Úloha I.V ... Olympiáda

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček sledoval olympiádu a udivovaly ho výkony, které podávali nejrůznější sportovci. Ještě zajímavější mu však připadalo, s jakou jistotou a přesností pracovali rozhodčí a personál zajišťující závody, obzvlášť ve sprintu na sto metrů.

1. *Jeden z běžců uběhl trať o délce* $l = (100 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m}$ *za čas* $t = (10{,}230 \pm 0{,}005)\,\mathrm{s}$*. Jaká byla jeho průměrná rychlost? Uveďte ve správném tvaru se správným počtem platných cifer.*

Výfuček si dále říkal, jaká je škoda, že běžci na sto metrů běží jen jednou. Někomu se totiž může stát, že špatně vystartuje a je pomalejší, někdo může mít příznivý vítr a být tak rychlejší. Řekl si, že kdyby se mělo určit, který ze sprinterů je nejlepší, možná by bylo spravedlivější je měřit vícekrát.

2. *Představte si tedy, že dva běžci běží závod na sto metrů desetkrát za sebou a měříme jejich časy* t *(první běžec) a* T *(druhý běžec). Za pomocí směrodatné odchylky můžeme vypočítat náhodnou nejistotu* $\Delta t_1 = 0{,}05\,\mathrm{s}$*, resp.* $\Delta T_1 = 0{,}5\,\mathrm{s}$*, která zohledňuje, že pokaždé zaběhnou jiný čas. Dále jejich časy měříme přístrojem s přístrojovou chybou* $\Delta t_2 = \Delta T_2 = 0{,}05\,\mathrm{s}$*. Běžci naběhali průměrné časy* $\overline{t} = 10{,}1\,\mathrm{s}$ *a* $\overline{T} = 10{,}2\,\mathrm{s}$*. Spočtěte nejistotu času obou běžců a napište časy závodníků ve správném zápisu. Který ze závodníků by podle vás měl být označen jako lepší běžec?*

1. U výpočtu použijeme poznatky z Výfučtení. Výsledná průměrná rychlost se musí skládat z pravděpodobné hodnoty a její nejistoty. Pravděpodobná hodnota průměrné rychlosti v se vypočte jako podíl pravděpodobných hodnot naměřené délky l a času t.

$$\overline{v} = \frac{\overline{l}}{\overline{t}} = \frac{100}{10{,}230}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 9{,}78\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Hodnotu jsme zaokrouhlili na nejmenší společný počet platných cifer, tedy tři platné číslice. Pro výpočet nejistoty podílu využijeme fakt, že relativní nejistoty se sčítají, dostaneme tak

$$\frac{\sigma_c}{\overline{c}} = \frac{\sigma_a}{\overline{a}} + \frac{\sigma_b}{\overline{b}}\,,$$

kde σ_X je absolutní nejistota veličiny X. Získáme tak výslednou hodnotu nejistoty rychlosti

$$\sigma_v = \overline{v}\left(\frac{\sigma_l}{\overline{l}} + \frac{\sigma_t}{\overline{t}}\right) = 9{,}87\left(\frac{0{,}5}{100} + \frac{0{,}005}{10{,}230}\right)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 0{,}05\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

kterou jsme zaokrouhlili na jednu platnou cifru, což je náhodou stejný počet desetinných míst jako pravděpodobná hodnota. (Pokud by to tak nebylo, museli bychom výslednou rychlost zaokrouhlit na stejný počet desetinných míst jako nejistotu.) Výslednou rychlost zapíšeme ve finálním tvaru

$$v = (9{,}87 \pm 0{,}05)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

2. Z Výfučtení víme, že dvě na sobě nezávislé nejistoty se sčítají ve tvaru $\Delta_c = \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_b^2}$, tudíž nejistoty jednotlivých běžců budou

$$\Delta t_c = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2} = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}05^2}\,\mathrm{s} = 0{,}07\,\mathrm{s}\,,$$
$$\Delta T_c = \sqrt{\Delta T_1^2 + \Delta T_2^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}05^2}\,\mathrm{s} = 0{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

Zapíšeme-li časy ve finálním tvaru, získáme

$$t = (10{,}1 \pm 0{,}07)\,\mathrm{s}\,,$$
$$T = (10{,}2 \pm 0{,}5)\,\mathrm{s}\,.$$

Jaká je tedy interpretace výsledku? První běžec má kratší průměrný čas a menší rozpětí ve svém výkonu, zatímco druhý běžec běží déle, ale má větší výkyvy v zaběhnutém času. Všimněme si, že druhý běžec může potenciálně zaběhnout čas $(10{,}2 - 0{,}5)\,\mathrm{s} = 9{,}7\,\mathrm{s}$, což je rychlejší čas, než ten, který může zaběhnout první běžec.

Máme tedy před sebou dilema: je lepší běžec ten, který konzistentně běží lépe, či ten, který má šanci zaběhnout lepší čas? Kdybychom byli na olympiádě, nemohli bychom říct, který ze dvou běžců zvítězí, pravděpodobně to bude ten první, ale je i nějaká šance, že zvítězí druhý.

Je tedy těžké říci, který z běžců je lepší, a není věcí fyzika, aby to rozhodl. V tomto vzorovém řešení se však přikláníme k tomu, že jako lepšího atleta bychom určili prvního běžce.

Patrik Kašpárek
`patrik@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.