Úloha II.V ... Jádro pudla

7 bodů; (chybí statistiky)

1. *Existují jaderné reaktory, které místo štěpení směsi uranových izotopů štěpí jádra ^{239}Pu. Jednou z reakcí, které v reaktoru probíhají, je*

$$^{239}\mathrm{Pu} + {}^{1}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{234}\mathrm{U} + {}^{4}\mathrm{He} + 2\,{}^{1}\mathrm{n}\,.$$

Určete, kolik energie se během reakce vyprodukuje. Toto číslo srovnejte s energií, kterou vyprodukovala reakce popsaná ve Výfučtení.

2. *Po spotřebování veškerého vodíku dochází ve hvězdách k fúzi vzniklých jader helia, a to podle rovnice*

$$^{3}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{7}\mathrm{Be}\,.$$

Vaším úkolem je zjistit, jaká energie se uvolňuje během této reakce. Také porovnejte uvolněnou energii z reakce s energií uvolněnou sloučením vodíkových jader.

3. *V medicíně využíváme izotop ^{18}F, a to ke zjišťování rozsahu šíření rakoviny v těle. Ten se vyrábí jadernou reakcí*

$$^{18}\mathrm{O} + {}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{18}\mathrm{F} + {}^{1}\mathrm{n}\,.$$

Určete, zda se jedná o reakci energii spotřebovávající, nebo produkující, a případně kolik energie se uvolní nebo kolik energie musíme reakci dodat, aby proběhla.

Potřebné údaje si vyhledejte na internetu, např. v odkazu uvedeném ve Výfučtení.

Nejdůležitější dovedností v této úloze bude počítat klidové energie. K vyjádření energie budeme používat jednotky eV zavedené ve Výfučtení, připomeňme si, že platí:

$$1\,\mathrm{eV} \doteq 1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}\,.$$

Při výpočtech v jaderné fyzice se elektronvolty často používají i při vyjadřování hmotností, neboť vztah mezi hmotností a energií je:

$$m = \frac{E}{c^2}\,.$$

Na základě tohoto vztahu si zadefinujeme jednotku hmotnosti eV/c^2, která nám zajistí, že energie částic bude mít stejnou číselnou hodnotu jako jejich hmotnost. Například elektron s klidovou energií 0,511 MeV má hmotnost:

$$m_e \doteq 0{,}511\,\mathrm{MeV}/c^2\,.$$

K výpočtu energií jednotlivých částic budeme dále potřebovat jejich tzv. *relativní atomovou hmotnost*, kterou vyčteme buď z tabulky uvedené ve Výfučtení[1], nebo v podstatě z kterékoliv chemické periodické tabulky prvků (hmotnosti se mohou v jednotlivých tabulkách nepatrně lišit, proto je třeba výsledky brát s rezervou). V těchto tabulkách je atomová hmotnost vyjádřena v násobcích atomové hmotnostní jednotky, pro kterou platí:

$$1\,\mathrm{u} \doteq 1{,}660\,539 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,,$$

pro další výpočty bude výhodné si ji převést na elektronvolty:

$$1\,\mathrm{u} \doteq \frac{1{,}660\,539 \cdot 10^{-27} \cdot (2{,}997\,925 \cdot 10^{8})^2}{1{,}602\,177 \cdot 10^{-19}}\,\mathrm{eV}/c^2$$

$$1\,\mathrm{u} \doteq 931{,}494\,\mathrm{MeV}/c^2\,.$$

[1] https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/9783527618798.app2

1. Postup výpočtu vyprodukované energie je jednoduchý, stačí si najít v tabulkách relativní atomové hmotnosti jednotlivých částic a vypočítat rozdíl energie před a po reakci:

$$m(^{239}\mathrm{Pu}) \doteq 239{,}052\,163\,\mathrm{u} \qquad m(^{234}\mathrm{U}) \doteq 234{,}040\,946\,\mathrm{u}$$
$$m(^{4}\mathrm{He}) \doteq 4{,}002\,603\,\mathrm{u} \qquad m(^{1}\mathrm{n}) \doteq 1{,}008\,665\,\mathrm{u}$$

Rozdíl energie pak bude:

$$\Delta E_1 = \left(m(^{239}\mathrm{Pu}) + m(^{1}\mathrm{n}) - m(^{234}\mathrm{U}) - m(^{4}\mathrm{He}) - 2\cdot m(^{1}\mathrm{n})\right)c^2$$
$$\Delta E_1 = -5{,}1\cdot 10^{-5}\cdot 931{,}494\,\mathrm{MeV} = -47{,}5\,\mathrm{keV}$$

Stejným způsobem pak vypočítáme i vyprodukovanou energii z reakce ve Výfučtení. Připomeňme si, že tato reakce byla

$$^{235}\mathrm{U} +^{1}\mathrm{n} \longrightarrow^{92}\mathrm{Kr} +^{141}\mathrm{Ba} + 3^{1}\mathrm{n}\,,$$

z čehož dostaneme vyprodukovanou energii:

$$\Delta E_2 = (235{,}043\,923 - 91{,}926\,156 - 140{,}914\,40 - 2\cdot 1{,}008\,665)\cdot 931{,}494\,\mathrm{MeV}$$
$$\Delta E_2 = 173\,\mathrm{MeV}\,.$$

Na střední škole možná někdy uslyšíte, že je energeticky výhodné štěpit prvky těžší než železo a slučovat prvky lehčí než železo. Všimněme si, že i když v první reakci dochází ke štěpení těžkého plutonia, tak na rozdíl od druhé reakce energii spotřebovává. Poučky tohoto typu je tedy vždy třeba brát s rezervou, neboť to, že fungují ve velkém množství případů, neznamená, že mají obecnou platnost.

2. Spočítejme napřed energii uvolněnou slučováním helia:

$$\Delta E_1 = \left(m(^{3}\mathrm{He}) + m(^{4}\mathrm{He}) - m(^{7}\mathrm{Be})\right)c^2$$
$$\Delta E_1 = (3{,}016\,029 + 4{,}002\,603 - 7{,}016\,929)\cdot 931{,}494\,\mathrm{MeV}$$
$$\Delta E_1 = 1{,}59\,\mathrm{MeV}$$

Reakci, při které dochází ke slučování vodíkových jader, si můžeme zjednodušeně (jak se dočtete v poznámce pod tímto příkladem) zapsat následovně:

$$^{1}\mathrm{H} +^{1}\mathrm{H} \longrightarrow^{2}\mathrm{H}\,.$$

Energie uvolněná při této reakci pak bude:

$$\Delta E_2 = (2\cdot 1.007\ 825 - 2.014\ 102)\cdot 931{,}494\,\mathrm{MeV} = 1{,}442\,\mathrm{MeV}\,.$$

Pozornější čtenář si možná všimne několika problémů, které s sebou tento postup nese. Například do rovnice pro výpočet uvolněné energie dosazujeme relativní atomové hmotnosti neutrálních atomů, přitom ve hvězdách spolu naprosto zjevně reagují atomová jádra. Počítejme tedy přesněji – klidovou energii jádra získáme odečtením energie elektronů:

$$E_{\text{jádra}} = E_{\text{neut.atomu}} - N_{\text{elektron}} m_e c^2$$

(správně bychom ještě měli odečíst vazebnou energii mezi protony a elektrony, ale ta je oproti ostatním energiím velmi malá, proto ji zanedbáme). Z periodické tabulky vyčteme, že helium má 2 elektrony a berylium 4. Přesnější rovnice pro uvolněnou energii pak je:

$$\Delta E_1' = \left(m(^3\text{He}) - 2m_e + m(^4\text{He}) - 2m_e - (m(^7\text{Be}) - 4m_e)\right) c^2$$
$$\Delta E_1' = \left(m(^3\text{He}) + m(^4\text{He}) - m(^7\text{Be})\right) c^2 = \Delta E_1$$

Vidíme, že naše rovnice jsou proti této nepřesnosti „imunní“ a žádné chyby jsme se tedy nedopustili. Podívejme se však na rovnici pro slučování vodíků. Tam už nás nezachrání odečtení energie elektronů jako v předchozích příkladech, přesto je číselný výsledek shodou okolností správně, pokud ho interpretujeme vhodným způsobem, jak uvidíme za chvíli.

Podívejme se opět na přesnější verzi naší reakce. Aby rovnice splňovala všechny zákony zachování (jejich podrobnější vysvětlení je bohužel nad rámec tohoto textu), musíme do ní přidat další elementární částice. První z nich je *pozitron*, což je tzv. *antičástice* elektronu. Její vlastnosti (jako např. hmotnost) jsou stejné jako vlastnosti elektronu, až na náboj, který je opačný. Druhou elementární částicí je *neutrino*, které pochází ze stejné rodiny částic (tzv. *leptonů*) jako elektron a pozitron. Náboj neutrina je nulový a jeho hmotnost je v porovnání s hmotnostmi ostatních elementárních částic prakticky nulová, proto neutrino uvádíme pouze pro úplnost, z výpočtů ho můžeme vynechat. Správná rovnice popisující slučování protonů tedy je:

$$p + p \longrightarrow ^2_1 D + e^+ + \nu_e \,,$$

kde p je proton, $^2_1 D$ je jádro deuteria, e^+ je pozitron a ν_e je elektronové neutrino. Hmotnost protonu si najdeme na internetu: $m_p = 938{,}272\,088\,\mathrm{MeV/c^2}$, hmotnost jádra deuteria vypočteme z hmotnosti deuteria odečtením hmotnosti jednoho elektronu, hmotnost pozitronu je stejná jako hmotnost elektronu, tedy $m_e = 0{,}510\,999\,\mathrm{MeV/c^2}$ a hmotnost neutrina je prakticky nulová, proto ji vynecháváme. Pro uvolněnou energii pak dostaneme:

$$\Delta E_2' = \left(2 \cdot m_p - m(^2\text{H}) + m_e - m_e\right)^2$$
$$\Delta E_2' = 0{,}420\,\mathrm{MeV} \,.$$

Uvolněná energie se značně liší od předchozího výsledku, přichází nás tedy zachránit vhodná interpretace. Ta spočívá v tom, že pozitron je antičástice a je to jen otázka času, než se ve Slunci srazí s elektronem (kterých je tam opravdu hodně) a *zanihilují* podle následující rovnice:

$$e^- + e^+ \longrightarrow 2\gamma \,.$$

Jejich veškerá energie se tedy přemění na elektromagnetickou energii (symbol γ představuje vysokoenergetický foton), kterou již můžeme přičíst k energii uvolněné po sloučení dvou protonů. Výsledek pak je:

$$\Delta E_2'' = \Delta E_2' + 2m_e c^2 = 1{,}442\,\mathrm{MeV}$$
$$\Delta E_2'' = \Delta E_2\,.$$

Číselně tedy uvolněná energie sedí s tím, co jsme vypočítali původně, jen ji uvolňuje reakce:

$$p + p + e^- \longrightarrow^2_1 D + \nu_e\,.$$

3. V této reakci je počet protonů a neutronů na obou stranách rovnice stejný, proto se můžeme vyhnout všem dříve zmiňovaným složitostem a spočítat uvolněnou energii klasickým postupem. Napřed si najdeme hmotnosti jednotlivých částic:

$$m(^{18}\mathrm{O}) = 17{,}999\,160\,\mathrm{u} \qquad m(^{1}\mathrm{H}) = 1{,}007\,825\,\mathrm{u}$$
$$m(^{18}\mathrm{F}) = 18{,}000\,938\,\mathrm{u} \qquad m(^{1}\mathrm{n}) = 1{,}008\,665\,\mathrm{u}$$

Rozdíl energie před a po reakci je:

$$\Delta E = \left(m(^{18}\mathrm{O}) + m(^{1}\mathrm{H}) - m(^{18}\mathrm{F}) - m(^{1}\mathrm{n})\right) c^2$$
$$\Delta E = -2{,}44\,\mathrm{MeV}\,.$$

Aby tedy reakce proběhla, musíme dodat energii 2,44 MeV.

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.