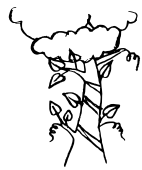
Úloha I.5 ... Jack a fazole

7 bodů; průměr 5,10; řešilo 80 studentů



Před dávnými časy žil šikovný obchodník Jack. Na trhu se mu podařilo získat kouzelné fazole, které si večer zasadil za domem. Ráno se nestačil divit; ze země trčel mohutný fazolový stonek, a jelikož byl Jack zvídavý, začal po něm šplhat. Na vrcholu stonku ho čekalo překvapení; ocitl se na obřím mraku, na kterém nejenže mohl stát, ale tento mrak dokonce nesl obří statek. Jack se usadil a začal přemýšlet nad fyzikou skrytou za těmito jevy. Pomůžete mu?

1. *Zjistěte, jak vysoko se Jack vyšplhal, pokud vyrazil rychlostí* $v = 0{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a svého cíle dosáhl po deseti hodinách.*
2. *Jackovi nešlo do hlavy, že by mohl na mraku stát, protože věděl, že shluky ve vzduchu se vznášejících kapiček nemohou unést nic většího než je samotné. „Třeba je to nějaký balon," pomyslel si a začal počítat. Jaký plyn by za normálního tlaku takový mrak o objemu jedné setiny* km^3 *musel obsahovat, pokud by měl unést* $10\,000\,\mathrm{t}$ *těžký obří statek?*
3. *Po úvahách se Jack vydal do statku, kde našel slepici, která snáší zlatá vejce, ale přitom si vesele pobíhá po dvorku bez známek přidané tíhy ve zlatě. Zjistěte, kolikrát těžší by byla slepice nesoucí zlaté vejce než obyčejná slípka vážící* $m_\mathrm{S} = 2{,}5\,\mathrm{kg}$. *Údaje jako hmotnost či objem vejce si dohledejte a nezapomeňte v řešení uvést zdroj. Předpokládejte, že slepice snáší jedno zlaté vejce denně, které zezlátne až při snesení předešlého vejce.*

1. Nejdříve si uděláme zápis známých veličin:

$$v = 0{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}},\ t = 10\,\mathrm{h},\ s = ?$$

Abychom mohli příklad dále snadno počítat, převedeme všechny veličiny do základních jednotek:

$$t = 10\,\mathrm{h} = 36\,000\,\mathrm{s}\,.$$

Nyní použijeme vzorec pro výpočet dráhy z rychlosti a času $s = v \cdot t$:

$$\begin{aligned} s &= v \cdot t \\ s &= 0{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 36\,000\,\mathrm{s} \\ s &= 9\,000\,\mathrm{m} = 9\,\mathrm{km}\,. \end{aligned}$$

Jack se tedy vyšplhal do výšky 9 kilometrů.

2. Klíčem k řešení je uvědomit si, že aby mohl obří statek stát na mraku, musí být tíhová a vztlaková síla v rovnováze kvůli prvnímu Newtonovu zákonu. Protože je ale mrak tak velký, nesmíme zanedbat ani hmotnost plynu v pomyslném balónu. Vyjádříme tedy celkovou hmotnost mraku i se statkem m_c, kde $V_m = 0{,}01\,\mathrm{km}^3 = 10^7\,\mathrm{m}^3$ je objem mraku, $m_\mathrm{s} = 10\,000\,\mathrm{t} = 10^7\,\mathrm{kg}$ hmotnost statku a ϱ_p hustota plynu v balonu:

$$m_\mathrm{c} = m_\mathrm{s} + V_m \cdot \varrho_\mathrm{p}\,.$$

Z rovnosti vztlakové síly podle Archimédova zákona a tíhové síly si vyjádříme hustotu plynu:

$$
\begin{aligned}
m_\mathrm{c} g &= V \varrho_\mathrm{v} g\,,\\
m_\mathrm{s} + V_m \cdot \varrho_\mathrm{p} &= V \varrho_\mathrm{v}\,,\\
\varrho_\mathrm{p} &= \varrho_\mathrm{v} - \frac{m_\mathrm{s}}{V}\,.
\end{aligned}
$$

Teď do vzorce dosadíme zadané hodnoty veličin a hustotu vzduchu. Protože máme uvažovat normální tlak, hustota vzduchu bude mít hodnotu[1] přibližně $\varrho_v \doteq 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$:

$$
\begin{aligned}
\varrho_\mathrm{p} &= 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} - \frac{10^7\,\mathrm{kg}}{10^7\,\mathrm{m^3}}\,,\\
\varrho_\mathrm{p} &\doteq 0{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.
\end{aligned}
$$

Výsledek porovnáme s hustotami plynů. Nejblíže našemu výsledku je hustota helia, která je $\varrho_\mathrm{He} = 0{,}18\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Další plyny, jež jsou relativně blízko vypočtené hodnotě, jsou vodík $\varrho_\mathrm{H} = 0{,}09\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, nebo methan $\varrho_{\mathrm{CH}_4} = 0{,}71\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, avšak tyto hustoty už jsou od naší hodnoty dále než helium.

Mrak by tedy musel obsahovat převážně helium, aby unesl obří statek, jednalo by se nejspíše o směsici plynů.

3. Z obecné charakteristiky slepičího vejce[2] zjistíme, že hmotnost vejce je $m_\mathrm{v} \doteq 60\,\mathrm{g}$ a jeho objem $V_\mathrm{v} \doteq 50\,\mathrm{cm^3}$. Teď spočítáme, jaká by byla hmotnost vejce, pokud by bylo zlaté (hustota zlata je $\varrho \doteq 19{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$). Nezapomeneme při tom vhodně zaokrouhlit.

$$
\begin{aligned}
m &= V\varrho\,,\\
m_\mathrm{zv} &= 50\,\mathrm{cm^3} \cdot 19{,}3\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}\,,\\
m_\mathrm{zv} &\doteq 1\,000\,\mathrm{g}\,.
\end{aligned}
$$

Teď od hmotnosti zlatého vejce odečteme hmotnost obyčejného vejce a tím určíme, o kolik gramů bude těžší slepice se zlatým vejcem:

$$
m_\mathrm{r} = 1\,000\,\mathrm{g} - 60\,\mathrm{g} \doteq 940\,\mathrm{g}\,.
$$

Abychom zjistili, kolikrát bude slepice se zlatým vejcem těžší, vydělíme její hmotnost hmotností obyčejné slepice:

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{m_s + m_r}{m_s}\,,\\
n &= \frac{2\,500\,\mathrm{g} + 940\,\mathrm{g}}{2\,500\,\mathrm{g}}\,,\\
n &= 1{,}4\,.
\end{aligned}
$$

Slepice nesoucí zlaté vejce by byla přibližně 1,4krát těžší než normální slepice.

[1] Hodnota odečtena z tabulek.
[2] https://cs.wikipedia.org/wiki/Vejce

Lubor Čech
lubor@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.