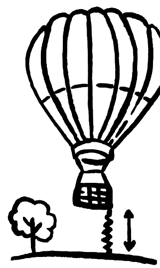
Úloha II.5 ... Výlet balónem

7 bodů; (chybí statistiky)



Přátelé Výfuku se jali létat balónem. Avšak báli se, že uletí a dojde jim kyslík, a proto přivázali balón na pružinu, která byla pevně spojena se zemí, a začali kmitat. Nenatažená pružina měla délku $l_0 = 150\,\mathrm{m}$ a nejvýše nad povrchem Země byli ve výšce $h = 160\,\mathrm{m}$. Balón, naplněn vzduchem o hustotě $\rho = 0{,}90\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, měl objem $V = 2\,500\,\mathrm{m^3}$. Hmotnost balónu a lidí v něm byla $m = 800\,\mathrm{kg}$. Běžná hustota vzduchu za normálního tlaku a teploty je $\rho_0 = 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

1. *Jak velkou vztlakovou silou byl balón nadnášen?*
2. *Jakou celkovou silou F balón natahuje pružinu, je-li ve výšce l_0?*
3. *Pokuste se určit tuhost použité pružiny. Napovíme vám, že pro tuhost pružiny k platí:*

$$F = k\Delta l = k(l - l_0)\,,$$

kde F je síla, která natahuje pružinu, l je délka natažené pružiny a l_0 je délka pružiny v klidu.

4. *S jakou frekvencí balón kmitá? Pro frekvenci kmitavého pohybu platí:*

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{F}}\,,$$

přičemž k vyjadřuje tuhost pružiny, g tíhové zrychlení a F je síla natahující pružinu.

1. Z Archimédova zákona víme, že pro vztlakovou sílu platí

$$F_{\mathrm{vz}} = V\rho_0 g\,,$$

kde ρ_0 je hustota kapaliny, v našem případě vzduchu, ve kterém je těleso o objemu V ponořeno, a aby vše fungovalo, musí se ještě kapalina nacházet v tíhovém poli se zrychlením g. Po dosazení hodnot ze zadaní do našeho vztahu pro vztlakovou sílu dostaneme, že její velikost je

$$F_{\mathrm{vz}} = 31{,}6\,\mathrm{kN}\,.$$

2. Na balón působí dvě síly – vztlaková a tíhová, navíc každá opačným směrem. Výslednice těchto sil tedy bude dána rozdílem jejich velikostí, přičemž velikost tíhové síly F_{g} ještě musíme určit. Víme, že hmotnost balónu a lidí je celkově m, nesmíme však zapomenout na vzduch uvnitř balónu, který vzhledem k obejmu balónu rozhodně není zanedbatelný. Celková hmotnost a tíhová síla působící na balón tedy je

$$M = m + \rho V\,,$$
$$F_{\mathrm{g}} = (m + \rho V)\,g\,.$$

Nyní už známe vše, co potřebujeme, proto můžeme spočítat celkovou sílu působící na balón ve výšce l_0:

$$F = F_{\mathrm{vz}} - F_{\mathrm{g}}\,,$$
$$F = Vg\left(\rho_0 - \rho - \frac{m}{V}\right) \doteq 1\,720\,\mathrm{N}\,.$$

3. Ve výšce l_0 působí na náš balón pouze síla F. Jakmile však balón začne stoupat, pružina se bude natahovat a proti tomuto natažení začne působit silou

$$F' = k\Delta l\,.$$

Tato síla v průběhu stoupání balónu bezpochyby roste a v okamžiku, kdy bude balón zrovna ve výšce h, se velikost síly F' vyrovná s F a balón dosáhne rovnovážné polohy. Z této rovnováhy můžeme spočítat tuhost pružiny k jako

$$F = k(h - l_0)\,,$$
$$k = \frac{Vg}{h - l_0}\cdot\left(\rho_0 - \rho - \frac{m}{V}\right) = 172\,\mathrm{N{\cdot}m}\,.$$

4. Abychom mohli použít vzorec ze zadání, musíme se zamyslet nad tím, jaká síla natahuje pružinu. V předchozím úkolu jsme řekli, že v nové výšce h se balón ustálí v rovnováze. To je vskutku tak, neboť součet tíhové síly, síly pružiny a vztlakové síly je roven nule. Pružina se tedy nachází v nové rovnovážné poloze h.

   Pohyb pružiny tedy ovlivňuje jen setrvačná hmotnost balónu $F_{\mathrm{g}}/g = m$. Frekvence je tak rovna

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \rho V}} = 0{,}037\,8\,\mathrm{Hz}\,.$$

Jiří Kohl
jirkak@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.