Úloha II.5 ... Jak funguje jojo

7 bodů; průměr 3,00; řešilo 23 studentů

Jindra viděl zajímavé triky s jojem a hned začal přemýšlet, jak vlastně fungují z fyzikálního hlediska. Mějme tedy jojo, neboli těleso ve tvaru dvou válců o poloměru $R = 2{,}5\,\mathrm{cm}$, jejichž středy spojuje osa se zanedbatelnou hmotností. Každý z disků váží $m = 50\,\mathrm{g}$ a provázek má délku $l = 1{,}00\,\mathrm{m}$.[1]

1. *Jojo se jistě dá do otáčení. K charakterizaci otáčivého pohybu je užitečné znát tzv. kinetickou energii rotace joja E_k. Kinetickou energii rotujícího válce lze vyjádřit jako $E_\mathrm{k} = MR^2\omega^2/4$, kde M je jeho hmotnost a ω úhlová rychlost. Vyjádřete tuto energii pro jojo tak, aby nezávisela na rychlosti úhlové, nýbrž obvodové.*
2. *Když jojo pustíme směrem dolů, začne se provázek z osy odmotávat. Jakou úhlovou rychlost bude mít jojo těsně předtím, než dorazí na konec provázku? Poloměr osy, která spojuje středy válců a na které je namotán provázek, je $r = 0{,}5\,\mathrm{cm}$.*
3. *Když jojo narazí na konec provázku, jeho posuvný pohyb se zastaví a zůstane mu pouze úhlová rychlost. Poté se hned začne postupně zase namotávat směrem nahoru, než se ve výšce h úplně zastaví. Jak velká bude tato výška?*
4. *Jakou počáteční rychlostí v_0 bychom museli jojo hodit, aby se vrátilo do původní výšky (do ruky)? Myslíme tím takové hození, u kterého se bude jojo stále odmotávat z provázku bez podkluzování, jen s počáteční rychlostí v_0.*

1. Jelikož chceme, aby energie nezávisela na úhlové rychlosti, nýbrž na obvodové, musíme najít vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí, který pak dosadíme za úhlovou rychlost. Tento vztah můžeme nalézt například v tabulkách nebo na něj přijdeme pomocí rozměrové analýzy:
$$\omega = \frac{v}{R}\,,$$
kde ω je úhlová rychlost, v obvodová rychlost a R vzdálenost od osy otáčení. Tento vztah tedy můžeme nyní dosadit do zadaného vzorce pro výpočet energie:
$$E_\mathrm{r} = MR^2\frac{\omega^2}{4} = MR^2\frac{v^2}{4R^2} = \frac{1}{4}Mv^2\,.$$
Protože je však jojo složeno ze dvou válců o hmotnosti m a hmotnost jejich spojovací osy je zanedbatelná, vztah můžeme dokončit:
$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{4}(2m)v^2 = \frac{1}{2}mv^2\,.$$
2. Nejdůležitější je si uvědomit, že při pádu joja platí zákon zachování mechanické energie (nedochází ke tření nebo jiným ztrátám). Celkový součet energie v průběhu děje tak musí být konstantní. Porovnejme tedy energii na začátku děje, kdy jojo vypustíme z ruky, a v bodě, kdy je jojo plně odmotané. Potenciální energie, kterou má jojo před odmotáváním, se proto musí rovnat součtu posuvné a rotační energie ve chvíli, kdy dorazí na konec provázku. Toto zjištění můžeme vyjádřit následovně:
$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{r}\,,$$

[1] Hmotnost provázku zanedbáme.

kde E_p je potenciální energie, E_k je kinetická (translační) energie a E_r je rotační energie joja. Potenciální energii E_p můžeme vyjádřit z její definice:

$$E_\mathrm{p} = 2mgl\,,$$

kde l odpovídá délce provázku a dvojka opět pochází ze stavby joja.

Výraz $2m$ pouze značí hmotnost celého tělesa. Za posuvnou energii joja můžeme dosadit taktéž definiční vztah:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(2m)v^2 = mv^2\,.$$

Je zřejmé, že jojo bude vždy na konci odmotané části provázku. Posuvná rychlost joja pak musí odpovídat rychlosti, kterou se odmotává provázek. Tuto rychlost můžeme vyjádřit pomocí úhlové rychlosti joja a poloměru otáčení (menšího poloměru joja, tj. poloměru středové osy):

$$v = \omega r\,.$$

Proto můžeme tímto vztahem nahradit rychlost při výpočtu posuvné energie:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(2m)\omega^2 r^2\,,$$

kde r je poloměr osy, která spojuje středy válců. Za rotační energii dosadíme vztah ze zadání:

$$E_\mathrm{r} = 2mR^2\frac{\omega^2}{4}\,.$$

Nyní dosadíme vyjádřené energie do původní rovnice zachování energie.

$$2mgl = \frac{1}{2}(2m)\omega^2 r^2 + 2mR^2\frac{\omega^2}{4}$$

V této rovnici můžeme vykrátit hmotnost (resp. její dvojnásobek), vyjádřit z ní úhlovou rychlost a dosadit číselné hodnoty:

$$\omega = \sqrt{\frac{2gl}{r^2 + R^2/2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\cdot 1\,\mathrm{m}}{(5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2 + (2{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2/2}} \doteq 240\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Jojo se tedy otočí více než 38krát za sekundu.

3. Vzhledem k tomu, že joju zbude jen úhlová rychlost, znamená to také, že mu zůstane pouze rotační energie. Tato energie se poté přeměňuje na potenciální energii tím, jak se jojo namotává zpět na provázek. Když porovnáme energii joja dole a v nejvyšší výšce h, obdržíme tento vztah:

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{r}\,.$$

Za energie dosadíme stejné vzorce jako ve druhé části úlohy:

$$2mgh = 2mR^2\frac{\omega^2}{4}\,.$$

Z této rovnice vyjádříme výšku h a dosadíme:

$$h = \frac{R^2\omega^2}{4g} = \frac{(2{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2\cdot(240\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})^2}{4\cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 0{,}92\,\mathrm{m}\,.$$

4. Aby se nám jojo vrátilo zpět do původní výšky, je zapotřebí, aby mělo po zastavení na konci provázku dostatečnou energii. Nejdříve tedy vypočítejme, jakou úhlovou rychlost musí mít jojo na konci provázku, aby se namotalo zpět. K tomu zase využijeme zákon zachování energie. Jojo má přesně takovou kinetickou energii rotace, jako má potenciální energii na vršku provázku:

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{r}$$
$$2mgl = 2mR^2\frac{\omega^2}{4}\,.$$

Nyní vyjádříme úhlovou rychlost:

$$\omega = \sqrt{\frac{4gl}{R^2}}\,.$$

Nyní můžeme sestavit rovnici porovnávající energii na počátku hození a v momentě, kdy je jojo dole, na konci provázku. Ta bude podobná rovnici ze druhé části úlohy, jen na levou stranu musíme přičíst počáteční rotační a posuvnou energii, kterou joju dodáme tím, že ho hodíme rychlostí v_0:

$$E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k0} + E_\mathrm{r0} = E_\mathrm{r} + E_\mathrm{k}$$
$$2mgl + \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + 2mR^2\frac{v_0^2}{4r^2} = \frac{1}{2}(2m)\omega^2r^2 + 2mR^2\frac{\omega^2}{4}\,.$$

Nyní už nám stačí dosadit za úhlovou rychlost vztah, který jsme vypočítali na počátku této části úlohy, a vyjádřit rychlost v_0:

$$2mgl + \frac{1}{2}(2m)v_0^2 + 2mR^2\frac{v_0^2}{4r^2} = \frac{1}{2}(2m)\frac{4gl}{R^2}r^2 + 2mR^2\frac{4gl}{4R^2}\,.$$

Odtud vyjádříme v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{8glr^2}{R^2(2+R^2/r^2)}}\,.$$

Nyní už nám zbývá jen dosadit:

$$v_0 = \sqrt{\frac{8\cdot 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot(5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{(2{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2\cdot(2+(2{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2/(5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^2)}} \doteq 0{,}34\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

aby se nám tedy jojo vrátilo do ruky, musíme ho hodit rychlostí asi $v_0 \doteq 0{,}34\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Aleš Opl
ales@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.