Výfučtení: Fraktály

Úvod

Fraktály jsou speciální geometrické útvary, které mají velké množství pozoruhodných vlastností a překvapivě velmi široké uplatnění v přírodě i technice. Na přesné definici fraktálů dodnes nepanuje v matematické komunitě shoda, proto se zde omezíme na základní přehled vlastností, které u daného objektu naznačují, že by mohlo jít o fraktál.

V první řadě se fraktály vyznačují tím, že mají velmi velkou členitost, a to dokonce tak velkou, že jejich obvod (v případě plošných fraktálů), resp. povrch (v případě prostorových fraktálů) roste nade všechny meze, avšak přitom ohraničují zpravidla konečnou plochu, resp. objem. Můžeme si to představit například pomocí mapy nějakého ostrova nebo kontinentu. Pokud budeme mít mapu velkého měřítka a budeme chtít měřit délku pobřeží, naměříme určitou hodnotu. Když si však vezmeme detailnější mapu a budeme opět měřit délku pobřeží, dostaneme výrazně vyšší číslo, protože můžeme započítat i menší nepravidelnosti. Kdybychom pak kolem pobřeží šli např. s GPS lokátorem, byla by námi uražená trasa ještě mnohem větší. Pokud však budeme měřit rozlohu ostrova, bude se naše informace se změnou měřítka zpřesňovat, ale hodnota nijak dramaticky růst nebude.

Další důležitou vlastností fraktálů je *soběpodobnost*. To znamená, že když si část křivky přiblížíme, bude vypadat stejně nebo velmi podobně jako celek, a to při libovolném počtu přiblížení.

Poslední vlastností, kterou zde uvedeme, je fakt, že přestože tvary fraktálů bývají velmi složité, k popisu jejich konstrukce stačí často velmi málo instrukcí, které se poté donekonečna opakují.

Ačkoliv mají fraktály pozoruhodné vlastnosti a široké uplatnění i v přírodě, jedná se o novou oblast matematiky, která se začala rozvíjet až ve 20. století.

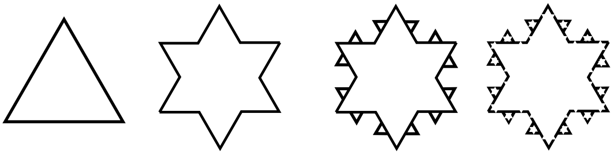
Známé fraktály

Pro lepší představu, jak vlastně takové fraktály vypadají a jak se konstruují, si zde uvedeme několik nejznámějších příkladů v rovině.

Kochova vločka

Nejčastěji uváděným a taktéž na popis nejjednodušším fraktálem je takzvaná *Kochova vločka*. Ta vzniká z rovnostranného trojúhelníku, který je tedy prvním krokem jejího sestrojení. V druhém kroku každou jeho stranu rozdělíme na třetiny a v prostředních třetinách nakreslíme nové rovnostranné trojúhelníky, čímž dostaneme šesticípou hvězdu. V dalším kroku každou z úseček útvaru opět rozdělíme na třetiny a prostřední třetinu nahradíme rovnostranným trojúhelníkem. Tento postup stále opakujeme, až po nekonečném počtu opakování, neboli *iterací*, dostaneme fraktál zvaný Kochova vločka. Postupný vývoj Kochovy vločky můžeme vidět na obrázku 1.

Jak dokážeme, že je Kochova vločka opravdu fraktál? Jelikož základ je rovnostranný trojúhelník a ostatní přidané trojúhelníky jsou vždy menší, můžeme si snadno uvědomit, že celá vločka zůstane uvnitř kružnice opsané původnímu trojúhelníku, tedy má určitě konečný obsah. Délku křivky vyjádříme po jednotlivých krocích a ukážeme si, že se stále rychleji zvětšuje



Obr. 1: Několik prvních iterací Kochovy vločky

a roste nade všechny meze. Všechny tři strany trojúhelníka jsou stejné, tedy bude stačit, když budeme počítat pouze s jednou, o které řekneme, že na počátku měla délku 1. Po prvním kroku nahradíme prostřední třetinu rovnostranným trojúhelníkem, strana tedy bude mít délku 4/3. Po druhém kroku, kdy trojúhelník přidáme do každé ze čtyř úseček, se každá z nich prodlouží na 4/3 své délky, délka strany bude $(4/3)^2$. Když budeme pokračovat třetím krokem, bude délka $(4/3)^3$ a obecně po n krocích bude $(4/3)^n$. Tento výraz vskutku roste nade všechny meze. Pokud by totiž někdo tvrdil, že existuje nějaká délka l, která je větší než délka strany Kochovy vločky, tak bychom určitě našli n, kde $(4/3)^n > l$. To můžeme provést pro každé l, tedy délka skutečně roste nade všechny meze.

Sierpińského kobereček

Sierpińského kobereček vzniká z čtverce, který v každém kroku rozdělíme na devět menších čtverečků a prostřední čtvereček vyjmeme. Po nekonečném opakování dostáváme fraktální obrazec jako na obrázku 2.

Obr. 2: Několik prvních iterací Sierpińského koberečku

Podobným způsobem lze rovněž zkonstruovat tzv. Sierpińského trojúhelník, kdy rovnostranný trojúhelník rozdělíme na čtyři a prostřední vyjmeme. U čtvercového koberečku i trojúhelníku se můžeme rovněž snadno přesvědčit, že mají konečný obsah (vždy menší než obsah původního útvaru), ale jejich obvod roste nade všechny meze.

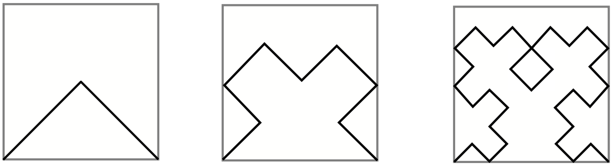
Cantorovo diskontinuum

Cantorovo diskontinuum,[1] nebo též Cantorova množina, je příkladem fraktálního útvaru na úsečce. Zkonstruujeme ho tak, že úsečku rozdělíme na třetiny a prostřední třetinu vyjmeme a toto opakujeme pořád dokola. Výsledkem je množina spojená z nekonečně mnoha izolovaných bodů.[2] Zároveň ale budeme-li chtít spočítat délku Cantorovy množiny pomocí sečtení délek vyjmutých úseček, dostaneme překvapivý výsledek: vyjmuli jsme celou úsečku. Délka Cantorovy množiny je tedy nula.

[1] Diskontinuita znamená nespojitost, neboli jednoduše řečeno: mezi každými dvěma body je mezera.
[2] Dokonce nespočetně mnoho, tedy kdybychom si je chtěli očíslovat přirozenými čísly, tak se nám to nepodaří.

Hilbertova křivka

Hilbertova křivka je jednou z nejpodivnějších křivek – ačkoliv je to křivka, pokrývá celou rovinu. K její konstrukci vezmeme čtverec, ve kterém bude nakreslená čára ve tvaru písmene V spojující dva sousední rohy. V každém kroku pak čtverec rozdělíme na čtyři menší čtverečky a křivku změníme tak, aby v každém z nich byla písmenem „V“ spojujícím dva sousední rohy. Postup konstrukce je ilustrován na obrázku 3.



Obr. 3: Několik prvních iterací Hilbertovy křivky

Když takto budeme pokračovat dál a dál, bude se křivka ve čtverci zahušťovat, až nakonec pokryje celý jeho obsah, tedy bude procházet každým bodem čtverce. Povedlo se nám tedy z jednorozměrné křivky vytvořit dvojrozměrný čtverec!

Mandelbrotova množina

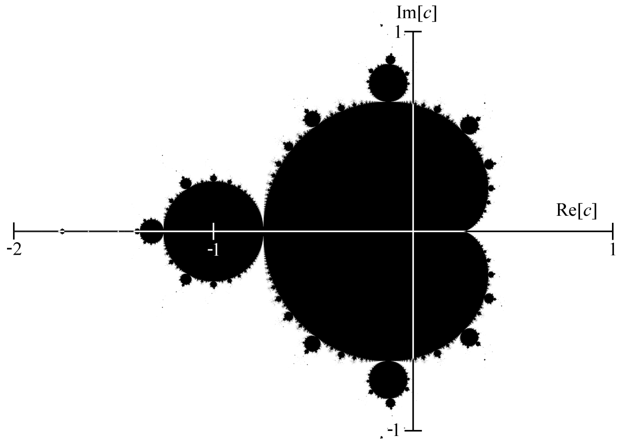
Poslední fraktál, který zde zmíníme, je velmi známá takzvaná Mandelbrotova množina. U její konstrukce nejde o opakování geometrické operace, nýbrž operace aritmetické, a to postupné umocňování a přičítání čísel. Nejedná se však o obyčejná reálná čísla, ale o takzvaná čísla *komplexní*. Tato čísla mají dvě složky (odtud komplexní), a tedy se místo číselné osy dají znázornit na celou rovinu. Skupina čísel s určitou vlastností tak může vytvořit 2D fraktální útvar. Úplné osvětlení komplexních čísel je bohužel nad rámec tohoto textu. Jak tato množina vypadá, můžete zjistit na obrázku č. 4

Fraktální dimenze

Pro fraktály zavedl matematik Felix Hausdorff speciální *fraktální dimenzi*, která na rozdíl od klasické prostorové dimenze, kterou někdy matematici nazývají *topologickou dimenzí*, nemusí být celočíselná. Nyní se na rozdíl těchto dvou definic podíváme podrobněji.

Topologická dimenze útvaru nám říká, kolik údajů potřebujeme k určení konkrétního bodu na daném útvaru. Když máme bod na úsečce, stačí nám k jeho určení jedna hodnota, například vzdálenost od zvoleného počátku. Topologická dimenze úsečky je tedy 1. Když vezmeme čtverec, potřebujeme k popisu každého bodu dvě čísla, například jeho souřadnice x a y nebo jeho vzdálenost od počátku a úhel od osy x. Čtverec má tedy topologickou dimenzi 2. Pro bod na krychli pak již musíme použít k popisu čísla tři, topologická dimenze krychle je tedy 3. Můžeme si snadno rozmyslet, že topologická dimenze bude vždy celočíselná (nemůžeme potřebovat půlku čísla).

Fraktální dimenze naproti tomu porovnává, kolikrát se zvětší velikost útvaru při daném zvětšení základní jednotky. Konkrétně pro zvětšení základního rozměru $k$krát se útvar zvětší Nkrát



Obr. 4: Mandelbrotova množina

(původní útvar se do nového vejde Nkrát) a pro fraktální dimenzi d platí[3]

$$N = k^d\,.$$

Tato chytrá definice umožňuje, že pro nám známé útvary, např. úsečku, čtverec a krychli (mimo fraktálů), se jejich topologická dimenze rovná té fraktální a je i hezky celočíselná.

Vyzkoušejme si uvedenou definici u nejjednodušších útvarů, které fraktály nejsou, a tudíž budou mít celočíselnou dimenzi. Příklad zvětšování úsečky je triviální: když úsečku zvětšíme (prodloužíme) dvakrát, ta původní se do nové vejde rovněž dvakrát. To znamená, že pro úsečku platí $d = 1$, aby $N = k$. To také odpovídá tomu, co o úsečce říkáme topologicky, tj. že jde o „jednorozměrný“ útvar (jediným číslem, např. vzdáleností od počátku, můžeme určit polohu na ní). Naproti tomu pokud u čtverce zvětšíme základní jednotku (stranu) dvakrát, zvětší se celý čtverec co do obsahu čtyřikrát. Pro jeho dimenzi tedy bude platit $4 = 2^d$ a fraktální dimenze čtverce je $d = 2$. Obdobně když stranu krychle zvětšíme dvakrát, zvětší se jeho objem osmkrát, tedy pro dimenzi platí $8 = 2^d$, z čehož dostáváme fraktální dimenzi krychle $d = 3$.

Zkuste sami přijít na to, že obě definice dimenze dávají stejné výsledky i v případě obdélníků, trojúhelníků, nebo třeba i kruhů (nejen kružnic!). U fraktálů ale, jak si později ukážeme, se fraktální dimenze té topologické rovnat nemusí, čímž získáme nový způsob, jak právě fraktály porovnávat.

Matematická odbočka – exponenciály a logaritmy

Abychom mohli snadno počítat dimenze fraktálů, bude dobré si zavést několik nových matematických pojmů, díky kterým můžeme porozumět postupu nalézání d pro libovolné N a k.

[3] Tedy (jak se to občas v matematice dělá) d zde nepřímo definujeme, jako „tu veličinu, která splňuje danou rovnici,“ namísto abychom řekli přímou definici ve tvaru: „d je taková, veličina, která se rovná…“ I přesto, že druhý způsob technicky možný je, v tomto případě se nám více hodí nový pojem zavést takto. Při pozdějším studiu matematiky narazíte na tento přístup k definicím často.

Obecně zapsaný výraz a^x zde pro celočíselná x znamená, že a vynásobíme $x$krát mezi sebou. Nemusíme se však omezovat jen na celá x, pokud je x racionální (tedy zlomek), můžeme a^x vyjádřit pomocí mocnin a odmocnin. Konkrétně pro $x = p/q$ dostaneme

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}\,.$$

K rozšíření na libovolná reálná čísla pak využijeme *exponenciální funkci*, kdy výraz a^x nazýváme exponenciálou se základem a. Inverzní funkce k exponenciále se nazývá logaritmus, který můžeme definovat vztahem

$$a^x = b \quad \Rightarrow \quad x = \log_a b\,,$$

kde $\log_a b$ nazýváme logaritmem z b se základem a. Protože pro výpočet logaritmu s libovolným základem nemáme na kalkulačce tlačítko, používáme k jeho výpočtu vztah

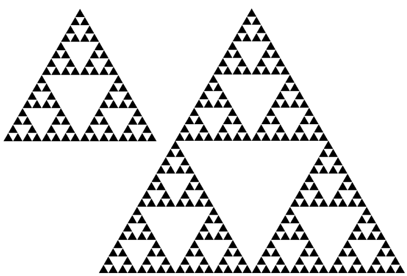
$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}\,.$$

Více se o exponenciálách a logaritmech můžete dozvědět například ve Výfučtení ze třetího ročníku.[4]

Výpočet dimenze některých fraktálů

Předtím než vypočteme fraktální dimenzi jakéhokoli fraktálu, si musíme uvědomit, že v některých případech mluvíme o útvarech tvořených např. nekonečně dlouhými lomenými čarami (třeba Kochova vločka, či Hilbertova křivka výše). Není jednoduché půlit či dělit nekonečna, a proto si musíme lépe ukázat, co vlastně znamená „zvětšení fraktálu“, abychom i v tomto případě rozuměli písmenu N v definici fraktální dimenze.

O fraktálu říkáme, že se Nkrát zvětší při $k$násobném zvětšení základního rozměru, pokud můžeme nějaký útvar (libovolně zvolený úsek fraktálu v jeho konečné podobě) nalézt Nkrát *v něm samém* po zvětšení. Ukažme si to na příkladu Sierpińského trojúhelníku na obrázku 5. Ať už jej chápeme jako jednorozměrnou lomenou čáru, či jako plošný obrazec s velkým obvodem, stále platí, že při dvojnásobném zvětšení jeho základního rozměru (např. strany největšího trojúhelníku) obrazec není zdvojnásoben, nýbrž *ztrojnásoben*. Je vidět, že původní fraktál se ve zvětšeném nachází třikrát. Veličina N je pak rovna 3, zatímco $k = 2$.



Obr. 5: Sierpińského trojúhelník a jeho dvojnásobné zvětšení

[4] `https://vyfuk.mff.cuni.cz/_media/ulohy/r3/vyfucteni/vyfucteni_5.pdf`

Podívejme se na Kochovu vločku a opět studujme jen jednu stranu. Když stranu zvětšíme třikrát ($k = 3$), tak se se zvětší délka strany čtyřikrát. Zvětšená strana se totiž skládá ze čtyř segmentů, které jsou kopie předchozí, nezvětšené strany. Tedy máme $N = 4$. Pro dimenzi tedy platí:

$$4 = 3^d \quad \Rightarrow \quad d = \log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} \doteq 1{,}26\,.$$

Kochova vločka má tedy neceločíselnou Hausdorffovu dimenzi.

Navíc při posuzování zvětšení fraktálů je důležité nezapomenout na fakt, že uvedené neplatí pro dílčí kroky, které k fraktálu vedou! Podívejme se proto zpět například na obrázek 1. Je sice pravda, že v prvním kroku Kochovy vločky se základní úsečka útvaru v jedné straně hvězdy vyskytuje čtyřikrát, i když strana je třikrát větší, avšak nemůžeme tvrdit, že při zvětšení této hvězdy třikrát by se délka čáry zvětšila *čtyřikrát*. Už jsme si ukázali, že pro základní obrazce (a zmíněná hvězda je právě složena pouze z konečného množství částí trojúhelníků) je Hausdorffova dimenze 1, a tedy při trojnásobném zvětšení se délka čáry rovněž *jen ztrojnásobí*.

Vraťme se k dalším příkladům fraktálů. Sierpińského koberec se při zvětšení základního rozměru třikrát zvětší osmkrát (zvětšený koberec pojme 8 původních), a pro jeho dimenzi tedy dostáváme

$$8 = 3^d \quad \Rightarrow \quad d = \log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 3} \doteq 1{,}89\,.$$

Mohlo by se tak zdát, že fraktál poznáme tím, že jeho Hausdorffova dimenze je neceločíselná. To však nemusí být pravda, jak se přesvědčíme u Hilbertovy křivky. Když totiž u ní zvětšíme délku strany čtverce dvakrát, zvětší se délka křivky čtyřikrát (opět: délka sice není konečná, ale lze vidět, že křivku tvoří čtyři shodné menší, jí podobné), tedy pro dimenzi platí:

$$4 = 2^d \quad \Rightarrow \quad d = \log_2 4 = \frac{\log 4}{\log 2} = 2\,.$$

Hilbertova křivka má tedy Hausdorffovu dimenzi celočíselnou a rovnou dvěma, ačkoliv její topologická dimenze je určitě jedna.Tím se dostáváme k další možné definici fraktálů, a to že *fraktály jsou takové útvary, které mají Hausdorffovu dimenzi ostře větší*[5] *než topologickou.*

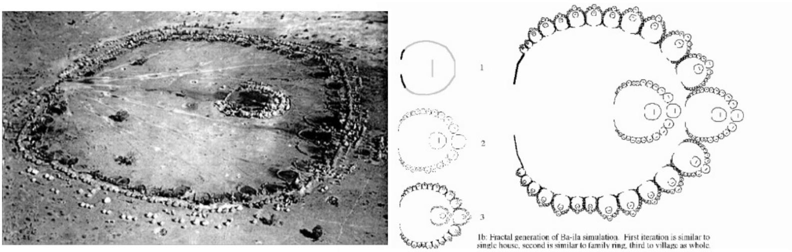
Fraktály v kultuře

Již jsme zmínili, že odborným studiem fraktálů se lidé poprvé zabývali až v 19. a 20. století. Předměty s fraktální strukturou se však v naší kultuře objevovaly mnohem dříve. Už středověké obrazce, pocházející nejčastěji z islámské kultury, vykazovaly jisté známky soběpodobnosti. Dále hrály fraktály významnou roli v africké architektuře.

Na obrázku 6 můžeme vidět vesnici Ba-ila v Zambii. Každý dům v této vesnici má tvar prstence s posvátným oltářem uprostřed. Domy v rámci jedné rodiny jsou opět uspořádány do prstence a tyto rodinné prstence jsou všechny seřazeny do velkého prstence tvořícího celou vesnici tak, že větší rodiny jsou umístěny blíže ke středu. Uprostřed vesnice se nachází největší prstenec, prstenec domů náčelníkovy rodiny. Ten leží na stejném místě jako oltář v samostatných domech, celá vesnice potom z dálky vypadá stejně jako jednotlivé domy. Vykazuje tedy, stejně jako fraktály, nezávislost na měřítku.

[5] V matematice slovem „ostře“ obvykle zdůrazňujeme fakt, že jedna veličina má hodnotu větší než jiná, ale nikdy ne rovnou, tedy že jediný vhodný symbol pro tuto relaci je $>$ a nikoli $\geq$.

Africká architektura není jediná, která využila fraktálů. Mnoho velkých měst bylo navrhnuto podle následujícího vzorce: celé město bylo rozděleno do čtverců, přičemž na hranách těchto čtverců se nacházely ty největší pozemní komunikace. Tyto čtverce byly dále rozděleny do menší čtverců opět s menšími komunikacemi a takto dělení pokračovalo až do bloků jednotlivých domů ohraničených obytnými zónami.



Obr. 6: Vesnička Ba-ila a její fraktální model

Fraktály v přírodě

Kromě lidí si i příroda všimla, že fraktální struktura je často velmi výhodná. Pokud jste se například někdy z dálky podívali na list kapradiny, tak jste si všimli, že je složen z menších uspořádaných listů. Při pohledu zblízka jsou i tyto menší listy složeny ze stejně uspořádaných ještě menších lístků. List kapradiny je tedy v podstatě složen z menších listů kapradiny.

Kapradina samozřejmě není jediná rostlina vykazující známky soběpodobnosti. Kmeny stromů se rozdělují na větve a každá větev se poté dále dělí na menší větve, které vypadají podobně jako větší větve a nebo občas i jako celý kmen. Dále všichni známe brokolici, která se větví do menších brokolic, ale asi nejzajímavější ze všech je druh květáku nazývaný *romanesco*, který můžete vidět na obrázku 7.

Obr. 7: Romanesco je zelenina podobná květáku a brokolici se zřetelnou fraktální strukturou

Fraktály ve fyzice

S jevy vykazujícími fraktální charakteristiky se i ve fyzice můžeme setkat poměrně často, ty nejznámější si stručně popíšeme v následujících kapitolách. Ještě před tím by ale bylo vhodné zmínit, k čemu nám je tato informace dobrá. Jde o to, že když chceme studovat vlastnosti nějakého reálného systému, tak jsou ve většině případů výpočty příliš komplikované na to, abychom je mohli provést tužkou na papíře. Proto se takovéto systémy modelují pomocí počítačových simulací, které však také mohou být velmi komplikované. Když se tedy podaří zjistit, že nějaký jev vykazuje fraktální strukturu, můžeme pro jeho modelování využít fraktální geometrii, což je výhodné, neboť, jak jsme již řekli, i přes jejich komplikovanou strukturu lze fraktály často popsat pomocí jednoduchých rovnic.

Fázové přechody

Příkladem fyzikálních jevů, při kterých se můžeme setkat s fraktální strukturou látky, jsou takzvané *fázové přechody*. Pojem fázový přechod v termodynamice označuje změnu makroskopických vlastností nějakého systému. Dobrým příkladem fázového přechodu je například změna skupenství. Víme, že látka je složená z atomů nebo molekul, které se neustále chaoticky pohybují, energie tohoto pohybu pak určuje termodynamickou teplotu látky. Při nižších rychlostech jsou částice navzájem drženy pohromadě v důsledku vzájemných vazeb a pohyb částic spočívá buď v kmitání kolem jejich rovnovážné polohy (pevné látky) nebo i v pohybu vzájemných rovnovážných poloh (kapaliny). Při ještě vyšších rychlostech se částice od sebe vzdálí dost daleko na to, aby unikly působení přitažlivých sil a interagují spolu pouze prostřednictvím srážek (plyny). Je důležité si uvědomit, že se všechny částice rozhodně nepohybují stejnou rychlostí. Kdybychom se zaměřili na jednu konkrétní molekulu, tak nemůžeme předpovědět, jakou bude mít rychlost. Víme jen to, kolik molekul se pohybuje přibližně nějakou konkrétní rychlostí. Proto když se teplota látky blíží k bodu, kdy dochází ke změně skupenství, například z pevného na kapalné, jen část částic se pohybuje dost rychle na to, aby se uvolnila ze svojí pevné polohy a stala se kapalinou. Celá látka se potom rozdělí na oblasti v pevném a kapalném skupenství a tyto oblasti vykazují fraktální strukturu. Při přeměně v opačném směru ze skupenství kapalného na pevné toto můžeme dobře pozorovat například u sněhových vloček.

Další fázový přechod, který zde zmíníme, je z oblasti magnetismu. Látky můžeme z hlediska jejich chování ve vnějším magnetickém poli rozdělit do tří základních skupin: *diamagnetické*, *paramagnetické* a *feromagnetické*. Původ jejich odlišného chování musíme hledat na molekulární úrovni, neboť částice paramagnetik a feromagnetik se na rozdíl od diamagnetik chovají jako malé magnety. Ty jsou buď zcela náhodně orientovány (paramagnetika) nebo díky krystalické struktuře látky vznikají větší shluky stejně orientovaných částic, tzv. *domény*, které jsou vůči sobě opět náhodně orientovány, proto se v obou případech výsledné magnetické pole vyruší. Poté co však takovouto látku vložíme do vnějšího magnetického pole, elementární magnety se přeorientují do stejného směru a kolem látky se vytvoří nové magnetické pole, které je u feromagnetik zpravidla silnější.

Při zahřátí feromagnetika na určitou teplotu, tzv. *Curieův bod*, dojde k porušení krystalické mřížky a z feromagnetické látky se postupně stane paramagnetická. Tento fázový přechod podobně jako změna skupenství nenastává okamžitě a při Curieově teplotě mají domény opět fraktální strukturu.

Difuze a blesky

Difuze je zjednodušeně řečeno jev, při kterém částice jedné látky v důsledku svého chaotického pohybu postupně přemísťují z oblastí s vyšší koncentrací do oblastí s nižší koncentrací, například při promíchávání dvou látek. Blesky asi všichni známe. Tyto dva jevy mají společnou jednu vlastnost, oba jdou dobře modelovat pomocí takzvaných *větévkatých fraktálů*. Vznik větévkatého fraktálu si můžeme popsat např. na blesku. Elektrický výboj se totiž z mraku k zemi pohybuje po přibližně 50metrových krocích. Po každém kroku se může změnit jeho směr, nebo se i rozdělit na více větví. Tento postup se mnohokrát opakuje a výsledkem je rozvětvená struktura blesku, přičemž jednotlivé větve jsou často soběpodobné.

Difuzi si můžeme představit podobným způsobem. Jednotlivé částice se vždy pohybují nějakým směrem a po určité době dojde ke srážce s jinými částicemi, což způsobí vychýlení z původního směru. Pohyb částic potom opět získá větévkovou strukturu.

Závěr

Jak jste si mohli všimnout, fraktály jsou skutečně velké a všeprostupující téma. Doufáme, že vás neodradí poněkud vyšší matematická náročnost jejich zkoumání a podobně jako my nepřestanete žasnout nad širokou škálou jejich výskytu a překvapivou „matematičností“ přírody. Až příště půjdete do lesa, zkuste najít co nejvíce přírodních fraktálů.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.