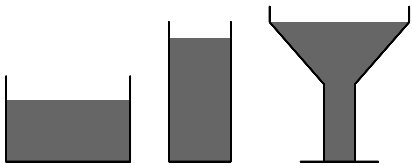
Úloha II.1 ... Rovnovážná

5 bodů; (chybí statistiky)

Na obrázku 1 můžete vidět tři různé nádoby. Která z nich má nejvyšší stabilitu, tedy kterou z nich je nejtěžší převrhnout? Rozměry nádob pro potřeby výpočtu odhadněte. Nádoby jsou osově symetrické, tedy např. první nádoba je válec. Připomínáme, že pro určení stability lze použít např. veličinu stabilita, která je definovaná jako rozdíl potenciální energie labilní a aktuální polohy.



Obr. 1: Vyobrazení nádob

Problém stability nádob naplněných kapalinou je všechno jen ne jednoduchý. Platí to i pro nádoby s dobře matematicky popsatelným tvarem, které se objevily v zadání. Přesto, když se nad ním krátce zamyslíme, dospějeme nejspíš všichni ke správnému výsledku, aniž bychom museli cokoliv počítat. Cílem tedy bude najít rozumný kompromis mezi ničím nepodloženým odhadem a přesným výpočtem stability pro každou z nádob, který by se neobešel bez velmi pokročilé matematiky.

Začněme nastíněním postupu, pomocí kterého by bylo možné stabilitu nádob exaktně spočítat. Pokud jde o první dvě nádoby, museli bychom být schopni spočítat objem libovolného řezu válce a následně určit polohu jeho těžiště. Jako proměnnou bychom si zvolili úhel naklonění kuželu a hledali bychom jeho hodnotu pro případ, kdy by se nádoba nacházela v labilní poloze, tedy pro případ, kdy by se těžiště nacházelo přesně nad bodem, kterým by se nádoba dotýkala země. Podobný princip by byl uplatnitelný i na třetí nádobu, zde by ovšem byly všechny výpočty podstatně komplikovanější. Nakonec bychom spočítali stabilitu jako rozdíl potenciální energie ve výchozí a labilní poloze[1].

Kde je problém? K odvození příslušných vzorců bychom museli umět tzv. integrovat. Navíc jsme zcela zanedbali možnost, že by se nějaká voda mohla z nádoby vylít, což je u všech tří nádob velmi reálný scénář, který by nám řešení opět významně zkomplikoval. Začalo by se totiž měnit množství vody v nádobách a spolu s ním i síla nezbytná pro jejich další naklánění. Potom už bychom do vzorce pro stabilitu nemohli tak snadno dosadit a museli bychom použít další nástroje diferenciálního a integrálního počtu.

Zkusme se tedy nad příkladem zamyslet, aniž bychom chtěli cokoliv počítat. Když se podíváme na první dvě válcové nádoby, můžeme si všimnout, že v druhé je odhadem dvakrát méně vody než v první. Zároveň je zřejmé, že první nádobu budeme muset naklonit minimálně o stejný úhel jako druhou, aby se dostala do labilní polohy. Pokud tedy ve druhém případě budeme působit přibližně poloviční silou po nanejvýš stejně velké dráze, dospějeme k závěru, že na převrhnutí první nádoby bychom museli vykonat asi dvojnásobek práce, a proto je stabilnější než druhá.

[1] Tj. poloze, ze které nádoba každou chvíli spadne.

U poslední nádoby si všimneme například toho, že když ji budeme chtít převrhnout, výška jejího těžiště nad zemí se v průběhu překlápění mění podstatně méně než u nádoby uprostřed (tedy i rozdíl stabilní a labilní energie bude nejspíš malý). Samo o sobě by to jako argument asi nestačilo, ale můžeme svou domněnku podpořit třeba tím, že nádoba napravo má těžiště výš a poloměr podstavy je přibližně poloviční. O moc víc vody než v nádobě uprostřed v ní navíc také určitě nebude.

Na závěr tedy můžeme napsat, že nejstabilnější je nádoba nalevo, následovaná nádobou uprostřed. Nejméně stabilní je nádoba napravo.

Viktor Materna
`materna@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.