	–	5	2	2	2	3	1	**15**	**15**
28.	*Natálie Kamenická*	ZŠ E.Krásnohorské, Ústí nad Labe	–	5	3	6	–	–	–	**14**	**14**
29.	*Jindřich Anderle*	G, Budějovická, Praha	–	5	6	2	–	–	–	**13**	**13**
30.–31.	*Patricie Labuťová*	G B. Němcové, HK	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
30.–31.	*Tomáš Řehák*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**11**
32.	*Amelie Vítková*	G a SOŠP, Čáslav	–	2	2	2	2	–	1	**9**	**9**
33.	*Žaneta Rozhonová*	ZŠ Strakonice, Dukelská	–	5	3	–	–	–	–	**8**	**8**
34.–35.	*Jiří Janda*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	–	4	1	0	–	1	1	**7**	**7**
34.–35.	*Marek Janda*	ZŠ Horácké náměstí, Brno	–	4	1	0	–	1	1	**7**	**7**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.