V posledním studijním textu letošního ročníku si zopakujeme několik poznatků z předchozích sérií a doplníme je novými, abychom si následně mohli spočítat základní pohyby v homogenním tíhovém poli.

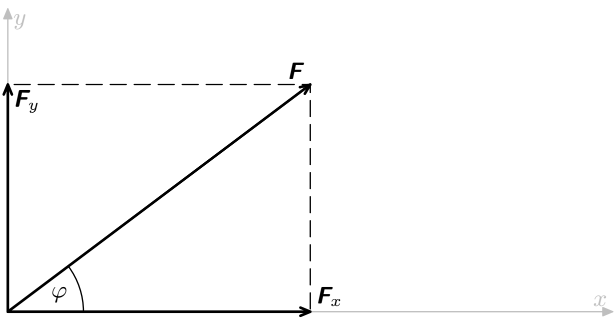
Vektory aneb když jedno číslo nestačí

Abychom zcela vyjádřili veličiny jako hmotnost, teplo či náboj, stačí nám k tomu jediné číslo (s příslušnou jednotkou). Říkáme jim *skalární* veličiny.

Běžně se však setkáváme i s veličinami, kde nám k jejich úplnému popisu jedno číslo (s jednotkou) nestačí – patří mezi ně například poloha, rychlost nebo síla, což jsou *vektorové* veličiny. Mají totiž kromě své velikosti také směr a jelikož nežijeme na přímce, budeme k jejich určení potřebovat čísel více. Naivně si můžeme vektor představit jako v prostoru orientovanou šipku určité délky (např. v případě polohy se konec šipky přímo dotýká příslušného místa, v případě síly šipka ukazuje směrem, jímž síla působí).

K určení vektorové veličiny ve třírozměrném prostoru budeme potřebovat čísla tři. Jaká konkrétně, závisí na zvolené *soustavě souřadnic*. Pro naše účely bude nejvhodnější *kartézská* soustava souřadnic, která je jednoduchá a snadno se v ní vektory sčítají a odčítají.

Kartézská soustava je vytyčena navzájem kolmými směry (osami). Pracujeme-li ve třírozměrném prostoru, zpravidla volíme dva směry vodorovné (označené x, y) a jeden směr svislý (označený z). Ve dvourozměrném prostoru (tedy v rovině, například na papíře) zpravidla volíme směr vodorovný označený x a směr svislý označený y. Dále budeme pracovat pro přehlednost se dvěma rozměry, zobecnění do více rozměrů je přímočaré. Za kladný budeme na svislé ose považovat směr nahoru, na vodorovné ose směr doprava. Směry dolů a doleva budou záporné.



Obr. 1: Rozklad síly $\boldsymbol{F}$ do vodorovného a svislého směru.

Vektorovou veličinu[1] jsme pak schopni rozdělit do jednotlivých směrů podle souřadnicových os. Na obrázku 1 je znázorněno rozložení síly $\boldsymbol{F}$ podél souřadnicových os do vodorovné složky $\boldsymbol{F}_x$ a svislé složky $\boldsymbol{F}_y$. Vodorovná složka $\boldsymbol{F}_x$ má velikost $4\,\mathrm{N}$ a svislá složka $\boldsymbol{F}_y$ má velikost $3\,\mathrm{N}$. Velikost[2] celkové síly $\boldsymbol{F}$ určíme určíme z Pythagorovy věty (velikost vektoru v grafickém znázornění

[1] Vektorové veličiny označujeme tučným písmem, např. $\boldsymbol{F}$. Zejména v rukopise je též běžné označení šipkou nahoře, $\vec{F}$.

[2] Velikost vektorové veličiny $\boldsymbol{F}$ značíme pomocí dvou svislých čar $|\boldsymbol{F}|$ nebo „obyčejným písmem“ F, což odpovídá tomu, že *velikost* vektoru je pouhé jediné číslo (s jednotkou, jde-li o fyzikální veličinu).

odpovídá délce příslušné šipky):

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{|\boldsymbol{F}_x|^2 + |\boldsymbol{F}_y|^2} = \sqrt{(4\,\mathrm{N})^2 + (3\,\mathrm{N})^2} = 5\,\mathrm{N}\,.$$

Pomocí rozkladu do jednotlivých, navzájem kolmých směrů jsme schopni vektorovou veličinu zapsat. Obvykle zapisujeme velikosti jednotlivých složek do ozávorkovaného sloupečku, v našem případě uvedenou sílu zapíšeme

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{N}\,.$$

Stejným způsobem můžeme zapsat i jednotlivé kolmé složky síly, do níž jsme původní sílu $\boldsymbol{F}$ rozložili:

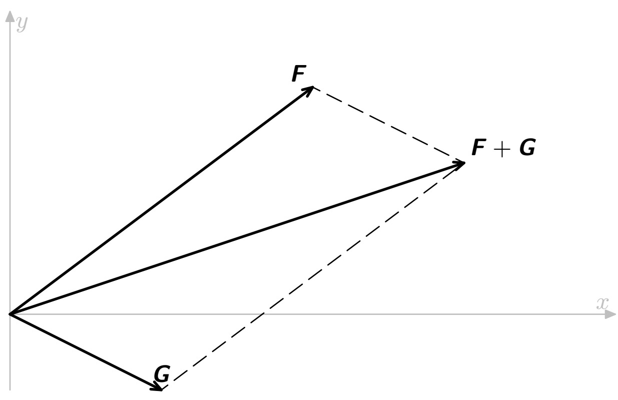
$$\boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} F_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N}; \qquad \boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{N}\,.$$

Vektory můžeme sčítat a odčítat – činíme tak po složkách. Řekněme, že na dané těleso působí ve stejném bodě kromě síly $\boldsymbol{F}$ také síla $\boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{N}\,.$$

Svislá složka síly $\boldsymbol{G}$ je záporná – směřuje tedy dolů. Pokud na dané těleso již nepůsobí žádná další síla, celkovou sílu působící na těleso určíme jako součet sil $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} F_x + G_x \\ F_y + G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{N} + 2\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} + (-1\,\mathrm{N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{N}\,.$$



Obr. 2: Součet vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$.

Součet vektorů lze snadno znázornit graficky (obrázek 2). Šipky představující vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ doplníme na rovnoběžník a v nově vytvořeném vrcholu bude konec šipky představující jejich součet. Nebo si to můžeme představit jako napojování šipek: šipku $\boldsymbol{G}$ přesuneme tak, aby její začátek byl na konci šipky $\boldsymbol{F}$, ale nesmíme s ní při přesunu otáčet, směr musí zůstat stejný. Na konci přesunuté šipky $\boldsymbol{G}$ bude pak i konec šipky pro součet.

Vektory jako takové tedy můžeme sčítat, ne však jejich velikosti. Při výpočtu velikosti součtu musíme opět použít Pythagorovu větu na součty jednotlivých složek:

$$|\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}| = \sqrt{(F_x+G_x)^2+(F_y+G_y)^2} = \sqrt{(6\,\mathrm{N})^2+(2\,\mathrm{N})^2} = \sqrt{40}\,\mathrm{N} \approx 6{,}3\,\mathrm{N}\,.$$

Vraťme se na okamžik ještě k obrázku 1. Známe-li velikost vektoru a úhel, který svírá vektor se souřadnicovými osami, dokážeme snadno spočíst velikosti jeho vodorovné a svislé složky:[3]

$$|\boldsymbol{F}_x| = |\boldsymbol{F}|\cos\varphi\,; \qquad |\boldsymbol{F}_y| = |\boldsymbol{F}|\sin\varphi\,.$$

Pokud jste tak již neučinili, všimněte si, že platí také rovnost $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y$.

Nakonec uveďme ještě jednu důležitou operaci s vektory, a to násobení skalárem, tedy číslem. Je to jednoduché – daným skalárem prostě vynásobíme všechny složky vektoru

$$t\boldsymbol{F} = t\begin{pmatrix}F_x\\F_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}tF_x\\tF_y\end{pmatrix}\,.$$

V grafickém znázornění se vynásobení skalárem t projeví tak, že se šipka představující vektor t-krát prodlouží (a v případě, že je t záporné, bude šipka mířit do opačného směru oproti původnímu).

Násobení skalárem nám umožňuje zapsat vektorový vztah pro rovnoměrný přímočarý pohyb. Je-li v čase 0 poloha předmětu $\boldsymbol{r}_0$ a pohybuje-li se předmět stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$, v čase t bude jeho poloha

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\,t\,.$$

Použili jsme zde násobení vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ s časem t (což je skalár), a dostali jsme tak změnu polohy za dobu t.

Gravitace a pády vektorově

Pokud se pohybujeme poměrně blízko zemského povrchu, můžeme ve výpočtech považovat gravitační pole za homogenní. To znamená, že všechna tělesa upuštěná ve stejný čas padají všude „stejně rychle“, tj. se stejným gravitačním zrychlením $\boldsymbol{g}$. Jeho velikost se běžně udává $|\boldsymbol{g}| = g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, avšak vzhledem k tomu, že Země není dokonale kulatá, na různých místech planety se g liší.

V kartézské soustavě souřadnic ve třech rozměrech, popsané výše, máme

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-9{,}81\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

– tíhové zrychlení působí pouze svisle dolů, vodorovné složky jsou nulové.

Zrychlení udává změnu rychlosti v čase. Je-li zrychlení $\boldsymbol{a}$ (obecné, ne nutně gravitační) neměnné a má-li v nulovém čase těleso rychlost $\boldsymbol{v}_0$, v čase t rychlost bude

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t\boldsymbol{a}\,.$$

[3] Goniometrickým funkcím sin a cos jsme se věnovali v seriálovém textu ke třetí sérii, viz `http://vyfuk.fykos.cz/vyfuk/rocnik1/serie3.pdf`.

Převedením „profláknutého“ vzorečku pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu $s = \frac{1}{2}at^2$ (ten si dokážeme níže) do vektorové formy dostáváme vztah pro „polohu“ předmětu. Nachází-li se těleso v čase 0 v poloze $\boldsymbol{r}_0$, jeho rychlost je v čase 0 nulová a těleso je vystaveno konstantnímu zrychlení a, v čase t bude jeho poloha

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\, t^2 .$$

Dosadíme-li za $\boldsymbol{a}$ gravitační zrychlení $\boldsymbol{g}$, dostaneme vzorec pro polohu tělesa při volném pádu z klidu.

Příjemnou vlastností uvedených vektorových veličin je, že určitá složka jedné veličiny působí pouze na stejnou složku veličiny související. Tedy například svislá složka zrychlení nemá žádný vliv na polohu ve vodorovném směru. Toho můžeme využít.

Odvodíme si vztah pro polohu při vodorovném vrhu. Hodíme-li nějaký předmět ve vodorovném směru, jeho vodorovná složka rychlosti bude pořád stejná, protože tíhové zrychlení je v tomto směru nulové. Svislá složka polohy se pak bude chovat úplně stejně jako při volném pádu z klidu. Poloha předmětu v čase t od vržení vodorovnou rychlostí v z místa $\boldsymbol{r}_0$ bude

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\; t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 .$$

V explicitním tvaru po složkách můžeme vztah zapsat (ve dvou rozměrech)

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{0x} \\ r_{0y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 .$$

Důležité je, že v tomto případě byla na počátku svislá složka rychlosti nulová, $v_y = 0$.

V případě, že bude předmět vržen zčásti i ve svislém směru, je potřeba nalézt čas t_0, ve kterém bude svislá složka rychlosti nulová (ten může formálně vyjít i záporný, to když mrštíme předmět dolů, což ale nevadí). Tento čas musíme odečíst od času uplynulého od vržení, takže dostaneme

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\; (t - t_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}(t - t_0)^2 .$$

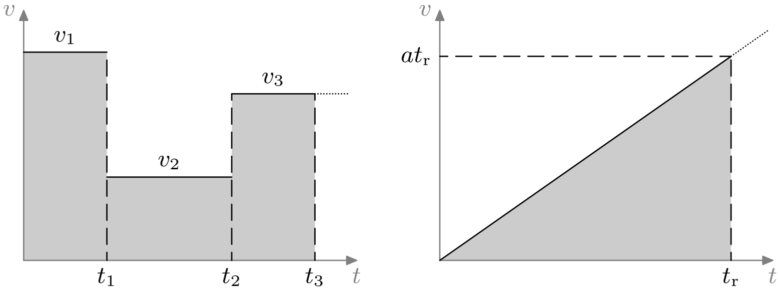
Dráha přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu

Ukažme si pro lepší vhled intuitivní odvození vzorečku $s(t) = \frac{1}{2}at^2$, jenž popisuje dráhu rovnoměrně zrychleného předmětu, který je v nulovém čase v klidu. Tato představa vám kromě objasnění toho, co ve školách bohužel až příliš často „padá z nebe“, může pomoci při řešení seriálové úlohy.

Poněvadž se budeme zabývat přímočarým pohybem, tedy pohybem na přímce, nebudeme zde potřebovat vektorový formalismus představený výše.

Při rovnoměrném pohybu je rychlost konstantní, pro výpočet dráhy nám v takovém případě stačí pouze vynásobit rychlost časem, po nějž pohyb probíhal. Při zrychleném pohybu nastane potíž, protože rychlost se při něm mění.

Na obrázku 3 vlevo se nachází graf rychlosti po částech rovnoměrného pohybu, kdy v časovém intervalu $(0, t_1)$ se těleso pohybuje rychlostí v_1, pak do něj (zepředu) něco narazí a rychlost se změní na v_2. V čase t_2 do něj opět něco vrazí (pro změnu zezadu), načež se těleso pohybuje rychlostí v_3. Jakou dráhu celkem těleso urazí mezi časy 0 a t_3?



Obr. 3: Graf rychlosti v závislosti na čase po částech rovnoměrného pohybu (vlevo) a rovnoměrně zrychleného pohybu (vpravo). Vybarvená plocha odpovídá dráze.

Inu, je to jednoduché – stačí nám sečíst tři dílčí dráhy, které těleso urazilo v jednotlivých rovnoměrných pohybech

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = v_1 t_t + v_2(t_2 - t_1) + v_3(t_3 - t_2)\,.$$

Všimněte si, že dílčí dráha při rovnoměrně zrychleném pohybu odpovídá obsahu obdélníka, jehož strany odpovídají rychlosti a době pohybu. Celková dráha při po částech rovnoměrném pohybu je rovna součtu obsahu těchto obdélníků (vybarvená plocha na obr. 3 vlevo). Je to plocha *nacházející se pod grafem rychlosti* (míněno pod onou čarou, která představuje rychlost). Zmíněný princip lze použít obecně pro přímočaré pohyby v jednom směru. Máme-li graf rychlosti v závislosti na čase, dráhu určíme jako obsah plochy pod grafem.

Nechť je rychlost v čase $t = 0$ nulová a pak těleso zrychluje s konstantním zrychlením a. V čase t je tedy rychlost $v = at$. Graf rychlosti při takovém pohybu je přímka procházející počátkem (obrázek 3 vpravo). Jakou dráhu těleso urazí těleso mezi časy 0 a t_{r}?

Vybarvená plocha pod grafem je ohraničena pravoúhlým trojúhelníkem s odvěsnami t_{r} (čas) a at_{r} (rychlost v koncovém čase). Dosazením do vzorce pro obsah pravoúhlého trojúhelníka dostáváme dráhu v čase t_{r},

$$s(t_{\mathrm{r}}) = \frac{1}{2} t_{\mathrm{r}}(at_{\mathrm{r}}) = \frac{1}{2} a t_{\mathrm{r}}^2\,,$$

což je očekávaný výsledek.

Kořeny kvadratické rovnice

K řešení úloh budete potřebovat vyřešit kvadratickou rovnici. To je rovnice, která obsahuje neznámou v první a druhé mocnině a jež se dá zapsat ve tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0\,,$$

kde a, b, c mohou být libovolná, v našem případě reálná čísla a x je neznámá.

Taková rovnice může mít až dvě reálná řešení, označme je x_+ a x_-. Nebudeme si je zde odvozovat (ač to není nic zvlášť složitého), pouze uvedeme vzoreček pro jejich výpočet:

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \qquad x_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

V případě, že je číslo $D = b^2 - 4ac$ záporné, nelze z něj spočíst reálnou druhou odmocninu, a taková kvadratická rovnice nemá žádné reálné řešení. Je-li $D = 0$, kořeny x_+ a x_- splynou a dostáváme tak pouze jedno řešení.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.