Úloha VI.5 ... Clevelandské děti

7 bodů; (chybí statistiky)

Na letním táboře děti hrály hru, při které dvojice vybíhaly v intervalech po 5 s z počátečního stanoviště na dvě kolmo umístěná stanoviště ve stejných vzdálenostech $l = l' = 50\,\mathrm{m}$ od počátečního, tam si vzaly lísteček a běžely zpět na počáteční stanoviště. Ačkoliv všechny děti umí běhat rychlostí $c = 2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, ke všeobecnému překvapení doběhl jeden z každé dvojice zpět dříve.

1. *Organizátoři zjistili důvod: jedna trasa vede mírně do kopce, zde tedy děti běhají pouze rychlostí $c' = 2{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Na jakou vzdálenost musí trasu do kopce změnit, aby se potkala vždy nějaká dvojice a stanoviště se posouvalo co nejméně? Na jakou vzdálenost se musí stanoviště posunout, aby se setkala původní dvojice?*

2. *Ve druhé fázi se hra přesunula na louku, kde opět všechny děti běhaly rychlostí c. Naneštěstí začal ve směru jedné trasy foukat vítr, který jim po obou směrech měnil rychlost o $v = 0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Kolikrát déle trvala dětem tato cesta? Výsledek vyjádřete nejdříve obecně a až poté dosaďte číselné hodnoty.*

3. *Vítr však (jakožto boční) ovlivnil i děti běhající kolmo k němu. Kolikrát déle trvala cesta těmto dětem? Setkají se na startovním stanovišti i v tomto případě?*

Poznámka: Podobně jako děti běhající ve větru se chová i světlo. Světelné vlny cestují ve všech prostředích konečnou rychlostí, a proto v některých experimentech (např. v Michelson-Morleyově) dochází k tzv. interferenci. Zjištění, že světlo interferuje stále stejně nezávisle na podmínkách (ne jako naše děti) vedlo k velké revoluci ve vnímání fyziků a např. i k zavedení speciální teorie relativity.

1. Nejdříve si spočítáme, o kolik bychom museli stanoviště posunout, aby se setkala původní dvojice. Aby se tak stalo, musí oběma dětem cesta trvat stejnou dobu t. Těm utíkajícím po rovince cesta trvá
$$t = \frac{l}{c}\,,$$
a těm utíkajícím mírně do kopce cesta trvá
$$t' = \frac{l'}{c'}\,.$$
Chceme-li, aby byly oba časy stejné, musíme je dát do rovnosti. Vyjádříme si pak potřebné l', které musíme nastavit.
$$l' = \frac{lc'}{c}$$
Z toho po dosazení hodnot ze zadání zjistíme, že se stanoviště musí posunout na vzdálenost 46 m, tedy o 4 m blíže počátečnímu stanovišti.

   Nyní se podívejme na případ, kdy se setká dítě běžící do kopce s dítětem, které vyběhlo o $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$ později. Aby se setkaly, musela cesta rychlejšímu dítěti trvat o Δt méně, tedy $t = t' - \Delta t$, kde t je čas rychlejšího a t' pomalejšího dítěte.

Máme tedy rovnici

$$
\begin{aligned}
t &= t' - \Delta t\,, \\
\frac{2l}{c} &= \frac{2l'}{c'} - \Delta t\,, \\
l' &= \frac{lc'}{c} + \frac{c'\Delta t}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Po dosazení zjistíme, že pomalejším dětem musíme prodloužit trasu na 51,75 m, tedy posunout cíl o 1,75 m dál.

Jednoduchou úvahou zjistíme, že nemá smysl zkoumat další případy – pokud bychom chtěli, aby se pomalejší dítě setkalo s rychlejším dítětem z předchozí skupiny, museli bychom stanoviště posouvat určitě ještě blíže, než kdyby se mělo setkat s dítětem ze stejné skupiny. Podobně, kdybychom chtěli, aby se setkalo s dítětem z o 2 pozdější skupiny, museli bychom stanoviště umístit dál, než když se má setkat s dítětem z o 1 pozdější skupiny.

Aby se tedy setkala libovolná dvojice, musíme stanoviště posunout o 1,75 m dál. Aby se setkala dvojice původní, musíme stanoviště posunout o 4 m blíže.

2. Cestou tam mají děti rychlost $c + v$, cestou zpět $c - v$. Celkově jim tak trasa potrvá

$$
t = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = l\,\frac{c-v+c+v}{(c+v)(c-v)} = l\,\frac{2c}{c^2-v^2}\,.
$$

Abychom zjistili, kolikrát delší čas to je, musíme ho vydělit původním časem $t_\mathrm{p} = 2l/c$. Dostáváme

$$
\frac{t}{t_\mathrm{p}} = \frac{l\,\dfrac{2c}{c^2-v^2}}{\dfrac{2l}{c}} = \frac{c^2}{c^2-v^2}\,.
$$

Po dosazení zjistíme, že čas se změní asi o 4 %, neboli bude přibližně 1,04krát větší.

3. Musíme zjistit, jak děti budou běhat s bočním větrem. Budou se snažit běžet rovně i přes boční vítr, aby se dostaly na cílové stanoviště v co nejkratší době. Proto ale musí běžet trochu do strany, aby vyrovnaly vítr, který je tlačí opačným směrem do boku.

Sestrojíme si tedy trojúhelník s rychlostmi. Máme tak pravoúhlý trojúhelník s přeponou c a odvěsnami v a v_x, kde v_x je rychlost v přímém směru, c je rychlost dítěte a v je rychlost větru. Z něj jednoduše určíme pomocí Pythagorovy věty rychlost na spojnici stanoviště a cíle

$$
v_\mathrm{x} = \sqrt{c^2 - v^2}\,.
$$

Je důležité uvědomit si, že děti mají tuto rychlost při běhu tam i zpátky, neboť je vítr tlačí pořád stejně, akorát do opačného boku (takže při běhu zpět změní orientaci svého běhu, neboť vítr fouká z druhé strany).

Cesta jim potrvá čas

$$
t = \frac{2l}{v_\mathrm{x}} = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}}\,.
$$

Chceme opět zjistit poměr, takže ji vydělíme původním časem

$$\frac{t}{t_\mathrm{p}} = \frac{\dfrac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}}{\dfrac{2l}{c}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,.$$

Po dosazení zjistíme, že jim to potrvá asi o 2 % delší čas, neboli čas se zvedne na 1,02násobek původní hodnoty.

To, zda se zde vůbec potkají nějaké děti, určíme následujícím trikem. Víme, že jedné skupince trvá cesta čas $1{,}04t$, druhé $1{,}02t$. Aby se potkaly, musí být rozdíl časů celočíselným násobkem Δt, tj. času, po kterém dvojice vybíhají.

Máme tak rovnici

$$t_\mathrm{p}\left(\frac{c^2}{c^2 - v^2} - \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right) = k\Delta t\,,$$

ze které vyjádříme k a dosadíme $t_\mathrm{p} = 2l/c$

$$k = \frac{2l}{\Delta t}\left(\frac{c}{c^2 - v^2} - \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right).$$

Po dosazení nám vyjde

$$k \doteq 0{,}168\,,$$

což není celé číslo, proto se dvojice nesetkají a časový rozdíl mezi nimi se bude pokaždé lišit.

Robert Gemrot
robert@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.