

Úloha IV.5 ... Kepler volá domů

7 bodů; průměr 4,65; řešilo 26 studentů

Přátelé Výfuku se rozhodli, že prozkoumají trpasličí planetku UCHO-373. Rozdělili se do dvou skupin, přičemž jedna přistála na povrchu a zjistila, že planetka má poloměr R a hmotnost m , druhá v průzkumném modulu zaujala stabilní kruhovou oběžnou dráhu ve vzdálenosti $3R$ od středu planetky.

- Načrtněte obrázek oběhu družice a vypočtete její oběžnou rychlost.

Výzkumnou misi však přerušil zbloudilý asteroid, který narazil do Výfucího průzkumného modulu. Zpomalil ho natolik, že začal obíhat po elipse tak, že v nejbližším bodě oběhu byl těsně u povrchu planety a v nejvzdálenějším bodě v původní vzdálenosti $3R$ (od jejího středu).

- Načrtněte obrázek tohoto oběhu a vyznačte hlavní a vedlejší poloosy a ohniska.

Bohužel se důležité přístroje v modulu nárazem asteroidu rozbily, a tak přátelé Výfuku v modulu neznají svou oběžnou dobu. Naštěstí ti, kteří zůstali na planetce, ví, že **na obzoru** byl výzkumný modul od nich vzdálen $1,7R$ a do **nadhlavníku** potom dorazil za 8,0 h. Přátelé Výfuku na planetce se nachází v místě protilehlém bodu, kde modul prolétává nejbliž planetce.

- Jak dlouho trval družici jeden oblet? Pro jednoduchost můžete (a nemusíte) předpokládat, že ohnisko je ve středu planety.

K výpočtu můžete využít fakt, že dle druhého Keplerova zákona¹ je tzv. plošná rychlost (plocha, kterou za čas opíše spojnice modulu a planety) modulu konstantní. Také využijte fakt, že obsah elipsy je roven πab , kde a a b jsou hlavní resp. vedlejší poloosy elipsy.

Po zjištění oběžné doby se přátelé Výfuku z planetky opět setkali se zbytkem týmu v modulu a nyní se chtějí vrátit zpátky ke své mateřské lodi, která planetku taktéž obíhá. Bohužel s mateřskou lodí ztratili komunikaci, a tak jen vyzozorovali, že její oběžná doba je 48 h. Znají ale všechny Keplerovy zákony, a tak si poradí.

- Aby modulu na cestě k lodi vystačilo palivo, musí být hlavní poloosa dráhy mateřské lodi kratší než dvojnásobek hlavní poloosy modulu. Dostanou se přátelé Výfuku domů?
- Náčrtek s vyznačenými údaji můžeme vidět na obrázku 1.

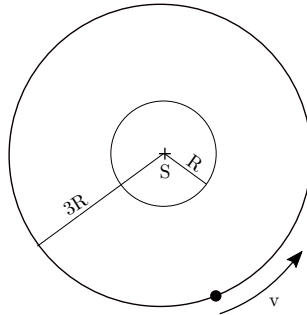
Oběžnou rychlost v družice o hmotnosti M vypočítáme z toho, že dostředivá síla F_o , která působí na družici a způsobuje její pohyb po kružnici o poloměru $3R$, musí být rovna gravitační síle působící mezi družicí a planetkou, jejíž velikost zjistíme z Newtonova zákona, tedy

$$F_o = F_g,$$

$$\frac{Mv^2}{3R} = \frac{GmM}{(3R)^2},$$

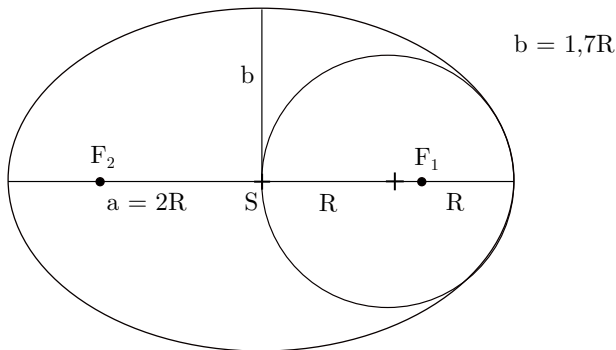
$$v = \sqrt{\frac{Gm}{3R}}.$$

¹https://cs.wikipedia.org/wiki/Keplerovy_zakony#2._Kepleruv_zakon



Obr. 1: Původní neporušená kruhová oběžná dráha.

- Náčrtek tohoto nového oběhu můžeme vidět na obrázku 2. Pozn.: hlavní poloosa je úsečka a procházející středem a ohniskem F_1 nebo F_2 (jsou dvě), která končí dotykem elipsy. Vedlejší poloosa je vyznačená úsečka b kolmá na a (jsou také dvě, ale vyznačili jsme jen jednu).



Obr. 2: Nová oběžná dráha modulu.

Bude pro nás důležité, že hlavní poloosa má délku $a = 2R$ (neboť v nejbližším bodě je družice vzdálena R a v nejdálenějším $3R$).

- To, že na obzoru byli přátelé vzdáleni $1,7R$, znamená, že vedlejší poloosa b má délku $b = 1,7R$ (viz náčrtek 2). Plochu elipsy tedy spočteme jako

$$S = \pi ab = \pi \cdot 2R \cdot 1,7R = 3,4\pi R^2.$$

Pojďme se nyní soustředit na trasu přátel Výfuku v modulu. Víme, že z vedlejšího vrcholu elipsy (když byla družice na obzoru) docestovali za čas t do hlavního vrcholu elipsy (když byla družice v nadhlavníku). Ujeli tedy jistou dráhu, která odpovídá nějaké ploše S_1 z elipsy. Velikost této plochy potřebujeme zjistit, abychom mohli určit plošnou rychlost, která je z druhého Keplerova zákona konstantní.

Plocha S_1 je plocha opsaná průvodičem družice, tedy spojnicí ohniska elipsy a družice. Rozdělme si ji na dvě části:

- Plocha od obzoru k nadhlavníku je rovna čtvrtině obsahu elipsy, tj. $0,85\pi R^2$.
- Zbylá plocha je tvořena pravoúhlým trojúhelníkem s přeponou průvodičem a odvěsnami b a spojnicí S a F_1 . Použijeme však aproximaci ze zadání, takže počítáme obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami b a R . Ten lze vypočítat následovně:

$$\frac{1}{2} \cdot 1,7R \cdot R = 0,85R^2.$$

Plocha S_1 má tedy následující obsah:

$$S_1 = 0,85\pi R^2 + 0,85R^2 = 0,85R^2(\pi + 1).$$

Plošnou rychlost družice w zjistíme jednoduchým vydělením plochy časem

$$w = \frac{S_1}{t}.$$

Nyní se ptáme, za jaký čas t_c při této konstantní plošné rychlosti urazí družice celou plochu S , tedy

$$wt_c = S \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{S}{w} = \frac{St}{S_1} = \frac{3,4\pi R^2 \cdot 8 \text{ h}}{0,85R^2(\pi + 1)} \doteq 24,3 \text{ h}.$$

- Využijeme třetího Keplerova zákona. Ten ve zjednodušené formě říká, že

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3},$$

kde $T_{1,2}$ jsou oběžné doby dvou objektů kolem jednoho centrálního a $a_{1,2}$ jsou jejich hlavní poloosy. V našem případě obíhá modul a mateřská loď kolem planety, zákon lze tedy použít. Můžeme vyjádřit poměr poloos a_1/a_2

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}},$$

do čehož už dosadíme zjištěné výsledky (T_1 loď, $T_2 = t_c$ pro družici, resp. modul)

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt[3]{\frac{(48 \text{ h})^2}{(24,3 \text{ h})^2}} \doteq 1,6.$$

Vidíme tedy, že hlavní poloosa lodě a_1 je kratší, než dvojnásobek hlavní poloosy modulu, neboť $a_1 \doteq 1,6a_2$. Přátelé Výfuku se dostanou domů.

Robert Gemrot

robert@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.