FYKOS – Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://vyfuk.fykos.cz
e-mail pro řešení: vyfuk-reseni@fykos.cz
e-mail: vyfuk@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

VÝpočty Fyzikálních ÚKolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ   ročník 1±1   číslo 6/7

Úvodem

Milé řešitelky a milí řešitelé,

školní rok se pomalu chýlí ke konci a s ním i letošní ročník našeho semináře. Dostává se vám do rukou zadání poslední série Výfuku před prázdninami a s ní i poslední možnost vylepšit si pilným řešením své umístění ve výsledkové listině, a tedy i šance vybrat si některou z věcných cen, které pro vás máme připravené.

Mnozí z vás nám neposlali dotazník, kde by potvrdili nebo vyvrátili účast na letním táboře, který se bude konat 29. června až 8. července 2012. **Pokud je to i váš případ** (poznáte to tak, že vám znovu přišel v obálce), prosím, **dejte nám co nejdříve vědět, zda se chcete tábora zúčastnit**, zbývá ještě několik volných míst. Stačí, když nám napíšete e-mail na adresu vyfuk@fykos.cz nebo to uvedete ve webové verzi dotazníčku.[1]

Pokud vám dotazník přišel znovu a máte za to, že jste ho už posílali, napište nám také na uvedený e-mail. Je možné, že došlo k nějaké technické chybě nebo jste jej třeba zapomněli podepsat.

Těm, kteří svou účast na táboře potvrdili, přijdou na začátku června samostatně materiály s dalšími informacemi.

Těšíme se na setkání s vámi!

Organizátoři

Zadání VI. série

Termín uploadu: 12. června 2012 20.00
Termín odeslání: 8. června 2012

Úloha VI.1 ... Bazén   2 body

Dva plavci – Karel a Petr – trénují na sousedních drahách bazénu. Odstartují ve stejný okamžik a oba plavou rychlostí konstantní velikosti. Karel je lepší plavec, proto předežene Petra, doplave na konec dráhy a vrací se zpět. Na zpáteční cestě potká Petra právě 5 metrů od konce dráhy, plave dál, doplave na místo startu, otočí se a plave opět zpátky. Přitom potká Petra ve vzdálenosti od místa startu rovné jedné pětině délky bazénu. Jak dlouhý je bazén? Předpokládejte, že se oba plavci pohybují stále rychlostí konstantní velikosti (zanedbejte tedy změny velikosti rychlosti při otočkách).

[1] Webový dotazníček naleznete na http://vyfuk.fykos.cz/dotaznicek.

Úloha VI.2 ... Elektrárny 3 body

Franta z rána brouzdal internetem.

Našel, že uhelná elektrárna Prunéřov má ve výrobní jednotce Prunéřov I maximální výkon čtyřikrát 110 MW a novější výrobní jednotka Prunéřov II má výkon pětkrát 210 MW.

V třífázových transformátorech 13,8/121 kV a 13,8/420 kV je energie transformována s účinností 98 %.

Tato energie je pomocí rozvodné sítě dopravována až do oblastní rozvodny, kde je napětí snižováno na 22 kV s účinností 95 %.

Franta má v domě, kde bydlí, v síti napětí 230 V. Tak ještě našel (na internetu a taky když vyhlédl z okna) potřebný transformátor, který má účinnost asi 92 %.

Frantova trouba má příkon 2 kW. Jak dlouho vyráběla elektrárna potřebnou elektrickou energii na upečení nedělní husy, když husu Franta pekl 47 minut? Předpokládáme, že elektrárna pracovala na 70 % svého maximálního výkonu. Trouba nehřeje pořád (udržuje určitou teplotu), a proto „spotřebovává“ energii jen z 35 % doby pečení.

Úloha VI.3 ... kosmická stanice 4 body

Odhadněte, jakou minimální energii musíme dodat kosmické stanici, abychom ji dostali na oběžnou dráhu. Můžete pracovat s hodnotami pro mezinárodní kosmickou stanici ISS, která obíhá Zemi ve výšce cca $h = 350\,\mathrm{km}$ a má celkovou hmotnost přibližně $m = 450\,\mathrm{tun}$. Vysvětlete, proč je odhad minimální a vyjmenujte alespoň některé fyzikální skutečnosti, které vedou k tomu, že je skutečná spotřeba raket významně vyšší.

Úloha VI.4 ... Předražená mouka 3 body

Petr se procházel kolem řeky až došel k vodnímu mlýnu. Tento mlýn byl ještě v provozu, což bylo Petrovi divné. Tak se zamyslel. Pak si všiml informační tabule, kde našel následující údaje:

- výška padající vody: 10 metrů,
- průtok: $18\,\mathrm{m^3}$ vody za 2 minuty,
- účinnost turbíny: 47 %.

Pořád ale přemýšlel nad tím, jaký může být pracovní výkon tohoto vodního kola. Pomůžete mu tuto důležitou věc, která na informační tabuli nebyla uvedena, vypočítat?

Úloha VI.E ... Velký úklid 5 bodů

Marek si po dlouhé době uklízel na stole. Měl už tam hodně nepořádku – hlavně papírů. Tak je začal třídit na popsané a nepopsané. Po chvíli měl na stole dvě hromádky papírů, a tak ho napadlo, jaká je vůbec tloušťka papíru.

Změřte co nejpřesněji tloušťku kancelářského papíru. Navrhněte si vhodnou metodu a nezapomeňte určit její chybu.

Úloha VI.C ... Granáty a kovadlina 8 bodů

a) Ověřte, že čísla x_+ a x_- vypočtená dle vzorců v seriálovém textu skutečně řeší kvadratickou rovnici.

b) Královna Alžběta II. si nechala na oslavu svých 86. narozenin vypálit z londýnského Toweru 62 dělových salv. Jak daleko děla dostřelila? Jak dlouho dělostřelecké projektily poletí? Děla střílela pod úhlem $\alpha = 30^\circ$, úsťová rychlost projektilů dosahovala velikosti $v = 400\,\mathrm{m/s}$

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	V	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	5	3	6	5	**25**	*119*	
1.	*Olga Krumlová*		–	–	–	–	–	–	**0**	*3*	

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	V	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	5	3	6	5	**25**	*119*	
1.	*Jan Preiss*	G Lovosice	2	2	–	–	–	3	**7**	*41*	
2.	*Pham The Huynh Duc*	G Šumperk	1	2	–	–	1	1	**5**	*18*	
3.	*Martin Orság*	G Vyškov	–	–	–	–	–	–	**0**	*12*	
4.	*Jan Macháček*	G Holešov	–	–	–	–	–	–	**0**	*11*	
5.	*Mikuláš Plešák*	G Jablonec nad Nisou	–	–	–	–	–	–	**0**	*10*	
6.	*Adéla Hanková*	G Lovosice	–	–	–	–	–	–	**0**	*2*	

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	V	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	5	3	6	5	**25**	*119*	
1.	*Klára Stefanová*	G B. Němcové Hradec Králové	3	2	5	4	5	4	**23**	*96*	
1.	*Matěj Hrabal*	G Uherské Hradiště	3	3	4	2	5	5	**22**	*96*	
3.	*Zdeněk Nekula*	ZŠ Prosiměřice	–	–	–	–	–	–	**0**	*63*	
4.	*Josef Kolář*	ZŠ Litovel, Vítězná	3	1	–	1	5	3	**13**	*61*	
5.	*Filip Šmejkal*	G Uherské Hradiště	2	1	2	1	2	1	**9**	*47*	
6.	*Gabriela Šmejkalová*	G Uherské Hradiště	2	1	2	1	2	1	**9**	*45*	
7.	*Marek Janka*	Slovanské G Olomouc	–	–	–	–	–	–	**0**	*37*	
8.	*Zuzana Viceníková*	G Uherské Hradiště	–	2	1	1	1	–	**5**	*27*	
9.	*Daniel Pišťák*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*26*	
10.	*Tomáš Vymazal*	RG a ZŠ Prostějov	–	–	–	–	–	–	**0**	*24*	
11.	*Anna Kovářiková*	RG a ZŠ Prostějov	–	–	–	–	–	–	**0**	*21*	
11.	*Jan Hladík*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	0	–	–	–	**1**	*21*	
11.	*Martin Rajdl*	G Ch. Dopplera Praha	2	–	–	–	–	–	**2**	*21*	
14.	*Marek Otýpka*	G Židlochovice	–	–	–	–	3	–	**3**	*19*	
14.	*Vojtěch Hýbl*	G8 Mladá Boleslav	–	–	–	–	–	–	**0**	*19*	
16.	*William Tatarko*	G Ch. Dopplera Praha	3	–	0	–	–	–	**3**	*18*	
17.	*Kryštof Rühr*	G Ch. Dopplera Praha	3	–	–	–	–	–	**3**	*16*	
18.	*Ester Sgallová*	G Ch. Dopplera Praha	2	–	–	–	–	–	**2**	*10*	
19.	*Michal Drašnar*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	–	–	–	–	**1**	*9*	
19.	*Tomáš Pauček*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*9*	
21.	*Čeněk Krejčí*	ZŠ a MŠ Nebušice	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
21.	*Dušan Klíma*	GFMP Rychnov nad Kněžnou	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
23.	*Lukáš Skořepa*	G Ch. Dopplera Praha	2	–	–	–	–	–	**2**	*7*	
24.	*Aneta Doležalová*	ZŠ Nížkov	–	–	–	–	–	–	**0**	*5*	
25.	*Michal Kunc*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*4*	

Pořadí řešitelů po V. sérii

Kategorie osmých ročníků

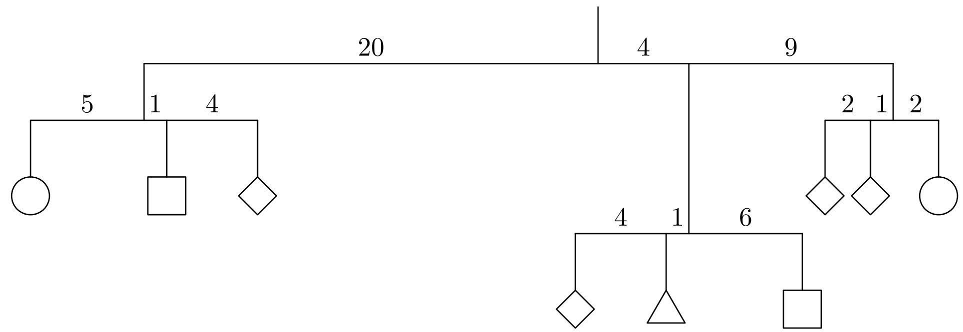
	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	V	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	5	3	6	5	**25**	*119*	
1.	*Matěj Mezera*	ZŠ Havlíčkův Brod, Nuselská	4	3	4	4	8	5	**28**	*110*	
2.	*Martin Štyks*	G Lovosice	3	3	–	4	4	5	**19**	*105*	
3.	*Klára Ševčíková*	G Uherské Hradiště	3	4	4	–	7	5	**23**	*99*	
4.	*Jaroslav Janoš*	G Zlín, Lesní čtvrť	3	4	4	3	4	3	**21**	*94*	
5.	*Jáchym Bártík*	G Havlíčkův Brod	3	3	5	–	5	5	**21**	*89*	
6.	*Lucie Hronová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	4	5	3	3	1	**19**	*77*	
7.	*Simona Gabrielová*	G České Budějovice, Jírovcova	3	1	5	2	2	5	**18**	*73*	
8.	*Jaromír Mielec*	G Ostrava-Zábřeh	2	2	–	–	–	1	**5**	*59*	
9.	*Roman Chasák*	ZŠ a MŠ J. Schrotha, Lipová-lázně	2	1	–	2	2	4	**11**	*53*	
10.	*David Žáček*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*36*	
11.	*Aleksej Gaj*	G Ch. Dopplera Praha	2	1	–	2	–	3	**8**	*32*	
11.	*Matěj Štula*	GSOŠPg Liberec	–	–	–	–	–	–	**0**	*32*	
13.	*Vjačeslav Horbač*	G Liberec, Jeronýmová	–	–	–	–	2	–	**2**	*30*	
14.	*Tomáš Macek*	Jiráskovo G Náchod	–	–	–	–	–	–	**0**	*29*	
15.	*Matěj Coufal*	G Havlíčkův Brod	3	2	–	4	3	4	**16**	*28*	
15.	*Zuzana Matůšová*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	–	–	–	4	–	**4**	*28*	
17.	*Jan Holásek*	G Ústí nad Orlicí	–	–	–	–	–	–	**0**	*24*	
18.	*Sebastian Duarte*	G Ch. Dopplera Praha	2	0	–	–	–	0	**2**	*23*	
19.	*Dinh Huy Nhat Minh*	G Kadaň	–	–	–	–	–	–	**0**	*22*	
19.	*Martin Griner*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	3	0	**3**	*22*	
21.	*Kačka Feslová*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	1	1	**2**	*19*	
21.	*Klára Slováčková*	G Ch. Dopplera Praha	2	1	–	–	1	–	**4**	*19*	
21.	*Markéta Holubová*	G Ch. Dopplera Praha	2	1	–	–	–	1	**4**	*19*	
24.	*Vojtěch Dědek*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*18*	
25.	*Jakub Matějka*	G Ch. Dopplera Praha	–	0	–	–	–	1	**1**	*17*	
25.	*Miloš Müller*	ZŠ Jesenice	–	–	–	–	–	–	**0**	*17*	
25.	*Tereza Čechová*	G Ch. Dopplera Praha	–	1	–	–	1	1	**3**	*17*	
25.	*Tomáš Volejník*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*17*	
29.	*Sebastian Janda*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	1	1	**2**	*16*	
30.	*Jonáš Uřičář*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	–	–	–	3	–	**3**	*14*	
30.	*Kateřina Zemková*	GOB Telč	–	–	–	2	2	–	**4**	*14*	
32.	*Edvard Lanz*	G Ch. Dopplera Praha	3	–	–	4	–	–	**7**	*13*	
32.	*František Couf*	G Ch. Dopplera Praha	1	–	3	0	–	–	**4**	*13*	
32.	*Tamara Maňáková*	G Šumperk	–	–	–	–	–	–	**0**	*13*	
35.	*Martina Fusková*	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	**0**	*12*	
36.	*Jan Ondruš*	Gymnázium Ostrov	–	–	–	–	–	–	**0**	*9*	
36.	*Ondřej Altman*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	–	–	**0**	*9*	
38.	*Jan Kašník*	Gymnázium Cheb	–	–	–	–	–	–	**0**	*8*	
38.	*Miky Hosnedl*	G Ch. Dopplera Praha	–	–	–	–	1	–	**1**	*8*	
40.	*Michal Kocourek*	G Ch. Dopplera Praha	2	0	–	–	–	–	**2**	*5*	
40.	*Jakub Mohaupt*	ZŠ Dr. Miroslava Tyrše 8.C	–	–	–	–	–	–	**0**	*5*	
42.	*Tereza Doležalová*	ZŠ a MŠ Otnice	–	–	–	–	–	–	**0**	*4*	
42.	*Tomáš Hlavatý*	G Kadaň	–	–	–	–	–	–	**0**	*4*	
44.	*Petr Chmel*	Dvořákovo G Kralupy nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	**0**	*2*	

a místo dopadu bylo o $h = 30\,\mathrm{m}$ níže, než se nacházela děla. Britská dělostřelecká technologie je tak dokonalá, že na projektily nepůsobí odpor vzduchu.

c) Fidel Alejandro Castro Ruz je proslulý množstvím atentátů, jimž se mu podařilo uniknout. Kdysi si u okna v jednom z nižších pater jistého havanského ministerstva vychutnával svůj oblíbený doutník. Trochu se z okna vyklonil, aby vyklepal popel, čehož neváhal využít špion nacházející se nad ním a po vzoru amerických kreslených filmů upustil na Fidela kovadlinu. Avšak než to stihl udělat, El Commandante již vykloněný nebyl, takže kovadlina kolem okna pouze proletěla. Bystrým okem revolucionáře Fidel zpozoroval, že před oknem vysokým 120 cm kovadlina proletěla za 0,12 s. Kolik pater nad ním se atentátník nacházel, je-li výška jednoho patra 3 m?

Řešení V. série

Úloha V.1 ... Vešák 3 body; průměr 2,31; řešilo 32 studentů



Obr. 1: Frantův věšák v rovnováze

Franta z rána rozvěšoval závaží na svůj věšák (obrázek 1). Určete ostatní hmotnosti závaží na obrázku, když víte, že závaží tvaru trojúhelníku má hmotnost 21 jednotek.

Franta má čtyři druhy závaží, která jsou každá jinak těžká. Rozvěšuje je na svůj věšák, který tvoří rovnoramenné váhy, na kterých jsou zavěšeny další tři. Vzdálenosti částí jednotlivých (nehmotných) ramen jsou zapsány na obrázku. Proto hlavní váhy mají délky ramen 20 a 13.

Úlohu vymyslel Petr

Pokud budeme chtít matematicky popsat to, že jsou jednotlivé váhy v rovnováze, použijeme rovnice. Tyto rovnice si pro všechny čtyři rovnoramenné váhy zapíšeme:

$$20(a+b+c) = 4(21+c+b) + 13(c+c+a)$$
$$5a = b + 5c$$
$$5c + 21 = 6b$$
$$3c + c = 2a\,,$$

kde a je hmotnost kulatého závaží, b čtvercového závaží, které je uchycené za stranu a c je také čtvercové, ale je uchycené za vrchol.

Úpravou třetí rovnice dostáváme $a = 2c$. Tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice:

$$5(2c) = b + 5c$$
$$b = 5c\,.$$

a a b dosadíme do rovnice první:

$$20(2c + 5c + c) = 4(21 + c + 5c) + 13(c + c + 2c)$$
$$160c = 84 + 24c + 52c$$
$$84c = 84$$
$$c = 1\,.$$

Odtud plyne:

$$a = 2c = 2$$
$$b = 5c = 5\,.$$

Pokud je věšák v rovnováze, musí platit i poslední (třetí) rovnice. Proto do ní pro kontrolu dosadíme:

$$5 + 21 = 30$$
$$26 \neq 30\,.$$

Protože tato soustava čtyř rovnic nemá řešení, nejsou váhy v rovnováze a Franta zrána si svůj věšák zakreslil špatně.

Petr Pecha
`xlfd@fykos.cz`

Úloha V.2 ... Martin a Marťan

3 body; průměr 1,8; řešilo 25 studentů

Martin se houpe na houpačce tak, že ve chvíli, kdy je výchylka houpačky 90 stupňů, se houpačka zastaví a začne se vracet zpět. Na neznámé planetě daleko ve vesmíru se houpe Marťan, jenže tak, že se houpačka zastaví v největší výchylce 180 stupňů, tedy se téměř přetáčí. Jaký je poměr hmotnosti planety Země a planety, na které se houpe Marťan, víte-li, že Martin i Marťan mají stejnou hmotnost, houpačky jsou stejně dlouhé a rychlost houpaček v dolní úvrati (při průchodu rovnovážnou polohou) je stejná? *Terka Z. chodí ráda na dětské hřiště*

Martin i Marťan mají stejnou hmotnost a při svém houpání i stejnou rychlost v dolní úvrati. To znamená, že mají v dolní úvrati i stejnou kinetickou energii E_k,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Martin se zastaví s výchylkou 90°, Marťan s výchylkou 180° (podotkněme, že houpačky musejí být na tyči, nikoliv na řetězu, aby to bylo možné). Marťan tedy vystoupí do dvojnásobné výšky než Martin, označme ji $2h$. Při vyhoupnutí vzhůru se kinetická energie mění na potenciální a v bodě, kde se houpačka zastaví, je už všechna přeměněná, je v ní polohová energie E_p rovna původní kinetické E_k. Veličiny popisující Martinův pohyb nebo jeho planetu budeme nadále označovat číslem 1, pro Marťana použijeme číslo 2.

Taková rovnice může mít až dvě reálná řešení, označme je x_+ a x_-. Nebudeme si je zde odvozovat (ač to není nic zvlášť složitého), pouze uvedeme vzoreček pro jejich výpočet:

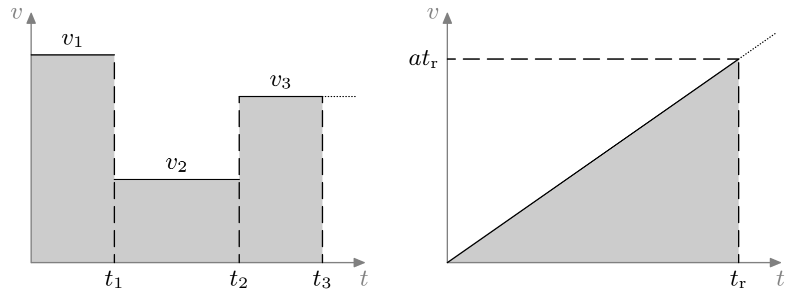
$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \qquad x_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

V případě, že je číslo $D = b^2 - 4ac$ záporné, nelze z něj spočíst reálnou druhou odmocninu, a taková kvadratická rovnice nemá žádné reálné řešení. Je-li $D = 0$, kořeny x_+ a x_- splynou a dostáváme tak pouze jedno řešení.

Úloha VI.C ... Granáty a kovadlina

8 bodů

a) Ověřte, že čísla x_+ a x_- vypočtená dle vzorců v seriálovém textu skutečně řeší kvadratickou rovnici.
b) Královna Alžběta II. si nechala na oslavu svých 86. narozenin vypálit z londýnského Toweru 62 dělových salv. Jak daleko děla dostřelila? Jak dlouho dělostřelecké projektily poletí? Děla střílela pod úhlem $\alpha = 30^\circ$, úsťová rychlost projektilů dosahovala velikosti $v = 400\,\mathrm{m/s}$ a místo dopadu bylo o $h = 30\,\mathrm{m}$ níže, než se nacházela děla. Britská dělostřelecká technologie je tak dokonalá, že na projektily nepůsobí odpor vzduchu.
c) Fidel Alejandro Castro Ruz je proslulý množstvím atentátů, jimž se mu podařilo uniknout. Kdysi si u okna v jednom z nižších pater jistého havanského ministerstva vychutnával svůj oblíbený doutník. Trochu se z okna vyklonil, aby vyklepal popel, čehož neváhal využít špion nacházející se nad ním a po vzoru amerických kreslených filmů upustil na Fidela kovadlinu. Avšak než to stihl udělat, El Commandante již vykloněný nebyl, takže kovadlina kolem okna pouze proletěla. Bystrým okem revolucionáře Fidel zpozoroval, že před oknem vysokým 120 cm kovadlina proletěla za 0,12 s. Kolik pater nad ním se atentátník nacházel, je-li výška jednoho patra 3 m?



Obr. 8: Graf rychlosti v závislosti na čase po částech rovnoměrného pohybu (vlevo) a rovnoměrně zrychleného pohybu (vpravo). Vybarvená plocha odpovídá dráze.

Na obrázku 8 vlevo se nachází graf rychlosti po částech rovnoměrného pohybu, kdy v časovém intervalu $(0, t_1)$ se těleso pohybuje rychlostí v_1, pak do něj (zepředu) něco narazí a rychlost se změní na v_2. V čase t_2 do něj opět něco vrazí (pro změnu zezadu), načež se těleso pohybuje rychlostí v_3. Jakou dráhu celkem těleso urazí mezi časy 0 a t_3?

Inu, je to jednoduché – stačí nám sečíst tři dílčí dráhy, které těleso urazilo v jednotlivých rovnoměrných pohybech

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = v_1 t_t + v_2(t_2 - t_1) + v_3(t_3 - t_2)\,.$$

Všimněte si, že dílčí dráha při rovnoměrně zrychleném pohybu odpovídá obsahu obdélníka, jehož strany odpovídají rychlosti a době pohybu. Celková dráha při po částech rovnoměrném pohybu je rovna součtu obsahu těchto obdélníků (vybarvená plocha na obr. 8 vlevo). Je to plocha *nacházející se pod grafem rychlosti* (míněno pod onou čarou, která představuje rychlost). Zmíněný princip lze použít obecně pro přímočaré pohyby v jednom směru. Máme-li graf rychlosti v závislosti na čase, dráhu určíme jako obsah plochy pod grafem.

Nechť je rychlost v čase $t = 0$ nulová a pak těleso zrychluje s konstantním zrychlením a. V čase t je tedy rychlost $v = at$. Graf rychlosti při takovém pohybu je přímka procházející počátkem (obrázek 8 vpravo). Jakou dráhu těleso urazí těleso mezi časy 0 a t_r?

Vybarvená plocha pod grafem je ohraničena pravoúhlým trojúhelníkem s odvěsnami t_r (čas) a at_r (rychlost v koncovém čase). Dosazením do vzorce pro obsah pravoúhlého trojúhelníka dostáváme dráhu v čase t_r,

$$s(t_\mathrm{r}) = \frac{1}{2} t_\mathrm{r}(at_\mathrm{r}) = \frac{1}{2} a t_\mathrm{r}^2\,,$$

což je očekávaný výsledek.

Kořeny kvadratické rovnice

K řešení úloh budete potřebovat vyřešit kvadratickou rovnici. To je rovnice, která obsahuje neznámou v první a druhé mocnině a jež se dá zapsat ve tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0\,,$$

kde a, b, c mohou být libovolná, v našem případě reálná čísla a x je neznámá.

Jak spočítat polohovou energii? Vzorec $E_p = mgh$ platí pouze pro povrch zemský, musíme si tedy odvodit vzorec obecnější, který bude záviset na parametrech planety a budeme ho moci použít i pro Marťanovu planetu. Při zhoupnutí směrem dolů koná gravitační síla práci a Martina/Marťana urychluje. Tato síla působí v Martinově případě po dráze $s_1 = h$ a v Marťanově po dráze $s_2 = 2h$. Vykonanou práci W spočteme jako

$$W = Fs$$

Polohová energie v bodě zastavení houpačky bude tedy rovna (po dosazení vzorce za gravitační sílu)

$$E_{p1} = F_{g1} h = \kappa \frac{mM_1}{R_1^2} h,$$
$$E_{p2} = F_{g2} 2h = \kappa \frac{mM_2}{R_2^2} 2h,$$

kde M je hmotnost planety a R je její poloměr. Předpokládáme, že Martinova hmotnost je zanedbatelná vůči hmotnosti planety a proto s ní nebude nijak škubat (přeměňovat Martinovu kinetickou energii na kinetickou energii planety) a také předpokládáme, že houpačka je malá vůči poloměru planety, takže do vzorce pro gravitační sílu $F_g = \kappa \frac{mM}{r^2}$ za vzájemnou vzdálenost těles r můžeme dosadit rovnou poloměr planety, i když se při houpání vzdálenost Martina a planety nepatrně mění. Tyto dvě energie se musejí rovnat, neboť jsou obě jen beze zbytku přeměněná kinetická energie E_k, jež je pro oba případy stejná.

$$\kappa \frac{mM_1}{R_1^2} h = \kappa \frac{mM_2}{R_2^2} 2h$$

Po vykrácení m, κ, h dostaneme

$$\frac{M_1}{R_1^2} = \frac{M_2}{R_2^2} 2,$$

z čehož vyjádříme poměr hmotností planet

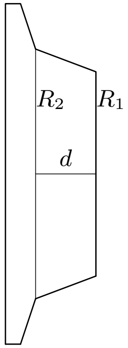
$$\frac{M_1}{M_2} = 2 \frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

Budou-li obě planety stejně velké, Martinova planeta musí být dvakrát hmotnější.

Tereza Zábojníková
terka@fykos.cz

Úloha V.3 ... Vlak v zatáčce

5 bodů; průměr 3,14; řešilo 14 studentů



Když auto projíždí zatáčkou, musí kolo, které jede po vnějším oblouku, urazit delší dráhu. K tomu slouží takzvaný diferenciál, který umožní otáčet každým kolem zvlášť. Vlak ale nemá diferenciál. Aby vnější kolo mohlo urazit delší dráhu, mají jeho kola tvar jako na obrázku. A jak jste si možná všimli při jízdě vlakem, jsou vlakové zatáčky klopené tak, že se vlak nakloní „dovnitř“ do zatáčky. Představte si, že by vlak neustále jezdil po kruhové dráze, která by byla vhodně sklopená. Jaký nejmenší poloměr může mít kružnice, na níž bude ležet vnitřní kolejnice? Víte poloměry R_1, R_2, tloušťku d a rozchod kolejnic s.

Ladu inspirovalo vrzání kol tramvaje

V této úloze není třeba řešit, jak moc je třeba vlak naklonit, pouze jaký musí být délkový rozdíl mezi drahou pro kolo na vnitřní straně a drahou pro kolo na vnější straně. Tedy mezi délkou jednotlivých kolejnic.

Pokud vnější kolejnice bude ležet na kružnici, která bude mít poloměr R_v, bude její celková délka $2\pi R_v$. Obdobně vnitřní kolejnice na kružnici s poloměrem R_m bude mít délku $2\pi R_m$. Rozdíl mezi poloměry pak musí být právě rozchod kolejnic s.

Obě kola se během cesty kolem dokola musejí otočit o stejný počet otáček (jelikož vlak nemá diferenciál). Nevíme sice přesně, kolik otáček kola urazí, ale můžeme si tento počet (který může být i neceločíselný) označit jako k. Při jedné objížďce pak kolo na vnitřní straně urazí dráhu $k \cdot 2\pi R_1$ a kolo na vnější kolejnici urazí dráhu $k \cdot 2\pi R_2$. Tak získáváme výsledně tři rovnice o třech neznámých.

$$R_v R_m = s$$

$$2\pi R_m = k \cdot 2\pi R_1$$

$$2\pi R_v = k \cdot 2\pi R_2$$

Nyní si můžeme nejprve vyjádřit R_v pomocí jako $s + R_m$, dosadit do druhé rovnice, z ní si vyjádřit k a to výsledně dosadit do poslední rovnice. Po těchto úpravách pak získáváme

$$R_m = \frac{R_1}{R_2 R_1} \cdot s$$

což je poloměr vnitřní kolejnice, který jsme hledali.

Nakonec se omlouváme za terminologickou nepřesnost, jíž jsme se v zadání dopustili. Vlak jezdí zásadně *v obloukách*, *do oblouku*, zjišťuje se poloměr projížděného *oblouku* atd. Slova *zatáčka* se neužívá. Za upozornění děkujeme paní Ivaně Souhradové.

Lada Peksová
lada@fykos.cz

Zrychlení udává změnu rychlosti v čase. Je-li zrychlení $\boldsymbol{a}$ (obecné, ne nutně gravitační) neměnné a má-li v nulovém čase těleso rychlost $\boldsymbol{v}_0$, v čase t rychlost bude

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t\boldsymbol{a}\,.$$

Převedením „profláknutého“ vzorečku pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu $s = \frac{1}{2}at^2$ (ten si dokážeme níže) do vektorové formy dostáváme vztah pro „polohu“ předmětu. Nachází-li se těleso v čase 0 v poloze $\boldsymbol{r}_0$, jeho rychlost je v čase 0 nulová a těleso je vystaveno konstantnímu zrychlení a, v čase t bude jeho poloha

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\,t^2.$$

Dosadíme-li za $\boldsymbol{a}$ gravitační zrychlení $\boldsymbol{g}$, dostaneme vzorec pro polohu tělesa při volném pádu z klidu.

Příjemnou vlastností uvedených vektorových veličin je, že určitá složka jedné veličiny působí pouze na stejnou složku veličiny související. Tedy například svislá složka zrychlení nemá žádný vliv na polohu ve vodorovném směru. Toho můžeme využít.

Odvodíme si vztah pro polohu při vodorovném vrhu. Hodíme-li nějaký předmět ve vodorovném směru, jeho vodorovná složka rychlosti bude pořád stejná, protože tíhové zrychlení je v tomto směru nulové. Svislá složka polohy se pak bude chovat úplně stejně jako při volném pádu z klidu. Poloha předmětu v čase t od vržení vodorovnou rychlostí v z místa $\boldsymbol{r}_0$ bude

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\,t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2\,.$$

V explicitním tvaru po složkách můžeme vztah zapsat (ve dvou rozměrech)

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2\,.$$

Důležité je, že v tomto případě byla na počátku svislá složka rychlosti nulová, $v_y = 0$.

V případě, že bude předmět vržen zčásti i ve svislém směru, je potřeba nalézt čas t_0, ve kterém bude svislá složka rychlosti nulová (ten může formálně vyjít i záporný, to když mrštíme předmět dolů, což ale nevadí). Tento čas musíme odečíst od času uplynulého od vržení, takže dostaneme

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}(t - t_0)^2\,.$$

Dráha přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu

Ukažme si pro lepší vhled intuitivní odvození vzorečku $s(t) = \frac{1}{2}at^2$, jenž popisuje dráhu rovnoměrně zrychleného předmětu, který je v nulovém čase v klidu. Tato představa vám kromě objasnění toho, co ve školách bohužel až příliš často „padá z nebe“, může pomoci při řešení seriálové úlohy.

Poněvadž se budeme zabývat přímočarým pohybem, tedy pohybem na přímce, nebudeme zde potřebovat vektorový formalismus představený výše.

Při rovnoměrném pohybu je rychlost konstantní, pro výpočet dráhy nám v takovém případě stačí pouze vynásobit rychlost časem, po nějž pohyb probíhal. Při zrychleném pohybu nastane potíž, protože rychlost se při něm mění.

Součet vektorů lze snadno znázornit graficky (obrázek 7). Šipky představující vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ doplníme na rovnoběžník a v nově vytvořeném vrcholu bude konec šipky představující jejich součet. Nebo si to můžeme představit jako napojování šipek: šipku $\boldsymbol{G}$ přesuneme tak, aby její začátek byl na konci šipky $\boldsymbol{F}$, ale nesmíme s ní při přesunu otáčet, směr musí zůstat stejný. Na konci přesunuté šipky $\boldsymbol{G}$ bude pak i konec šipky pro součet.

Vektory jako takové tedy můžeme sčítat, ne však jejich velikosti. Při výpočtu velikosti součtu musíme opět použít Pythagorovu větu na součty jednotlivých složek:

$$|\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}| = \sqrt{(F_x+G_x)^2+(F_y+G_y)^2} = \sqrt{(6\,\mathrm{N})^2+(2\,\mathrm{N})^2} = \sqrt{40}\,\mathrm{N} \approx 6{,}3\,\mathrm{N}\,.$$

Vraťme se na okamžik ještě k obrázku 6. Známe-li velikost vektoru a úhel, který svírá vektor se souřadnicovými osami, dokážeme snadno spočíst velikosti jeho vodorovné a svislé složky:[10]

$$|\boldsymbol{F}_x| = |\boldsymbol{F}|\cos\varphi\,; \qquad |\boldsymbol{F}_y| = |\boldsymbol{F}|\sin\varphi\,.$$

Pokud jste tak již neučinili, všimněte si, že platí také rovnost $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y$.

Nakonec uveďme ještě jednu důležitou operaci s vektory, a to násobení skalárem, tedy číslem. Je to jednoduché – daným skalárem prostě vynásobíme všechny složky vektoru

$$t\boldsymbol{F} = t\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}tF_x\\ tF_y\end{pmatrix}.$$

V grafickém znázornění se vynásobení skalárem t projeví tak, že se šipka představující vektor t-krát prodlouží (a v případě, že je t záporné, bude šipka mířit do opačného směru oproti původnímu).

Násobení skalárem nám umožňuje zapsat vektorový vztah pro rovnoměrný přímočarý pohyb. Je-li v čase 0 poloha předmětu $\boldsymbol{r}_0$ a pohybuje-li se předmět stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$, v čase t bude jeho poloha

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\,t\,.$$

Použili jsme zde násobení vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ s časem t (což je skalár), a dostali jsme tak změnu polohy za dobu t.

Gravitace a pády vektorově

Pokud se pohybujeme poměrně blízko zemského povrchu, můžeme ve výpočtech považovat gravitační pole za homogenní. To znamená, že všechna tělesa upuštěná ve stejný čas padají všude „stejně rychle“, tj. se stejným gravitačním zrychlením $\boldsymbol{g}$. Jeho velikost se běžně udává $|\boldsymbol{g}| = g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, avšak vzhledem k tomu, že Země není dokonale kulatá, na různých místech planety se g liší.

V kartézské soustavě souřadnic ve třech rozměrech, popsané výše, máme

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-9{,}81\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

– tíhové zrychlení působí pouze svisle dolů, vodorovné složky jsou nulové.

[10] Goniometrickým funkcím sin a cos jsme se věnovali v seriálovém textu ke třetí sérii, viz `http://vyfuk.fykos.cz/vyfuk/rocnik1/serie3.pdf`.

Úloha V.4 . . . 24hodinová šichta

3 body; průměr 2,35; řešilo 17 studentů

Spočtěte, kolik práce vykoná motor nástěnných hodin během jednoho dne. Hodiny mají ručičky o tvaru tenkých tyčí, minutová ručička má hmotnost m a délku l, hodinová hmotnost M a délku L.

Obě ručičky se pohybují spojitě. Při brzdění motor žádnou práci nekoná, ale energie se ztrácí. Vteřinovou ručičku hodiny nemají. *Marek obdivoval své hodiny*

V případě, že hodinové ručičky jsou poháněny zvlášť (jako by každá měla svůj vlastní motor), je situace velice jednoduchá. Cestou dolů (od 12 k 6) jdou ručičky samospádem a naopak musejí být brzděny, aby šly dostatečně pomalu. Zde tedy žádnou práci motor nekoná.

Rychlost ručiček zůstává celou dobu stejná, a tedy i jejich kinetická energie T. Cestou nahoru (od 6 k 12) musí motor ručičku zvedat, a tedy zvyšovat jejich polohovou energii V. Práce potřebná k jednomu zvednutí minutové ručičky mezi půlhodinou (6) a celou hodinou (12) je tedy rovna příslušnému rozdílu polohových energií. Polohová energie v homogenním tíhovém poli je $V_\mathrm{m} = mgh$, kde g je tíhové zrychlení a h výška těžiště minutové ručičky,[2] kterou budeme odčítat od osy hodin.[3] Poněvadž naše ručička je homogenní tyč, má těžiště ve svém středu. Bude-li ručička nahoře (celá hodina), výška jejího těžiště bude $h_\mathrm{00m} = l/2$, dole (půlhodina) bude výška $h_\mathrm{30m} = -l/2$. Rozdíl polohových energií

$$V_\mathrm{00m} - V_\mathrm{30m} = mgl/2 - mg(-l/2) = mgl = W_{\mathrm{m}\uparrow}$$

je tedy také práce, jež je potřeba k jednomu vynesení minutové ručičky. U hodinové ručičky dostaneme stejným postupem práci potřebnou k jednomu vynesení

$$W_{\mathrm{h}\uparrow} = MgL.$$

Za jeden den oběhne hodinová ručička ciferník dvakrát a minutová 24krát, při každém oběhu musí motor příslušnou ručičku jednou vynést zespoda nahoru. Celková práce, již musí během jednoho dne vykonat, je tak

$$W = 2MgL + 24mgl.$$

Poznámky k došlým řešením

Častou a zbytečnou chybou bylo chybné určení počtu otočení ručiček za den. Ne, hodinová ručička skutečně neoběhne ciferník 24krát denně a minutová jej neoběhne 1440krát.

Poněkud fundamentálnějších chyb se mnozí dopouštěli při počítání práce. Vzorec pro vykonanou práci

$$W = F\cdot s,$$

kde F je *velikost* síly působící na hmotný bod a s je dráha, na níž síla působí, platí pouze tehdy, pokud tato síla působí *ve směru pohybu* a její velikost se nemění. Pokud chceme spočítat práci, kterou působí síla, jež není rovnoběžná se směrem pohybu, musíme tuto sílu rozložit na rovnoběžnou a kolmou složku[4] a pro výpočet práce použít jenom složku rovnoběžnou.

[2] Rozmyslete si, proč je pro polohovou energii určující poloha těžiště a nezáleží na rozložení hmoty.

[3] V homogenním tíhovém poli (tj. takovém, že tíhové zrychlení g je všude stejné) neexistuje žádná „přirozená“ volba nulové hladiny (tj. místa, kde považujeme výšku h za nulovou, a tudíž je zde nulová i polohová energie V). Za místo s nulovou výškou můžeme zvolit například podlahu, hladinu oceánu nebo třeba osu hodin – a polohová energie bude záviset na tom, jakou nulovou hladinu si zvolíme. Důležité však je, že pro fyziku jsou důležité pouze *rozdíly* polohových energií, takže je jedno, kterou z těchto hladin si zvolíme, ale musíme ji mít při všech výpočtech stejnou.

[4] Rozkladu sil jsme se věnovali v seriálovém studijním textu ve 3. sérii.

Síla kolmá na směr pohybu nikdy žádnou práci nekoná.

Problém je v tom, že ačkoliv síla motoru působící na ručičku je stále stejná (musí kompenzovat tíhovou sílu – tedy míří vzhůru a její velikost je mg, resp. Mg pro minutovou, resp. hodinovou ručičku), směr pohybu se celou dobu mění, a tudíž se mění i složka síly rovnoběžná se směrem pohybu. A do výše uvedeného vzorce nemůžeme dosadit veličinu, která se stále mění. Tudíž je tento vzorec pro naše účely nepoužitelný.

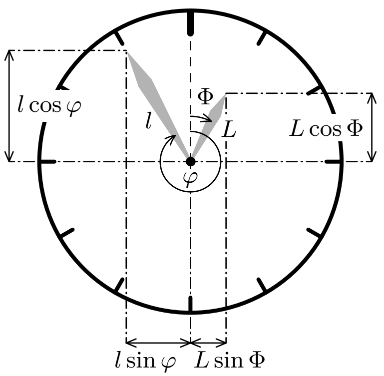
Spřevodovaný případ

Pro zajímavost si můžeme položit otázku, jak se výsledek bude lišit, když bude hodinová ručička s minutovou vzájemně spřevodovaná (jak to obvykle bývá, neboť jsou poháněny pouze jedním motorem). Podotýkáme, že k získání plného počtu bodů stačilo spočítat výše řešený nespřevodovaný případ.

Hřídel s hodinovou ručičkou a hřídel s minutovou ručičkou jsou na společné převodovce v převodovém poměru 1 : 12. To znamená, že na hřídel hodinové ručičky je přenášen dvanáctinásobek momentu síly z hřídele minutové ručičky a naopak, dvanáctina momentu síly z hřídele hodinové ručičky je přenášena na hřídel minutové ručičky.

Rozdílnost případu, kdy jsou obě ručičky spřaženy, od předchozího řešení tkví v tom, že ve chvíli, kdy jedna ručička jde směrem dolů a druhá nahoru, první zčásti či zcela pohání druhou. V případě nezávislých ručiček se veškerá energie cestou dolů ztratila při brzdění, takto se část z ní může přenést na druhou ručičku jdoucí nahoru, čímž se motoru část práce ušetří. Musíme tedy zjistit, kdy k tomuto vzájemnému pohánění dochází a kolik energie se tím ušetří.

Moment tíhové síly μ_m působící na minutovou ručičku vzhledem k ose hodin dostaneme jako součin vodorovné polohy těžiště ručičky od osy hodin a tíhové síly mg působící na ručičku. Vodorovná vzdálenost těžiště od osy určíme jako $(l/2)\sin\varphi$, kde φ je odchylka[5] inutové



Obr. 2: Počítání úhlů a kolmé průměty ručiček do svislého a vodorovného směru. Souřadnice poloh těžišť získám jako polovinu vyznačených průmětů v případě homogenních tyčí. Ručičky na obrázku mají jiný tvar – v takovém případě bychom nebrali polovinu, ale jiný podíl.

[5] Úhel zde (poněkud netradičně, avšak z pochopitelných důvodů) počítáme kladně po směru hodinových ručiček.

kost[9] celkové síly $\boldsymbol{F}$ určíme určíme z Pythagorovy věty (velikost vektoru v grafickém znázornění odpovídá délce příslušné šipky):

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{|\boldsymbol{F}_x|^2 + |\boldsymbol{F}_y|^2} = \sqrt{(4\,\mathrm{N})^2 + (3\,\mathrm{N})^2} = 5\,\mathrm{N}\,.$$

Pomocí rozkladu do jednotlivých, navzájem kolmých směrů jsme schopni vektorovou veličinu zapsat. Obvykle zapisujeme velikosti jednotlivých složek do ozávorkovaného sloupečku, v našem případě uvedenou sílu zapíšeme

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{N}\,.$$

Stejným způsobem můžeme zapsat i jednotlivé kolmé složky síly, do níž jsme původní sílu $\boldsymbol{F}$ rozložili:

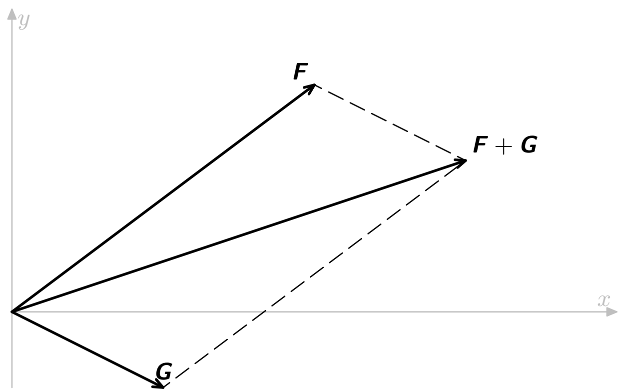
$$\boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} F_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{N}; \qquad \boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{N}\,.$$

Vektory můžeme sčítat a odčítat – činíme tak po složkách. Řekněme, že na dané těleso působí ve stejném bodě kromě síly $\boldsymbol{F}$ také síla $\boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{N}\,.$$

Svislá složka síly $\boldsymbol{G}$ je záporná – směřuje tedy dolů. Pokud na dané těleso již nepůsobí žádná další síla, celkovou sílu působící na těleso určíme jako součet sil $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} F_x + G_x \\ F_y + G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{N} + 2\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} + (-1\,\mathrm{N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}\mathrm{N}\,.$$



Obr. 7: Součet vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$.

[9] Velikost vektorové veličiny $\boldsymbol{F}$ značíme pomocí dvou svislých čar $|\boldsymbol{F}|$ nebo „obyčejným písmem“ F, což odpovídá tomu, že *velikost* vektoru je pouhé jediné číslo (s jednotkou, jde-li o fyzikální veličinu).

Výfučtení: Pády a vrhy

V posledním studijním textu letošního ročníku si zopakujeme několik poznatků z předchozích sérií a doplníme je novými, abychom si následně mohli spočítat základní pohyby v homogenním tíhovém poli.

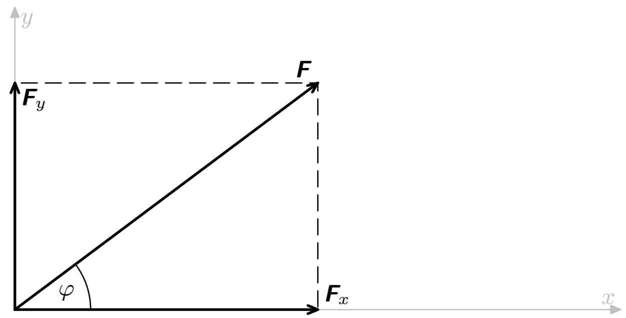
Vektory aneb když jedno číslo nestačí

Abychom zcela vyjádřili veličiny jako hmotnost, teplo či náboj, stačí nám k tomu jediné číslo (s příslušnou jednotkou). Říkáme jim *skalární* veličiny.

Běžně se však setkáváme i s veličinami, kde nám k jejich úplnému popisu jedno číslo (s jednotkou) nestačí – patří mezi ně například poloha, rychlost nebo síla, což jsou *vektorové* veličiny. Mají totiž kromě své velikosti také směr a jelikož nežijeme na přímce, budeme k jejich určení potřebovat čísel více. Naivně si můžeme vektor představit jako v prostoru orientovanou šipku určité délky (např. v případě polohy se konec šipky přímo dotýká příslušného místa, v případě síly šipka ukazuje směrem, jímž síla působí).

K určení vektorové veličiny ve třírozměrném prostoru budeme potřebovat čísla tři. Jaká konkrétně, závisí na zvolené *soustavě souřadnic*. Pro naše účely bude nejvhodnější *kartézská* soustava souřadnic, která je jednoduchá a snadno se v ní vektory sčítají a odčítají.

Kartézská soustava je vytyčena navzájem kolmými směry (osami). Pracujeme-li ve třírozměrném prostoru, zpravidla volíme dva směry vodorovné (označené x, y) a jeden směr svislý (označený z). Ve dvourozměrném prostoru (tedy v rovině, například na papíře) zpravidla volíme směr vodorovný označený x a směr svislý označený y. Dále budeme pracovat pro přehlednost se dvěma rozměry, zobecnění do více rozměrů je přímočaré. Za kladný budeme na svislé ose považovat směr nahoru, na vodorovné ose směr doprava. Směry dolů a doleva budou záporné.



Obr. 6: Rozklad síly $\boldsymbol{F}$ do vodorovného a svislého směru.

Vektorovou veličinu[8] jsme pak schopni rozdělit do jednotlivých směrů podle souřadnicových os. Na obrázku 6 je znázorněno rozložení síly $\boldsymbol{F}$ podél souřadnicových os do vodorovné složky $\boldsymbol{F}_x$ a svislé složky $\boldsymbol{F}_y$. Vodorovná složka $\boldsymbol{F}_x$ má velikost 4 N a svislá složka $\boldsymbol{F}_y$ má velikost 3 N. Veli-

[8] Vektorové veličiny označujeme tučným písmem, např. $\boldsymbol{F}$. Zejména v rukopise je též běžné označení šipkou nahoře, $\vec{F}$.

ručičky od svislého směru nahoru (tedy od dvanáctky). Máme tedy

$$\mu_\mathrm{m} = \frac{1}{2} mgl \sin\varphi .$$

Analogicky můžeme spočíst moment tíhové síly μ_h působící na hodinovou ručičku:

$$\mu_\mathrm{h} = \frac{1}{2} MgL \sin\Phi ,$$

kde Φ je odchylka hodinové ručičky od svislého směru nahoru.

Zaveďme konvenci, že o jedné půlnoci je $\varphi = \Phi = 0$ a úhel φ spojitě roste až do další půlnoci, kdy po 24 otočeních minutové ručičky bude $\varphi = 24 \cdot 360^\circ = 8640^\circ = 48\pi$ a obdobně po dvou otočeních hodinové ručičky $\Phi = 2 \cdot 360^\circ = 720^\circ = 4\pi$. Úhly si přirozeně můžeme vyjádřit jako funkce času:

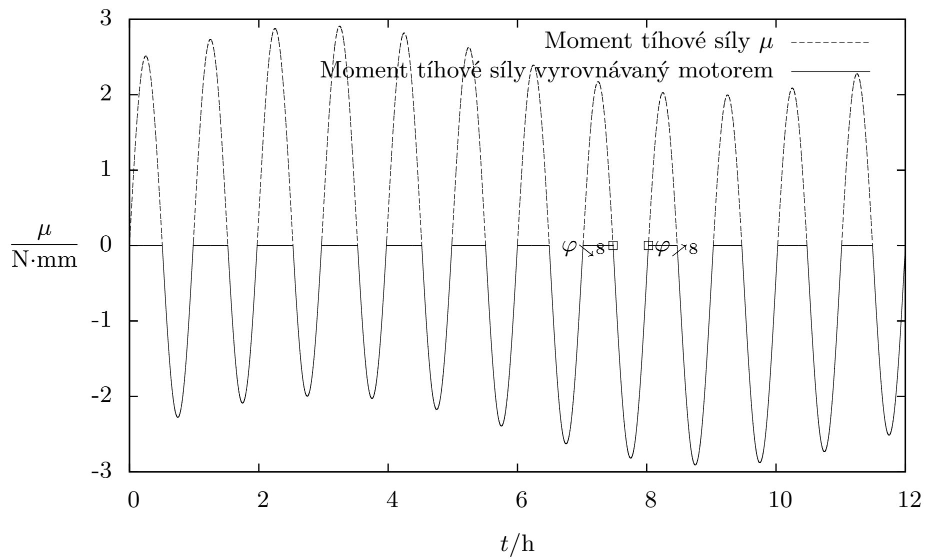
$$\varphi = \omega t = 2\pi/\mathrm{h}, \quad \Phi = \Omega t = \frac{1}{6}\pi/\mathrm{h}.$$

Zjevně platí, že $\varphi = 12\Phi$.

Moment tíhové síly působící na hřídel minutové ručičky je tedy

$$\mu = \mu_\mathrm{m} + \frac{1}{12}\mu_\mathrm{h} = \frac{1}{2} mgl \sin\varphi + \frac{1}{24} MgL \sin\left(\frac{\varphi}{12}\right) ,$$

přičemž v naší konvenci kladné μ znamená, že hodiny jdou samospádem, musejíce být brzděny.



Obr. 3: Příspěvek tíhy k momentu síly na hřídeli minutové ručičky v průběhu 12 hodin, $ml = 1125\,\mathrm{g \cdot mm}$, $ML = 500\,\mathrm{g \cdot mm}$.

Při záporném μ pracuje motor, aby celkový moment síly (μ od tíhy ručiček a $-\mu$ od motoru) byl nulový (a ručičky se tak pohybovaly stále stejně rychle).

Abychom určili celkovou motorem vykonanou práci, je nutné zjistit, ve kterých časových úsecích je motor zatížen (tj. spočítat doby, kdy je μ záporné) a jakou práci v těchto jednotlivých úsecích motor vykonal. První krok znamená vyřešit nerovnici $\mu < 0$, což znamená řešit rovnici $\mu = 0$. Tato goniometrická rovnice *není analyticky řešitelná* (kromě zjevného kořenu, kdy jsou obě ručičky na dvanáctce, $\varphi = 24k\pi$, k je celé číslo), můžeme ji řešit leda numericky na počítači.

Řešením této rovnice je až 24 kořenů během 12 hodin, tj. v intervalu úhlů $\varphi \in (0, 24\pi]$. Nebude-li hodinová ručička výrazně delší a těžší než minutová (což nebývá), bude jich právě 24 (v. obrázek 3; minutové ručičce přísluší 12 kmitů sinusoidy a hodinové přísluší jedna velká „vlna“ vychýlení této sinusoidy; velikost tohoto vychýlení je úměrná ML).

Z těchto 24 kořenů ve 12 případech přechází moment μ tíhové síly z kladných hodnot na záporné, ty si označme $\varphi_{\searrow n}$ a ve 12 naopak ze záporných hodnot na kladné, jež označme $\varphi_{\nearrow n}$, kde v obou případech n jde od 1 do 12 a znamená pořadí kořene daného typu od půlnoci.

V úseku mezi kořenem $\varphi_{\searrow n}$ a $\varphi_{\nearrow n}$ tedy motor koná práci. Práci vykonanou motorem v tomto úseku určíme rozdíl polohových energií na konci a na začátku. Polohovou energii v libovolném okamžiku určíme z polohy těžišť:

$$V(\varphi) = mg\frac{l}{2}\cos\varphi + Mg\frac{L}{2}\cos\frac{\varphi}{12},$$

v n. úseku tedy motor vykoná práci

$$W_n = V(\varphi_{\nearrow n}) - V(\varphi_{\searrow n})\,.$$

Sečtením práce ze všech těchto úseků a vynásobením dvěma (hodiny vykonají celý cyklus za den dvakrát) dostáváme konečný výsledek pro vykonanou práci[6]

$$W = 2\sum_{n=1}^{12} W_n = 2\sum_{n=1}^{12}\left(V(\varphi_{\nearrow n}) - V(\varphi_{\searrow n})\right).$$

Marek Nečada
marekn@fykos.cz

Úloha V.E ... Díra v lahvi

6 bodů; průměr 3,00; řešilo 27 studentů

Do větší nádoby udělejte malou dírku blízko u dna (použijte například PET lahev). A poté změřte, jak závisí vodorovná vzdálenost dostřiku vody, na výšce hladiny v nádobě. Na čem všem podle vás může záležet? Zkuste úlohu i graficky zpracovat (na vodorovnou osu zapisujte výšku hladiny a na svislou vzdálenost od dírky). *Autor úlohy se nepodepsal*

Ze začátku opět krátké zamyšlení – co přesně máme změřit a jak na to.

Jev nastávající při experimentu (vytrysknutí proudu vody z nádoby a jeho následný dopad na vodorovnou podložku nedaleko nádoby) je typickým příkladem tzv. vodorovného vrhu. Při něm je těleso vrženo z určité výšky h jistou počáteční rychlostí v směrem vodorovně s podložkou, dále se pohybuje po parabole, až ve vodorovné vzdálenosti d od své počáteční polohy dopadne na podložku.

[6] Symbol $\sum$ používáme tehdy, když máme ve výrazu hodně sčítanců a nechceme celý výraz rozepisovat. Konkrétně námi použité $\sum_{n=1}^{12}$ znamená „do výrazu za tímto symbolem dosadíme postupně za n všechna přirozená čísla od 1 do 12 a pak všechny takto vzniklé výrazy sečteme.“

VÝpočty Fyzikálních ÚKolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ   ročník 1±1   číslo 6/7

Tabulka 3: Data v tabulkovém procesoru.

	A	B	C	D	E
1	h/cm	V/ml			
2	10.5	100		9.1602898903	9.64917608
3	15.2	150		0.3820921108	8.4673370457
4	19.8	200		0.9948074821	6.5780683054
5	26.3	250		574.7543859649	3
6	32.1	300		24870.1870521074	129.8129478926

Argumenty k funkci `LINEST()` jsme zadali s pomocí nápovědy k našemu tabulkovému procesoru, kde se dozvíme, že jeho syntaxe je `LINEST(`*dataY*`;` *dataX*`;` *TypLinie*`;` *statistika*`)`. Význam prvních dvou argumentů je zřejmý, jsou jím rozsahy buněk se zadanými daty. Dále se dočteme, že argument *TypLinie* určuje, zda má regresní přímka procházet počátkem, tedy konstanta c má být nulová (v tom případě bychom sem zadali 0), nebo zda má být konstanta c nenulová (což chceme, kvůli nerovnostem dna a dalším možným nepřesnostem, zadáme tedy 1). Poslední argument, *statistika* určuje, zda kromě výsledných regresních konstant mají být zobrazeny i další informace, jako jsou výběrové směrodatné odchylky – to chceme, zadáme tedy 1.

Pokud vše zadáme správně, na místě buňky, kam jsme funkci zadávali, se zobrazí hodnota S, vpravo od ní hodnota c. Na řádku pod nimi jsou odchylky těchto hodnot. Na dalších řádcích jsou další doplňující údaje z regrese, které však nepotřebujeme a o jejichž významu se můžete dočíst v nápovědě.

Nakonec zmiňme, že lineární regresi přímkou lze spočítat i ručně, ale dá to práci. Příslušný vzorec i s odvozením, které ovšem využívá parciálních derivací, mohou zájemci nalézt například na Wikipedii.[7]

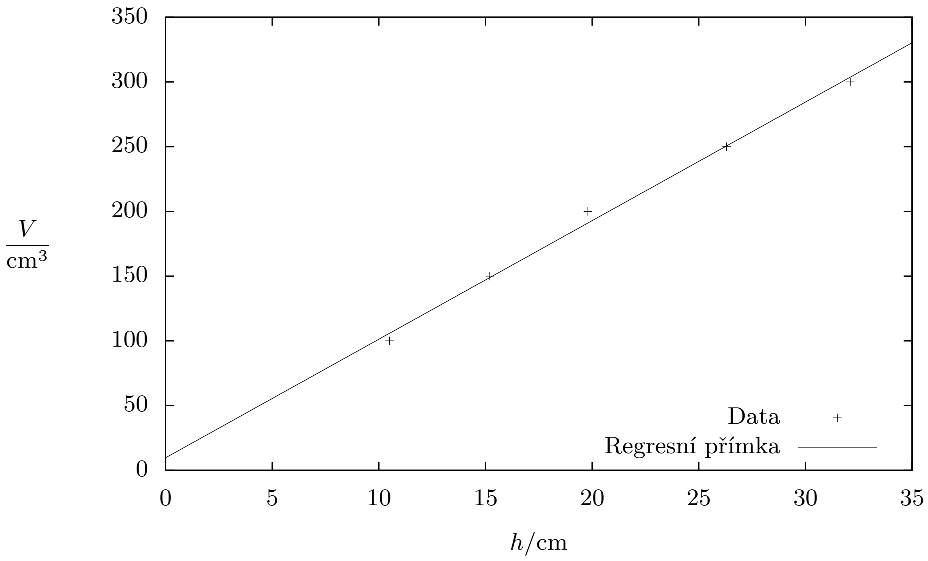
Alžběta Nečadová
bjetka@fykos.cz

[7] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Lineární_regrese`

Regresí jsme také určili hodnotu konstanty

$$c = (9{,}65 \pm 8{,}48)\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Pro výpočet jsem využila program Gnuplot. Pokud chci nakreslit v tomto programu graf, použiji příkaz `plot`. Např. zadané naměřené hodnoty, převedené na stejné jednotky jsem si uložila do textového souboru se dvěma sloupci hodnot pod názvem `data`. Pak graf nakreslím příkazem: `plot "data"`. Pro lineární regresi si musím nejdříve definovat vztah, napíšu příkaz: $\mathtt{V}(x) = S \cdot x + c$, jako proměnnou píšu x. Poté příkazem `fit V(x) "data" via S,c` najdu odpovídající konstanty S a c. Příkaz říká: prolož hodnoty uložené v souboru data vztahem $V(x)$ a při metodě nejmenších čtverců měň hodnoty S a c. Nakonec ještě nakreslíme graf naměřených hodnot proložených nalezeným vztahem příkazem: `plot "data", V(x)`. Tento graf je na obrázku 5.



Obr. 5: Naměřená data s regresní přímkou

Programů, které umějí spočítat lineární regresi, je pochopitelně více. Umí to většina tabulkových procesorů. Konkrétně v programech OpenOffice.org, LibreOffice nebo v anglické verzi MS Excel lze použít funkci `LINEST()`, v české verzi Excelu je ekvivalent `LINREGRESE()`.

Popišme si postup v tabulkovém procesoru LibreOffice Calc, v ostatních uvedených programech je postup obdobný.

Zadáme data data do sloupců (tabulka 3); řekněme, že v oblasti A2:A6 máme zadané výšky hladiny v centimetrech a v B2:B6 odpovídající objem nalité vody v cm^3. Do volné buňky potom zadáme formuli `=LINEST(B2:B6;A2:A6;1;1)` a potvrdíme kombinací kláves Ctrl+Shift+Enter. Tím programu říkáme, že chceme, aby byla funkce `LINEST()` interpretována jako maticová, což nám umožní mj. zobrazení obou regresních konstant S a c i jejich odchylek. Kdybychom zadání potvrdili jako obvykle pouze klávesou Enter, zobrazila by se pouze hodnota S.

Měření

Pro náš experiment postačí PET láhev vhodných rozměrů, fix, metr a samozřejmě místo vhodné pro měření. Nejprve si fixem na PET láhvi jemně označíme místo, kde do ní např. hřebíkem uděláme dírku. Poté si fixem uděláme na láhvi vždy ve stejné vzdálenosti od sebe několik značek, reprezentujících výšku hladiny, při které budeme měřit dostřik proudu vody.

V našem případě jsme experiment zopakovali s 1,5litrovou PET láhví dokonce dvakrát – dírku jsme udělali ve vzdálenosti $h = (5{,}00 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$ (přičemž poprvé jsme postavili PET láhev přímo na zem a podruhé ji podložili krabičkou o výšce $h' = (5{,}00 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$, voda tedy tryskala z výšky $h_1 = (5{,}00 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$ a $h_2 = (10{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$ ode dna nádoby), čárkami jsme si láhev označili ve vzdálenosti $l = 3, 6, 9, \ldots, 24\,\mathrm{cm}$ od dírky směrem k ústí nádoby (celkem tedy 8 „měřených hladin“).

Dále si připravíme místo pro měření – ideální je např. podlaha ve sklepě, odkud se dá voda snadno uklidit. Vyznačíme si zde místo, kam položíme láhev, a přiložíme pod dírku láhve směrem podél střiku vody metr. Ucpeme dírku PET láhve prstem, naplníme ji až po okraj vodou a ucpanou dírku poté odkryjeme. Vždy, když se pak hladina vody bude překrývat s „měřící čárkou“ na nádobě, zaznamenáme si vzdálenost dopadu proudu vody od láhve dle hodnoty na metru, kam právě voda dopadá.

Takto pokus opakujeme, dokud nezměříme vzdálenost dostřiku vody pro všechny výšky hladin. Láhev poté podložíme krabičkou a provedeme znovu měření.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty

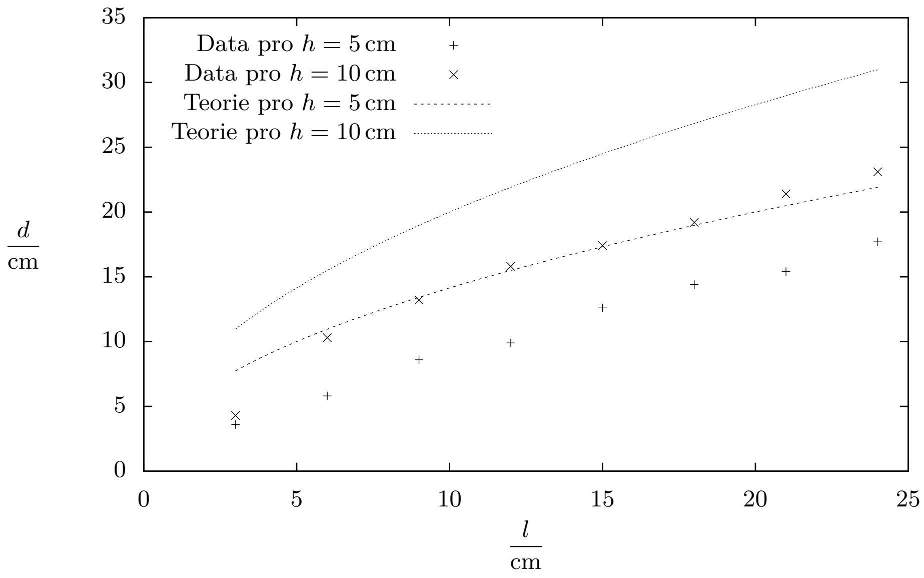
$h = 5\,\mathrm{cm}$			$h = 10\,\mathrm{cm}$		
$\frac{l}{\mathrm{cm}}$	$\frac{d}{\mathrm{cm}}$	$\frac{\Delta d}{\mathrm{cm}}$	$\frac{l}{\mathrm{cm}}$	$\frac{d}{\mathrm{cm}}$	$\frac{\Delta d}{\mathrm{cm}}$
24	17,7	0,1	24	23,1	0,1
21	15,4	0,1	21	21,4	0,1
18	14,4	0,09	18	19,2	0,1
15	12,6	0,08	15	17,4	0,09
12	9,9	0,07	12	15,8	0,09
9	8,6	0,07	9	13,2	0,09
6	5,8	0,05	6	10,3	0,09
3	3,6	0,05	3	4,3	0,06

Naměřené hodnoty můžeme vidět v tabulce 1 a grafu 4.

Diskuse

Z naměřených dat lze vidět, že čím více vody do nádoby nalijeme, tím dále od PET láhve proud vody dostříkne. Je to způsobeno tím, že se v nádobě zvyšuje hydrostatický tlak (více vody tak „tlačí“ na spodnější vrstvy vody blízko dírky), a tím pádem se zvětšuje síla, kterou je proud vody vytlačován z nádoby.

Také je z experimentálně zjištěných hodnot patrné, že čím výše je dírka v nádobě od podložky, tím je opět dostřik proudu vody delší. Logicky, z čím vyšší výšky voda padá, tím delší je čas, než dopadne na podložku. Tím má také proud vody více času, aby se pohyboval vodorovně od nádoby. Tedy jeho dostřik bude delší.



Obr. 4: Grafická reprezentace dat

Podívejme se teď na pár vzorečků – týkají se vodorovného vrhu a okrajově mechaniky kapalin. Při vodorovném vrhu je dostřel tělesa d roven součinu počáteční rychlosti v vrženého tělesa a času t, po který těleso padá,

$$d = vt\,.$$

Rychlost kapaliny v vytékající otvorem v nádobě je závislá na gravitačním zrychlení g a výšce vodního sloupce l nad dírkou,

$$v = \sqrt{2gl}\,.$$

Proud vody padá po vytrysknutí z nádoby ve směru kolmo k podložce díky tíhové síle (gravitaci Země) rovnoměrně zrychleně, dle kinetické rovnice platí

$$h = \frac{1}{2gt^2}\,.$$

Z tohoto vztahu můžeme odvodit rovnici pro čas, za který bude proud vody padat k podložce,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Po dosazení za v a t do první rovnice tak dostáváme

$$d = 2\sqrt{hl}\,.$$

Vidíme, že námi vyvozené závěry byly správné – délka dostřiku vody dírkou z nádoby je závislá pouze na vzdálenosti dírky ode dna nádoby a výšce hladiny vody. Co se týče přesnosti měření, při srovnání obou grafů je patrné, že naše měření bylo dosti nepřesné.

Chyby měření

Jaká bude chyba našich měření vzdáleností d? Nejprve je třeba spočítat relativní odchylky všech měření veličin h a l (relativní odchylka = absolutní odchylka / naměřená hodnota), přičemž měříme metrem s nejmenším dílkem 1 mm, absolutní odchylka jednoho měření je tedy 0,05 cm. Pak sečteme relativní odchylky h a l náležící k danému výpočtu d a součet vydělíme 2. Nakonec tuto relativní odchylku převedeme na odchylku absolutní

$$\text{absolutní odchylka } d = \text{relativní odchylka } d \cdot \text{hodnota } d\,.$$

Spočtené odchylky jsou uvedeny též v tabulce 1.

Správný teoretický výsledek tak nedostáváme ani z hlediska několikanásobného rozmezí absolutní chyby! Kde se mohla tak velká nepřesnost vzít? Největší chyby z hlediska měření jsme se mohli dopustit při určování místa dopadu proudu vodu na podložku. Velké nepříjemnosti nám může způsobit smáčivost vody, např. pokud bychom udělali dírku v nádobě příliš malou, nemusela by nám voda vystřikovat vůbec. I pokud uděláme dírku dostatečně velkou, působí nadále smáčivost vody jako odporová síla k síle vytláčející kapalinu z nádoby a snižuje tak vzdálenost dostřiku vody od nádoby.

Tomáš Havelka
havis@fykos.cz

Úloha V.C ... Precisní váza

5 bodů; průměr 2,56; řešilo 25 studentů

Pokuste se určit velikost obsahu dna vázy. Nádoba měla dno tvaru hvězdy, avšak její stěny byly kolmé na její dno. Měření jsme provedli za vás a to tak, že jsme postupně do nádoby přilévali po 1 dl *vody a zaznamenávali výšku hladiny nad dnem. Výsledky naleznete v tabulce 2. Použijte postup popsaný v Elektrickém příkladě a určete obsah podstavy S. Pozor na jednotky! Výšku jsme měřili v centimetrech, ale objem v decilitrech. Abyste dostali obsah v* cm^2, *je třeba nejdříve hodnoty objemu převést na* cm^3.

Tabulka 2: Závislost objemu vody na výšce hladiny ve váze.

V/dl	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
h/cm	10,5	15,2	19,8	26,3	32,1

Terka Z.

Nejdříve si převedeme naměřené hodnoty na stejné jednotky. Použiji převod $1\,\mathrm{dl} = 0{,}1\,\mathrm{dm}^3 = 100\,\mathrm{cm}^3$.

Pro objem vody ve váze bude platit lineární vztah $V = Sh + c$, kde S je hledaný objem podstavy, h je výška hladiny vody nad dnem a c je nějaká konstanta. Ideálně by měla být nulová (je-li výška hladiny nula, pak i objem je nulový), ale během pokusu mohla být do měření zanesena chyba, v našem případě to lze přisoudit také tomu, že dno vázy nebylo zcela ploché. Pak provedeme lineární regresi metodou nejmenších čtverců a získáme hodnotu obsahu podstavy

$$S = (9{,}16 \pm 0{,}38)\,\mathrm{cm}^2\,.$$