Úloha VI.C ... Granáty a kovadlina

8 bodů; průměr 5,43; řešilo 14 studentů

a) Ověřte, že čísla x_+ a x_- vypočtená dle vzorců v seriálovém textu skutečně řeší kvadratickou rovnici.

b) Královna Alžběta II. si nechala na oslavu svých 86. narozenin vypálit z londýnského Toweru 62 dělových salv. Jak daleko děla dostřelila? Jak dlouho dělostřelecké projektily poletí? Děla střílela pod úhlem $\alpha = 30^\circ$, úsťová rychlost projektilů dosahovala velikosti $v = 400\,\mathrm{m/s}$ a místo dopadu bylo o $h = 30\,\mathrm{m}$ níže, než se nacházela děla. Britská dělostřelecká technologie je tak dokonalá, že na projektily nepůsobí odpor vzduchu.

c) Fidel Alejandro Castro Ruz je proslulý množstvím atentátů, jimž se mu podařilo uniknout. Kdysi si u okna v jednom z nižších pater jistého havanského ministerstva vychutnával svůj oblíbený doutník. Trochu se z okna vyklonil, aby vyklepal popel, čehož neváhal využít špion nacházející se nad ním a po vzoru amerických kreslených filmů upustil na Fidela kovadlinu. Avšak než to stihl udělat, El Commandante již vykloněný nebyl, takže kovadlina kolem okna pouze proletěla. Bystrým okem revolucionáře Fidel zpozoroval, že před oknem vysokým $120\,\mathrm{cm}$ kovadlina proletěla za $0{,}12\,\mathrm{s}$. Kolik pater nad ním se atentátník nacházel, je-li výška jednoho patra $3\,\mathrm{m}$?

Kořeny kvadratické rovnice

Správnost řešení ověříme dosazením do původní rovnice

$$\begin{aligned}
L &= a\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c \\
&= \frac{2b^2-4ac\mp 2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a} + \frac{-b^2\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c \\
&= \frac{b^2\mp b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b^2\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - c + c \\
&= 0 = P\,.
\end{aligned}$$

Granáty

Pro řešení vyjdeme z vektorového popisu rovnoměrně zrychleného pohybu

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2\,, \tag{1}$$

kde počáteční poloha a rychlost jsou

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix}\,.$$

Souřadná soustava má počátek u paty Toweru a vektor $\boldsymbol{g}$ je stejný jako v textu seriálu. Kdybychom znali čas dopadu t_d granátu na zem, tak bychom jej pouze dosadili do vztahu (1) a zjistili x-ovou složku vektoru $\boldsymbol{r}$.

Čas dopadu ještě neznáme, víme jen, že tato událost nastane, když je y-ová složka vektoru $\boldsymbol{r}$ nulová. Jak jsme si řekli v textu seriálu, v tomto případě se složky vektorů neovlivňují navzájem, takže čas dopadu určíme z y-ové složky rovnice.

$$\boldsymbol{r}(t_\mathrm{d}) = \begin{pmatrix} ? \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h + (v \sin\alpha) t_\mathrm{d} - \frac{1}{2} g t_\mathrm{d}^2 = 0\,.$$

Toto je kvadratická rovnice, jejíž kořeny určíme dle dobře známých vzorečků

$$t_{\mathrm{d}+} = \frac{-v\sin\alpha + \sqrt{v^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{-g} \quad \text{a} \quad t_{\mathrm{d}-} = \frac{-v\sin\alpha - \sqrt{v^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{-g}\,.$$

Po dosazení konkrétních hodnot ze zadání, zjistíme, že $t_{\mathrm{d}+} \approx -0{,}2\,\mathrm{s}$ a $t_{\mathrm{d}-} \approx 40{,}9\,\mathrm{s}$. Záporné řešení sice formálně řeší naši rovnici, nicméně neodpovídá to realitě (znamenalo by to, že projektil v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ hlavní jen prolétal, nikoli se do pohybu teprve uváděl).

Se znalostí času dopadu již snadno zjistíme i jeho místo díky vztahu (1).

$$l = r_x(t_{\mathrm{d}-}) = (v\cos\alpha) t_{\mathrm{d}-} = \frac{v^2 \sin(2\alpha)/2 + v\cos\alpha\sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g}\,.$$

S hodnotami ze zadání po dosazení vyjde $l \approx 14{,}2\,\mathrm{km}$.

Vzhledem k (ne)přesnosti zadaných veličin je vhodnou odpovědí na problém, že za daných předpokladů granát dopadne 14 km od Toweru za 41 s.

Kovadlina

Pokus o atentát se odehrává na přímce, tudíž budeme počítat „jen s čísly“, přičemž směr svisle dolů považujme za kladný. Než kovadlina dopadne k oknu, letí nějaký čas t_n a horní hranu okna tedy míjí rychlostí

$$v_0 = g t_\mathrm{n} \tag{2}$$

a od okamžiku upuštění musela již urazit

$$s_\mathrm{n} = \frac{1}{2} g t_\mathrm{n}^2\,. \tag{3}$$

Zkombinováním znalostí ze vztahů (2) a (3) zjistíme, že $v_0 = \sqrt{2gs_\mathrm{n}}$ (tento vztah bychom mohli odvodit i ze zákona zachování energie).

Když překvapený Fidel sleduje letící kovadlinu, platí pro její pohyb

$$y(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = \sqrt{2gs_\mathrm{n}}\, t + \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Je-li výška okna obecně h, tak za pozorovaný čas pádu T máme

$$h = \sqrt{2gs_\mathrm{n}}\, T + \frac{1}{2} g T^2 \quad \Rightarrow \quad s_\mathrm{n} = \frac{1}{2g} \left(\frac{h - \frac{1}{2} g T^2}{T} \right)^2\,.$$

Když dosadíme skutečné rozměry havanské budovy, vyjde délka pádu k horní hraně okna $s_\mathrm{n} \approx 4{,}5\,\mathrm{m}$. Při výšce patra $3\,\mathrm{m}$ a rozumné výšce parapetů to znamená, že atentátník házel z okna o dvě patra výše.

Michal Koutný
`michal@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.