Výfučtení: Stabilita

Úvod

Ať už staví děti hrad z kostek, horolezci se jistí na skalách, či inženýři rýsují nákresy nových staveb, jde jim mnohdy o to samé: aby byl výsledek jejich práce co nejstabilnější. Ve všedním životě procházíme různými budovami, mosty či vyhlídkami a kdykoli na ně vstoupíme, tak máme důvěru, že se pod námi nezbortí. Předpokládáme tedy, že budou stabilní. V čem tato stabilita spočívá? A jak stability můžeme cíleně dosáhnout? Těmito otázkami se budeme ve Výfučtení zabývat.

Skládání sil

Když tzv. vyšetřujeme stabilitu, tak vždy zkoumáme nějaké těleso, u kterého chceme, aby bylo stabilní, což především znamená, že se nebude pohybovat. Co lze z nehybnosti tělesa odvodit? Může nás napadnout, že stabilní těleso se nemůže točit. Tímto tématem se podrobně zabývalo již Výfučtení IX.V Páky a kladky,[1] proto mu zde nebudeme věnovat pozornost. Pokud tedy uvažujeme, že se těleso netočí, stačí vzít na pomoc první Newtonův zákon (zákon setrvačnosti). Ten říká, že pokud na těleso nepůsobí žádná síla nebo je jejich součet nulový, tak těleso zůstává v klidu (to je náš případ), nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Obráceně tedy platí, že pokud těleso stojí, působí na něj síly s nulovou výslednou sílou.

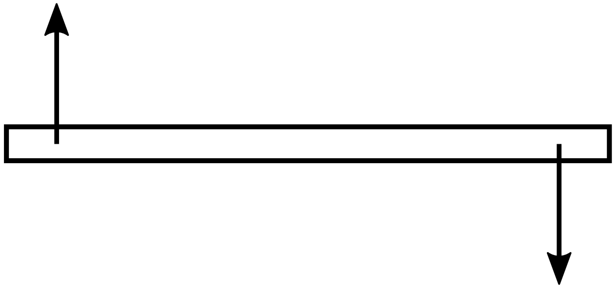
Uveďme si tedy příklad z běžného dne. Pokud stojí hrníček na stole, působí na něj tíhová síla. Hrníček se však nehýbe, to znamená, že je zde ještě jiná síla, která nebyla brána v potaz. A doopravdy, hrníček tlačí na stůl, a stůl tedy tvoří reakci opačného směru (dle zákona akce a reakce), která má stejnou velikost jako síla tíhová. Stejná síla tedy působí dolů i nahoru, ve vektorovém součtu proto dávají nulový výsledek.

Co však dělat, když je sil více a jsou různě orientované? Začněme tím, jestli z nich můžeme dostat jen jedinou sílu, která by nám pomohla zjistit, jestli se těleso hýbe. Pokud nevyloučíme točení, mohla by nastat situace, kdy síly budou těleso jen roztáčet, a ne s ním pohybovat. Součet všech sil by však byl nulový. Pokud ale vyloučíme točení, tak je možné všechny síly sečíst, a tak se dobrat výsledného chování tělesa.

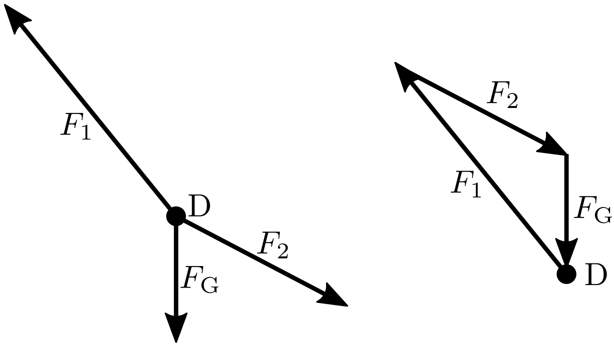
Jak síly sečíst? První variantou je spočítat součet sil pomocí goniometrických funkcí. Druhou možností je vyřešit součet graficky. Grafické řešení umožňuje jednoduše sčítat i velké množství sil. Toto skládání sil je možné díky *principu superpozice*. Začneme tím, že si znázorníme všechny síly jako *orientované úsečky* (úsečky, které někde začínají a někde končí a mají směr, tedy šipky). Síly se poté skládají tak, že se přenesou na konec předchozí síly. Tímto způsobem se všechny seřadí a výsledná síla bude orientovanou úsečkou od počátku první síly po konec poslední síly.

Uveďme si tedy příklad. Pokud pouštíme draka, je nakloněn pod nějakým stálým úhlem. Pro jednoduchost uvažujme, že vítr bude působit kolmo na povrch draka silou F_1. Dále na draka bude působit síla tíhová F_{G} směrem k zemi. Draka na místě držíme pomocí provázku, což je třetí působící síla F_2. Složením těchto sil získáme výslednou sílu, která rozhodne o chování draka.

[1] https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r9/vyfucteni/serial5.pdf



Obr. 1: Dvojice sil působící na tyč



Obr. 2: Skládání sil při pouštění draka

Jelikož je začátek i konec sil na stejném místě, bude velikost nulová. Drak tedy v našem případě zůstane na místě. Pokud bychom složili dvě síly a pak výsledek složili s poslední silou, došli bychom ke stejnému výsledku. Stejně tak by byl výsledek stejný i pro jiné pořadí sil. Zkuste si to.

Těžiště

Ve Výfučtení se budeme zabývat tuhými tělesy, tedy tělesy zachovávajícími si svůj tvar i při působení sebevětších sil. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že hustota je v celém objemu tělesa stejná. Těžiště označuje místo v tělese, kde je působiště tíhové síly Země, jednoduše řečeno bod, který kdybychom podložili, bylo by těleso v rovnováze. Musíme si ale pamatovat, že ne všechny geometrické útvary mají těžiště uvnitř, stačí se podívat na torus, lidsky řečeno donut, či pneumatiku auta.

Pozice těžiště poté vyplývá ze tvaru a hmotnosti objektu a jeho přesnou pozici můžeme určit několika způsoby. Jedná-li se o symetrický objekt, nachází se těžiště v rovině nebo v ose symetrie. U krychle můžeme vzít třeba dvě různé tělesové úhlopříčky, které určují dvě roviny symetrie a jejich průsečík určuje těžiště. U kužele umíme také určit osu symetrie, těžiště se tedy nachází na ní. U nesourodých těles můžeme těžiště určit experimentálně. Zkoumané těleso zavěsíme za libovolný bod a označíme svislou čáru vedoucí ze závěsu, tzv. *těžnici*, vyměníme závěsný bod a průsečíky těžnic určí těžiště tělesa.

Těžiště můžeme zjistit i u soustavy několika těles, známe-li polohy jednotlivých těžišť a hmotnosti objektů. Výsledné těžiště můžeme určit početně podle vzorce

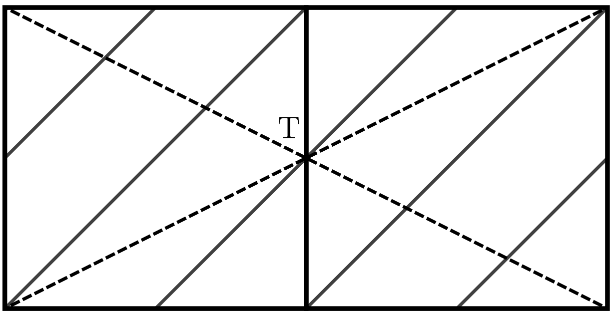
$$T = \frac{m_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot T_2 + \cdots + m_n \cdot T_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} .$$

V tomto vztahu je T buď souřadnice x, y, nebo z těžiště. Dále m_n jsou hmotnosti objektů, ze kterých je naše těleso složeno, a T_n jsou opět souřadnice těchto těles. Rovnice výše jsou tedy vlastně tři rovnice pro souřadnice x, y a z těžiště.

Možná jste si také všimli, že vzorec na výpočet těžiště odpovídá váženému průměru, který se počítá například při průměrování známek. Zde akorát namísto známek počítáme průměr poloh a váha, kterou se násobí známka a představuje její důležitost, je v tomto případě hmotnost.

Společné těžiště dvou těles

Pro získání společného těžiště dvou těles jistě musí existovat nějaká pravidla. Pokusíme se je nyní společně odvodit. Představme si, že máme dvě krychle o stejné hustotě a položíme je těsně vedle sebe. Tím nám vznikl kvádr. Jelikož dokážeme určit těžiště tohoto kvádru i obou krychlí, můžeme zjistit, že těžiště leží na spojnici těchto těžišť, v tomto případě přímo uprostřed.



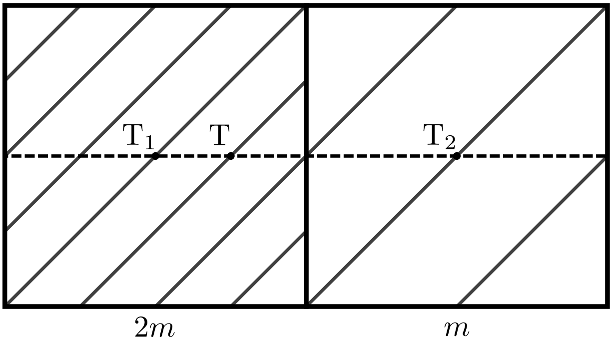
Obr. 3: Společné těžiště dvou krychlí

Pokud bychom si však představili dva kvádry o různých hustotách, tak by se společné těžiště rozhodně nenacházelo uprostřed, ale bylo by blíže těžšímu kvádru. Vzdálenosti mezi výsledným těžištěm a jednotlivými těžišti lze poté popsat jako

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} .$$

Výsledné těžiště tedy bude na spojnici mezi jednotlivými těžišti s poměrem vzdáleností odpovídajícímu převrácenému poměru hmotností.

Pomocí tohoto postupu lze spočítat i těžiště tělesa, které není homogenní, protože si ho můžeme rozdělit na více těles, která již homogenní budou. Pokud se mění hustota spojitě (nikoliv skokově), mohli bychom těleso chtít rozdělit na nekonečně mnoho malých dílků. Museli bychom však použít pokročilejší matematické metody (tzv. integrování), které jsou nad rámec tohoto textu.



Obr. 4: Společné těžiště dvou krychlí o různých hmotnostech

Polohy tělesa

Ze znalosti těžiště můžeme určit, v jak stabilní poloze se těleso nachází. Obecně můžeme určit tři různé polohy – stálou, vratkou a volnou. Ve stálé (stabilní) poloze se nachází bod upevnění nad těžištěm, příkladem této polohy je kyvadlo nebo kulička v misce. Při vychýlení je působením vnější síly vracena do původní stabilní polohy. Potenciální energie je v této pozici nejmenší.

Oproti tomu ve vratké (labilní) pozici se objekt po vychýlení nevrací do původní polohy, ale do nové, nyní už stabilní, polohy. V průběhu přemístění těleso ztrácí potenciální energii. V labilní poloze se nachází těžiště nad bodem upevnění, můžeme si tedy představit kuličku na kopci nebo kyvadlo s pevným závěsem ve vrchní poloze.

Do třetice zbývá pozice volná (indiferentní). V této pozici je těleso upevněno přímo v těžišti. Při vychýlení zůstává potenciální energie konstantní a těleso zůstává v nové, ale pořád indiferentní pozici. Ve volné pozici se nachází například kniha na vodorovném stole.

V reálném životě je rozdělení poloh do jednotlivých skupin složitější. Většinou se díváme na lokální polohy těles. Problematiku si můžeme přiblížit na následujícím příkladu – máme v kuličku v údolí, nachází se tedy v lokální stabilní poloze. Při malém vychýlení se vrátí do původní polohy, ale pokud bychom do kuličky strčili více, přehoupla by se přes hřeben do druhého údolí a skončila by tedy v nové, zase lokální stabilní poloze.

Stabilita

Stabilita označuje práci, kterou musíme vykonat, chceme-li přemístit těleso ze stálé polohy do nejbližší polohy vratké. Vezmeme-li krychli o straně a, můžeme vypočítat její potenciální energii E_{p_1} ve stabilní pozici, kdy leží na straně a těžiště se nachází ve výšce $h = a/2$ nad zemí. Následně vychýlíme krychli do nejbližší vratké polohy – na hranu krychle. Nová poloha těžiště je $h = a\sqrt{2}/2$ a současně se změní i potenciální energie E_{p_2}. Stabilita krychle tedy bude

$$W = E_{\mathrm{p}_2} - E_{\mathrm{p}_1} = mgh' - mgh = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot mga\,.$$

Obecně jsou nejstabilnější pozice ty, které mají těžiště soustavy nejníže. Platí ještě jedno důležité pravidlo stability, a to že těžnice spuštěná svisle dolů musí procházet podstavou. Pokud se rozhodneme postavit most z kostek, musí platit, že jejich společné těžiště musí pořád ležet nad podstavou nebo alespoň na její hraně. Zde se přímo nabízí zmínit šikmou věž v Pise, která je i přes svůj náklon stabilní, jelikož je její těžiště ještě stále nad podstavou.

Nejstabilnější sklenice

Všechny naše nabyté zkušenosti budeme moci zúročit na následujícím příkladu. Máme válcovou sklenici o výšce l, poloměru podstavy r a hmotnosti m. Nás by zajímalo, kolik vody bychom do ní museli nalít, aby byla sklenice co nejstabilnější, tzn. aby měla těžiště co nejníže.

Jako první určíme těžiště prázdné sklenice. Z rotační symetrie sklenice můžeme určit, že těžiště se nachází někde ve svislé přímce procházející středem. Počátek souřadnic si zvolme v levém spodním „rohu“ sklenice. Zvolíme si osy x a z jdoucí v rovině podstavy a osu y jdoucí kolmo na podstavu. Pro x-ovou a z-ovou polohu těžiště tak v naší soustavě platí:

$$T_x = r\,,$$
$$T_z = 0.$$

Nyní se soustřeďme na polohu y těžiště. K jejímu přesnému určení si stačí uvědomit, že jelikož má sklenice všude stejnou plošnou hustotu a tloušťku, budeme moci hmotnost nahradit obsahem jednotlivých částí. Musíme tedy najít společné těžiště obou složek. Sklenici si tedy rozdělíme na podstavu s pláštěm a určíme jejich obsahy.

Ze symetrie vyplývá, že těžiště podstavy bude v jejím středu, a jeho y bude poloha v počátku, tudíž $y_{\text{pod}} = 0$. Tvar podstavy je samozřejmě kruhový o obsahu $S_{\text{pod}} = \pi r^2$. Těžiště pláště bude také ve středu rotační symetrie a v polovině výšky pláště $y_{\text{pl}} = l/2$, pro obsah pláště platí $S_{\text{pl}} = 2\pi r l$. Dostaneme tedy následující rovnici

$$T_y = \frac{m_{\text{pod}} \cdot y_{\text{pod}} + m_{\text{pl}} \cdot y_{\text{pl}}}{m_{\text{pod}} + m_{\text{pl}}} = \frac{S_{\text{pod}} \cdot y_{\text{pod}} + S_{\text{pl}} \cdot y_{\text{pl}}}{S_{\text{pod}} + S_{\text{pl}}} = \frac{\pi r^2 \cdot 0 + 2\pi r l \frac{l}{2}}{\pi r^2 + 2\pi r l} = \frac{l^2}{r + 2l}\,.$$

Jakmile začneme nalévat vodu, těžiště se bude snižovat. Při určité výšce vody se těžiště ocitne v hladině vody a při dalším přilití vody se musí těžiště posunout nahoru, jelikož se část vody ocitá nad ním. Z toho můžeme usoudit, že se těžiště nachází nejníže právě tehdy, když se nachází v hladině vody.

Vyjádřeme polohu y tohoto nového těžiště. Vypočteme ji jako složení dvou těles: sklenice z předchozího výpočtu a vody, která má těžiště v polovině výšky.

$$T'_y = h = \frac{T_y m + \frac{h}{2} m_{\text{v}}}{m + m_{\text{v}}}\,.$$

Hmotnost vody m_{v} určíme z výšky hladiny h, obsahu podstavy $S = \pi \cdot r^2$ a hustoty ρ. Rovnice vede na výsledek

$$h = \frac{T_y m + \frac{h}{2} h S\rho}{m + hS\rho}$$
$$0 = h^2 \frac{S\rho}{2} + hm - T_y m$$
$$h = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 2S\rho m T_y}}{S\rho}\,.$$

Z fyzikálního hlediska dává smysl pouze kladný kořen, pro lepší představu můžeme dosadit orientační hodnoty. Pro sklenici o výšce $l = 10\,\mathrm{cm}$, poloměru $r = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ a hmotnosti $m = 150\,\mathrm{g}$ vychází původní výška těžiště $T_y = \frac{10^2}{4+2\cdot 10}\,\mathrm{cm} \doteq 4{,}2\,\mathrm{cm}$. Po přilití vody se těžiště sníží na hodnotu

$$T_y' = \frac{\sqrt{m^2 + 2\pi r^2 m T_y} - m}{\pi r^2 \rho}$$

$$T_y' = \frac{\sqrt{0{,}15^2 + 2\pi \cdot 0{,}04^2 \cdot 1\,000 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}042} - 0{,}15}{\pi \cdot 0{,}04^2 \cdot 1\,000} = 2{,}8\,\mathrm{cm}\,.$$

Tento výsledek platí, pouze pokud je sklenice v klidu. Kapaliny nejsou tuhé, při působení sil mění svůj tvar a přizpůsobují se tvaru nádoby. Při naklonění se změní poloha těžiště, jelikož voda uvnitř sklenice změní tvar svého objemu.

Shrnutí

V tomto Výfučtení jsme si ukázali hledání těžiště jak u těles homogenních, tak u těles složených, a dokonce i u těles reálných (experimentálně). Dále jsme zjistili, jak skládat síly graficky pomocí přenášení úseček. Důležité jsou i tři různé polohy těles. Ve volné poloze je tělesu jedno, jak ho otáčíme, z vratké polohy se snaží přejít do polohy stálé. Na závěr jsme si ukázali, jaká práce je potřeba na změnu poloh, a vyzkoušeli jsme si i praktický příklad se skleničkou.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.