

## Úloha V.3 ... Div světa

6 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček si šel po náročné licitaci sednout do kavárny a přemýšlel, kam by se na svém létajícím koberci vydal. Než mu obsluha přinesla čaj, trochu se nudil, a tak si z kostek cukru stavěl pyramidu. V tom ho napadlo perfektní místo – Cheopsova pyramida v Egyptě! Výfuček však chtěl být zodpovědný turista a o své destinaci si předem něco zjistit. Přemýšlel tak nad tím, jakou nejmenší práci vykonal, když stavěl svůj model pyramidy z kostek cukru, aby to pak mohl porovnat se skutečnou pyramidou.

Vypočítejte minimální Výfučkovu práci, jestliže v nejvyšší řadě pyramidy byla jedna kostka, ve druhé nejvyšší dvě kostky, ve třetí tři atd. Pyramida byla sestavena ze 105 kostek a jedna kostka vážila podle údajů výrobce 5 g a měla hranu 1 cm. Zpočátku všechny kostky ležely na stole v řadě.

Začneme tím, že si spočítáme, kolik má naše pyramida pater. To učiníme jednoduše: sčítáme posloupnost  $1 + 2 + 3 + \dots$ , až narazíme na součet 105 a spočítáme si, kolik sčítanců jsme potřebovali. Kdybychom ale měli kostek více, tento způsob by byl velice neefektivní, proto si ukážeme elegantnější matematický zápis tohoto postupu. Pyramidu si můžeme představit jako rovnoramenný trojúhelník. Když si nyní představíme totožnou pyramidu, obrátíme ji vzhůru nohama a položíme vedle té stávající, dostaneme rovnoběžník. Jeho obsah potom spočítáme jednoduše – bude to součin velikosti jeho strany a jeho výšky – výška je počet pater ( $n$ ) a jeho strana potom  $(n + 1)$ . Obsah pyramidy, respektive počet kostek, potom můžeme napsat jako

$$\frac{n(n+1)}{2} = 105$$

a z řešení kvadratické rovnice tak zjistíme, že  $n = 14$ .

Nyní si dokážeme spočítat, jaká byla celková výška, do které jsme museli vyzvednout všechny kostky. Prvních 14 kostek jsme nemuseli zvedat nikam, ty pouze ležely na stole. Dalších třináct jsme museli zvednout do výšky jedné kostky, dvanáct do výšky dvou kostek, až poslední díl pyramidy jsme museli zvednout do výšky třinácti kostek. Celková vzdálenost, do které jsme museli kostky zvednout, tak je

$$\begin{aligned} a &= (13 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 13) \text{ kostka} \cdot \text{cm} \\ &= 455 \text{ kostka} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Můžete si všimnout, že používáme jakousi podivnou jednotku kostka·cm. To z jednoho jednoduchého důvodu – při tomto výpočtu násobíme počet kostek a výšku v cm, proto nám kostky z tohoto výpočtu jednoduše nemohou vypadnout. Význam této zvláštnosti uvidíte zřetelněji ještě v závěrečném výpočtu.

Výšku, do které musíme kostky zvednout, zohledňujeme z toho důvodu, že jedinou silou, kterou při stavění pyramidy překonáváme, je síla tíhová, která na každou z kostek působí. Tu vypočítáme jako  $F_g = mg$ , kde  $m$  je hmotnost kostek cukru a  $g \doteq 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  je tíhové zrychlení, které vyčteme z tabulek. Celkovou vykonanou práci již spočítáme jednoduše jako součin vynaložené síly a dráhy, po kterou jsme tuto sílu překonávali. Musíme si dát pozor, abychom dosazovali v základních jednotkách, tzn.  $a = 4,55 \text{ kostka} \cdot \text{m}$ ,  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  a  $m = 0,005 \text{ kg} \cdot \text{kostka}^{-1}$ . Můžete si všimnout, že do vzorce nedosazujeme hmotnost všech kostek, ale pouze hmotnost jedné (nesmíme to pak zapomenout uvést v jednotce této hmotnosti). Platí tak

$$W = amg = 4,55 \text{ m} \cdot \text{kostka} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,005 \text{ kg} \cdot \text{kostka}^{-1},$$

z čehož dostaneme, že Výfuček musel vykonat práci přibližně  $W \doteq 0,22 \text{ J}$ .

*Karolína Letochová*  
kaja@vyfuk.mff.cuni.cz

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.