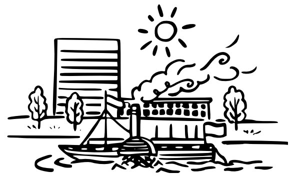
Úloha VI.1 ... Parník

5 bodů; (chybí statistiky)



Organizátoři Výfuku přemýšleli, co si pořídí k výročí 10. ročníku, a napadlo je koupit si parník, aby s ním mohli brázdit Vltavu před budovou Matfyzu v Troji. Aby si jej ale mohli dovolit, potřebují naspořit 6,2 milionu korun. Momentálně mají dohromady pouze 5 milionů. Rozhodli se proto, že si své úspory uloží do banky s výhodným spořicím úrokem 2 % a počkají, až jim díky němu finance narostou.

Určete, za kolik let budou mít organizátoři Výfuku díky bance potřebných 6,2 milionu korun na koupi parníku.

Než se pustíme do řešení úlohy, je důležité si uvědomit několik skutečností. Tou první je, že spořící úrok, díky kterému se množství peněz v bance organizátorům zvyšuje, se počítá každý rok zvlášť. To znamená, že druhý rok se ona dvě procenta počítají již z vyšší částky než v roce předešlém, protože ta vzrostla o úroky právě z předchozího roku. Úloha se nám tak komplikuje – nemůžeme se k řešení dobrat pouze pomocí jedné triviální trojčlenky.

Další uvědomění, které nám při řešení výrazně pomůže, jsou výpočty s procenty. Ty samozřejmě můžeme provádět skrz trojčlenku, to je ale zdlouhavé a pro naše výpočty nepraktické. Jak můžeme jednoduše vyjádřit, že nějaké číslo vzroste o 2 %? Při obvyklé práci s procenty počítáme s tím, že 100 % je jeden celek, tedy číslo 1. Dvě procenta tedy budou ekvivalentní 0,02, pokud tak chceme vyjádřit, že se číslo zvětšilo o 2 % své původní hodnoty, stačí nám vynásobit ho číslem 1,02, které si můžeme představit jako součet původní hodnoty a oněch 2 %.

Nyní se tak nabízí nejjednodušší řešení naší úlohy – budeme původní peněžní částku násobit číslem 1,02, dokud nedojdeme k částce 6,2 milionů. Podaří se nám tak pokaždé přičíst 2 % z původní částky a zároveň zachováme podmínku, že úroky musíme počítat pro každý rok zvlášť. To, kolikrát tuto operaci musíme provést, bude ekvivalentní počtu let, po které jsme úroky museli přičítat. A opravdu, pokud si budeme roky násobit na kalkulačce, zjistíme, že jsme museli původní částku vynásobit jedenáctkrát

$$5 \cdot 1{,}02 \cdot 10^{11} = 6{,}22\,,$$

což je také náš správný výsledek.

Určitě nás při tomto počítání ale napadlo, že musí existovat nějaké elegantnější řešení než klikání do kalkulačky. Navíc, co kdyby organizátoři potřebovali výrazně vyšší částku a my museli do kalkulačky klikat třeba osmdesátkrát? Z tohoto úhlu pohledu se naše řešení zdá opravdu nepraktické. Mohli jsme si také všimnout, že po celou dobu děláme v podstatě stejnou početní operaci – už jen to nasvědčuje tomu, že existuje nějaké přímější řešení.

Přijdeme na něj jednoduše pomocí zmíněné rovnice, a to tak, že si výsledný počet let nahradíme nějakou hledanou neznámou, například

$$5 \cdot 1{,}02^n = 6{,}2\,.$$

Jak ale nyní takovou rovnici řešit? Nejdříve si obě strany vydělíme pěti, dostaneme tak

$$1{,}02^n = 1{,}24\,,$$

což ale stále není rovnice, se kterou bychom se setkali na základní škole. Abychom se totiž dobrali k jejímu řešení, musíme využít už pokročilou středoškolskou matematiku a rovnici „zlogaritmovat“. Tedy na obě strany použít ekvivalentní operaci vložení do funkce logaritmu.[1]

[1] Myslíme dekadický logaritmus, ale fungoval by logaritmus i o jiném základu.

Logaritmus si můžeme zjednodušeně představit jako opačný mechanismus k umocňování. Místo toho, co se stane s číslem, když ho umocníme, se ptáme na to, jakým číslem musíme původní číslo umocnit, abychom dostali výsledné číslo. Když všechna tato „čísla“ převedeme do matematického žargonu, zjistíme, že logaritmus mocniny je násobek exponentu a logaritmu mocněnce. Exponent je v našem případě hledané „n“, mocnina číslo 1,24 a mocněnec číslo 1,02. Když tento vztah zapíšeme rovnicí, zjistíme, že

$$n \cdot \log(1{,}02) = \log(1{,}24)\,,$$

z čehož po úpravách a naklikání do kalkulačky dostaneme

$$n = \frac{\log(1{,}24)}{\log(1{,}02)} = 10{,}86\,,$$

tedy našich 11 let. V tomto případě dává smysl zaokrouhlovat jenom nahoru.

Vidíme tak, že ač můžeme tuto triviální úlohu počítat tzv. iterativně, tedy postupným násobením, existují i elegantnější řešení – v našem případě pomocí využití logaritmů, které jsme měli možnost si díky této úloze alespoň trochu představit.

Karolína Letochová
`kaja@vyfuk.mff.cuni.cz`