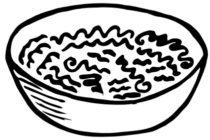
Úloha II.5 ... Lukáš vaří

7 bodů; (chybí statistiky)



Lukáš se rozhodl připravit si k obědu instantní čínskou polévku. Na obalu si přečetl, že obsah pytlíku má vhodit do jednoho litru vařící vody. Naštěstí si ale včas uvědomil, že kdyby na plotnu postavil hrnec s jedním litrem vody, dopustil by se osudové chyby, neboť by vody připravil příliš mnoho. Kvůli teplotní roztažnosti by se totiž objem vody během ohřívání zvětšil, a tak by jí po dosažení teploty $100\,^{\circ}\mathrm{C}$ *bylo více než* $1{,}0\,\mathrm{l}$.

1. *Kolik vody by měl tedy odměřit, aby jí v hrnci po ohřátí byl právě jeden litr, pokud mu z kohoutku teče voda o teplotě* $20\,^{\circ}\mathrm{C}$*? Počítejte s neměnným koeficientem teplotní objemové roztažnosti* $\beta = 190 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$.

2. *Lukáš ale zjistil, že doma bohužel nemá vhodnou odměrku, aby mohl takovéto množství odměřit. Napadlo ho však alternativní řešení. Do hrnce odměří* $1{,}0\,\mathrm{l}$ *vody, následně vodu ohřeje a poté chvilku počká až se přebytečné množství odpaří, aby mu v hrnci zbyl kýžený jeden litr. Jak dlouho od dosažení bodu varu bude muset počkat, než se přebytečné množství odpaří, pokud má jeho sporák výkon* $3{,}0\,\mathrm{kW}$*?*

1. Zahřátí způsobí zvětšení objemu vody – tomuto jevu říkáme objemová teplotní roztažnost a můžeme ho popsat vzorcem
$$\Delta V = V_0 \beta \Delta T\,,$$
kde ΔV je změna objemu z původního objemu V_0 a β je koeficient objemové roztažnosti, který máme zadaný jako $\beta = 190 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ (můžeme najít i v tabulkách). Dále ΔT je změna teploty, která v tomto konkrétním případě činí $\Delta T = 100\,^{\circ}\mathrm{C} - 20\,^{\circ}\mathrm{C} = 80\,^{\circ}\mathrm{C}$. Všimněme si, že když se zde objevuje rozdíl teplot, vůbec nás nemusí trápit, že používáme stupně Celsia místo Kelvinů, protože velikost jednoho dílku obou stupnic je stejná.
Vzorec pro objemovou roztažnost si upravíme, aby se v něm vyskytoval objem po ohřátí, který známe. Činí $V = 1{,}0\,\mathrm{l}$. Nahradíme tedy ΔV rozdílem objemů a získáme
$$V - V_0 = V_0 \beta \Delta T\,.$$
Z tohoto vzorce již snadno dokážeme vyjádřit objem V_0 jen pomocí známých veličin.
$$V - V_0 = V_0 \beta \Delta T \quad \Rightarrow \quad V = V_0(1 + \beta \Delta T) \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{V}{1 + \beta \Delta T}$$
Dosazením zadaných hodnot zjistíme, kolik vody musí Lukáš použít, aby splnil instrukce na obalu:
$$V = \frac{1{,}0\,\mathrm{l}}{1 + 190 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1} \cdot 80\,^{\circ}\mathrm{C}} \doteq 0{,}99\,\mathrm{l}\,.$$
Vidíme, že změna objemu není nijak enormní a zásadní vliv na polévku by nejspíše neměla, chce-li však Lukáš návod striktně dodržet, musí odměřit $0{,}99\,\mathrm{l}$ vody.
2. V tomto případě vyjdeme z rovnice
$$Q = l_\mathrm{v} m_\mathrm{v}\,,$$

která říká, že k odpaření hmotnosti m_v vody, jejíž měrné skupenské teplo varu[1] je $l_\mathrm{v} = 2\,257\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$, je třeba dodat energii Q. Víme, že energie je rovna součinu výkonu a času, můžeme tedy rovnost přepsat a vyjádřit čas t:

$$Pt = l_\mathrm{v} m_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{l_\mathrm{v} m_\mathrm{v}}{P}\,.$$

V tomto okamžiku je důležité si uvědomit, co se vlastně skrývá pod hmotností m_v. Je to hmotnost přebytku vody ΔV, který vznikl rozepnutím vody při ohřevu. Objem ΔV tedy můžeme vyjádřit jako

$$\Delta V = V_0 \beta \Delta T\,,$$

kde V_0 je v tomto případě $1{,}0\,\mathrm{l}$ a ostatní veličiny jsou stejné jako výše. Hmotnost pak dopočteme přes hustotu a objem. Nesmíme však opomenout přepočítat hustotu, protože objem se sice při ohřevu zvětšuje, ale hmotnost zůstává stejná – hustota se tak musí zákonitě měnit.

Když máme na počátku vodu s hustotou ρ_0 o objemu V_0 a hmotnosti m_0, pak po ohřevu o ΔT máme vodu se stejnou hmotností, ale objemem $V = V_0(1 + \beta\Delta T)$. Hustota se tedy změní na hodnotu

$$\rho = \frac{m_0}{V} = \frac{m_0}{V_0(1 + \beta\Delta T)}\,.$$

Abychom se zbavili hmotnosti v čitateli, zapíšeme si ji standardně jako součin původní hustoty a původního objemu. Pak dostaneme vyjádření pro hustotu

$$\rho = \frac{\rho_0 V_0}{V_0(1 + \beta\Delta T)} = \frac{\rho_0}{1 + \beta\Delta T}\,.$$

Když máme vyjádřenou hustotu ρ, můžeme hmotnost m_v napsat jako

$$m_\mathrm{v} = \rho\Delta V = \frac{\rho_0}{1 + \beta\Delta T} \cdot V_0\beta\Delta T$$

a dosadit do vzorce pro čas odpařování. Dostáváme

$$t = \frac{l_\mathrm{v} m_\mathrm{v}}{P} = \frac{l_\mathrm{v}\rho_0 V_0 \beta\Delta T}{P(1 + \beta\Delta T)}\,.$$

Pak už zbývá jen dosadit zadané hodnoty, které ještě musíme převést do základních jednotek, a dostaneme výsledek

$$t = \frac{2\,257 \cdot 10^3\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \cdot 190 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}} \cdot 80\,{}^\circ\mathrm{C}}{3\,000\,\mathrm{W} \cdot (1 + 190 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}} \cdot 80\,{}^\circ\mathrm{C})} \doteq 11\,\mathrm{s}\,.$$

Pakliže Lukáš zvolí tento způsob dosažení potřebného objemu, musí počkat 11 s od dosažení varu. Dodejme, že by kýženého objemu pravděpodobně nedosáhl, neboť vypařování probíhá průběžně, nikoliv pouze striktně od bodu varu. Navíc jsme v celé úloze počítali s konstantním koeficientem roztažnosti, který je ve skutečnosti závislý na teplotě, což je další zjednodušení, které má na naše „malé“ výsledky jistě vliv.

[1] Můžeme najít např. ve fyzikálních tabulkách.

Lukáš Linhart
lukasl@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.