Výpočty fyzikálních úkolů fyzikální korespondenční seminář pro ZŠ

VÝFUK

http://vyfuk.fykos.cz 1. ročník, 2. série

Milí přátelé,

do rukou se vám dostalo druhé číslo fyzikálního korespondenčního semináře pro žáky základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií. Ti z vás, kteří řešili úlohy z první série, dostávají zároveň opravená řešení.

Omlouváme se za prodlevu mezi zadáním první a druhé série, jež byla způsobena osiřením vedení semináře a jeho pozdní adopcí. Z toho důvodu bude také tato série pravděpodobně v letošním školním roce sérií poslední, a tedy pro vás poslední možností, jak ovlivnit své umístění ve výsledkové listině, na jejímž základě budeme udělovat úspěšným řešitelům odměny.

Dále prosíme všechny řešitele, aby (pokud tak již neučinili) nám napsali svou korespondenční adresu, školu a třídu (školní ročník).

Příští školní rok se můžete těšit na druhý ročník korespondenčního semináře VÝFUK, který již bude mít pravidelnější formu než ročník současný.

Nastávajícím středoškolákům vřele doporučujeme k řešení náš mateřský korespondenční seminář FYKOS[1], případně další z korespondenčních seminářů pořádaných Matematicko-fyzikální fakultou (fyzikou se zabývá i korespondenční seminář M&M).

Aleš, Anča, Bětka, Lada, Mára, Terka a (R)adim

Jak se stát řešitelem

Do soutěže se může zapojit jakýkoliv žák šesté až deváté třídy základní školy nebo odpovídajícího ročníku víceletého gymnázia. Stačí poslat řešení aspoň jedné úlohy z některé série (nemusíte řešit od začátku, zapojit se můžete během školního roku kdykoliv). Spolu s nimi nám pošlete vaše kontaktní údaje (jméno a příjmení, adresu, školu, třídu, datum narození a e-mailovou adresu, pokud ji máte).

Průběh soutěže

Šestkrát během školního roku vám pošleme tzv. sérii úloh. Úloh je šest, první čtyři jsou „počítací“, pátá experimentální a šestá vychází z aktuální kapitoly seriálu. Na jejich vypracování budete mít přibližně pět týdnů. Do termínu odeslání, který bude uveden u zadání, nám je můžete posílat poštou na níže uvedenou adresu nebo přes

[1] http://fykos.cz/

internet. My po termínu odeslání zveřejníme na internetu správná řešení a přibližně do dvou týdnů potom vám je pošleme i domů na udanou adresu. Spolu s nimi vám pošleme i opravené úlohy s komentáři k vašim řešením. Řešení posílejte včas, pozdě odeslané úlohy nemusíme opravit.

Seriál

Seriál na pokračování je soubor vysvětlujících textů, které by vám mohly přiblížit zatím neznámé oblasti matematiky nebo fyziky. Letos budeme střídat matematická a fyzikální témata – znalosti nabyté v liché kapitole vám ulehčí řešení kapitoly sudé. Součástí seriálu je již zmíněná seriálová úloha, která je zaměřená zejména na procvičení vysvětlovaného tématu.

Hodnocení úloh

Za řešení každé z úloh můžete dostat maximálně tolik bodů, kolik je uvedeno v zadání úlohy. Pokud vaše řešení bude zvlášť pěkné, můžete být odměněni i nějakým bodem navíc. Z celkových součtů za série se vytváří pořadí po jednotlivých ročnících zvlášť (6. třída a primy až 9. třída a kvarty). Pořadí najdete nejdříve na internetových stránkách přibližně dva týdny po termínu odeslání série. Poštou domů vám dorazí spolu se zadáním dalších úloh.

Co z toho budete mít

Pro zájemce o fyziku je připraveno plno soutěží, kde mohou uplatnit svoje zkušenosti. Výfuk a později Fykos jako jedny z nich pro vás mohou být odrazovým můstkem až na mezinárodní kolo fyzikální olympiády na střední škole. Mimo jiné určitě potěšíte svoje fyzikáře.

Nejlepší řešitelé budou odměněni zajímavými cenami (trička semináře a podobně). Pro přibližně 20 z nich v létě uspořádáme soustředění plné zajímavých her, poutavých fyzikálních vyprávění a zážitků s novými kamarády.

Jak vymyslet řešení

Jak vyřešit každou úlohu na plný počet bodů vám asi neporadíme, ale můžeme se pokusit říct pár nápadů, které by vám k tomu mohly pomoct.

Přečtěte si pořádně zadání. Zní to zvláštně, ale často se stává, že čtenář přehlédne nějakou podmínku, která řešení zjednodušuje, nebo zapomene klidně i na půlku otázek.

Ujasněte si, co víte. V zadání je většinou uvedeno to, co stačí k vyřešení úlohy, ale není to samozřejmostí. Většinu hodnot, kterou k němu potřebujete, najdete v zadání. Občas ale budete muset něco rozumně odhadnout (třeba hmotnost člověka), nebo najít na internetu (rozchod kolejí na železnici).

Uvědomte si, co chcete vypočítat. K vyřešení úlohy nemusí stačit pouze dosadit do vzorečku, obvykle musíte provést několik mezikroků.

Kreslete si obrázky. Někdo si to umí představit, ale do druhého dne se mu to vykouří z hlavy a musí začít znova. Navíc se o nakresleném lépe přemýšlí.

Používejte tabulky a učebnice. Pokud vám chybí nějaký vztah nebo výpočet, pravděpodobně ho tam najdete. Nebojte se nahlédnout do kapitol, které jste ještě nebrali.

Co když není úloha na počítání?

Zkuste experimentovat. Někdy je dobré vyzkoušet si, jestli popsaný jev vůbec nastane, co musíme udělat, abychom se dobrali správného výsledku.

Hledejte podobné věci. Někdy se zadání úlohy může dát převyprávět jinými slovy tak, že jde o nějaký jev, který dobře znáte a umíte jej vysvětlit.

Jak poznat, že výsledek může být správně?

Zkontrolujte si jednotky. Jestli vám vyjde rychlost v kilogramech, bude pravděpodobně něco špatně.

Zamyslete se nad tím, jestli má řešení smysl. Pokud se ptáme na rychlost, kterou musí běžet Mára na nákup, aby zároveň stihl tramvaj, asi to nebude 200 km/h.

Jak má vypadat řešení

Každou úlohu vypracujte na zvláštní list papíru A4. Spotřebujete-li na jednu úlohu víc listů, sešijte je dohromady. Každý list na horní straně podepište a označte číslem série a úlohy. Pokud je řešení delší než jeden list, na každý přidejte jeho pořadové číslem a celkový počet listů.

Posíláte-li řešení elektronicky, platí stejná pravidla. Zvlášť nezapomeňte podepsat každý list a oddělovat jednotlivé úlohy od sebe, pokud je posíláte v jednom souboru.

Ideální hlavička řešení vypadá takto:

Viktor Ježek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	1. série, 3. úloha (1. strana ze 3)

Pokud píšete řešení na počítači, naučte se používat editor rovnic. Možná se i dočkáte nějakého návodu v dalších kapitolách seriálu.

Řešení pište tak, abychom z něj byli schopní poznat směr vašich úvah. To znamená, že nemáte šetřit komentáři a vysvětleními. Ale samozřejmě nemusíte komentovat každé roznásobení závorky. Povede-li se vám nějaká početní chyba, není to žádná tragédie, i když to neradi vidíme. To, co chceme, abyste tam napsali, jsou úvahy a souvislosti, které jste si při řešení uvědomili, nebo to, co podle vás vede k výsledku a proč je správný.

Každé řešení by mělo obsahovat jasný závěr, ve kterém bude shrnuto, co jste vymysleli, nebo bude obsahovat výsledek výpočtů nebo experimentu.

Ale nezapomeňte, že plný počet bodů ze všech sérií má málokdo, takže má smysl poslat i úlohu, kterou si nejste úplně jistí, nebo jste si všimli jen několika věcí a zatím si je neumíte dát do souvislosti. Ve vzorovém řešení se dozvíte zbytek.

Zadání úloh 2. série

Úloha 1. Co jste hasiči? (4 body)
Chceme-li uhasit hořící dřevo, obvykle sáhneme po vodě. Co způsobuje uhašení ohně, pokud hasíme vodou? Představte si, že místo dřeva hoří něco jiného, například olej, elektrická instalace, plyn… Čím budeme hasit a co způsobí uhašení ohně teď? A čím co hasit nesmíme vůbec?

Úloha 2. Protřepat, nemíchat (4 body)
Sklenice s vodou je téměř plná. Potom, co jsme do ní vhodili pět kostek ledu o hraně 1 cm, voda stoupla přesně k jejímu okraji. Kolik vody vyteče ze sklenky než led úplně roztaje? Sklenka je válec o rozměrech $d = 5\,\mathrm{cm}$ a $v = 10\,\mathrm{cm}$.

Úloha 3. Všeci se jdou koupat (4 body)
Jak by se zvedla hladina světového oceánu, kdyby se všichni lidé najednou šli koupat?

Úloha 4. Rande (4 body)
Mladý matfyzák, aby zapůsobil na svou dívku, ji pozval na projížďku po Vltavě. Loďka váží 50 kg, děvče 60 kg a matfyzák 70 kg. Děvčeti najednou upadl do Vltavy klobouk. Matfyzák se rozhodl jako pravý kavalír pro něj skočit. Mocně se odrazil od stojící loďky ve směru vodorovném a do vody letěl rychlostí 7 m/s. Co se stalo s loďkou?

Úloha E. Vysoká škola (8 bodů)
Změřte výšku vašeho domu co nejvíce způsoby. Fyzikální fantazii se meze nekladou.

Řešení úloh 1. série

Úloha 1. Humanitární pomoc (4 body)

Hrdinný pilot Mára shazuje obyvatelům Hotentotska balíky s humanitární pomocí z letadla. Řeknete mu, kdy má náklad vypustit, aby trefil správné místo dopadu? Předtím, než jej přeletí, až potom, nebo někdy úplně jindy? Proč? Jak bude vypadat trajektorie vyhozených balíků z pohledu Máry a z pohledu obyvatel Hotentotska?

Předpokládejme, že letadlo letí konstantní rychlostí v. Cestující v něm jsou vůči letadlu v klidu, stejně tak i všechna zavazadla, která mají s sebou. Mára chce vyhodit humanitární pomoc tak, aby spadla na Hotentotsko. Podívejme se na situaci nejdřív z jeho pohledu. Hotentotsko se vůči Márovi pohybuje pod ním rychlostí v. Mára vypustí balíček, který vůči němu bude padat svisle dolů[2]. Mára ví, v jaké je výšce, označme ji h. Ví také, že předměty v gravitačním poli Země (například humanitární pomoc) padají se zrychlením $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ a dráha s, kterou na svém pádu urazí, se mění podle vztahu

$$s = \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Z něho si Mára vyjádří čas, který bude humanitární pomoci trvat, než spadne na zem, kde za s dosadí h.

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{2}gt^2\\
2h &= gt^2\\
\frac{2h}{g} &= t^2\\
\sqrt{\frac{2h}{g}} &= t
\end{aligned}$$

Za tento čas t ale mezi tím Hotentotsko pod Márou urazí dráhu

$$s = vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

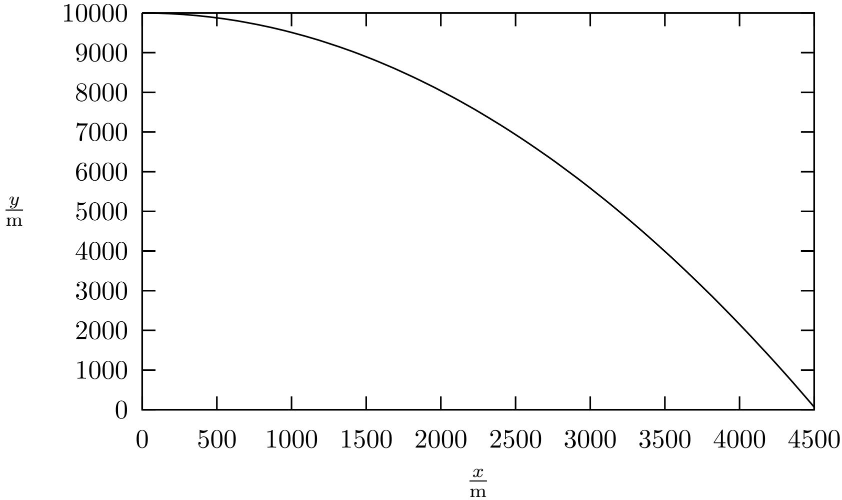
takže Mára ví, že musí humanitární pomoc vyhodit o tuto vzdálenost s dříve, než bude nad Hotentotskem, protože během pádu pomoci Hotentotsko „přijede“ do místa dopadu balíčku.

Hotentoti mezitím stojí na zemi a vidí letadlo, jak se pohybuje rychlostí v. V něm je balíček, který se také pohybuje rychlostí v. Mára vyhodí balíček, který dál pokračuje rychlostí v ve směru letu letadla[3] a zároveň začne padat dolů. Obě rychlosti se

[2]Neuvažujeme odpor vzduchu.

[3]Pokud bychom uvažovali i odpor vzduchu, rychlost by se trochu zmenšovala, pokud ho uvažovat nebudeme, není nic, co by balíček zabrzdilo, takže bude mít stále rychlost v.

složí (takže balíček poletí šikmo). Zpočátku bude převažovat původní složka rychlosti v a jak bude balíček zrychlovat, bude směr pohybu balíčku mířit stále více k zemi.



Na obrázku výše je graf trajektorie[4] balíčku, který byl vypuštěn z letadla letícího rychlostí 360 km/h ve výšce 10 km. Graf jsme dostali tak, že jsme pro čas od $t =$ $= 0\,\mathrm{s}$ (kdy Mára vypustil balíček) až do $t = 45\,\mathrm{s}$ (kdy balíček dopadl) spočítali po úsecích 0,3 s vždy x-ovou a y-ovou souřadnici balíčku[5], přičemž y-ová souřadnice odpovídá výšce nad povrchem a x-ová odpovídá vzdálenosti od místa vypuštění balíčku. Nakonec jsme nechali počítačový program nakreslit závislost $y(x)$.

Úloha 2. Trpaslíci v kokosu (4 body)

V Trpaslíkstánu používají k přepravě nákladu hlavně lodě. Loď je vydlabaná jedna polovina kokosového ořechu, přičemž ořech má zpravidla tvar koule o průměru 10 *cm a stěnu tlustou* 1 *cm. Skořápkovina má hustotu o* 20% *menší než voda. Jak těžký náklad můžou trpaslíci maximálně do lodi naložit, aniž by se potopila?*

Pro získání odpovědi na tuto úlohu použijeme Archimédův zákon, který říká, že těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která odpovídá tíze kapaliny o objemu ponořené části tělesa. Popisuje jej známý vzorec $F_{\mathrm{vz}} = V \rho g$, kde za V dosazujeme objem ponořené části tělesa, za ρ hustotu kapaliny (tady vody), do které těleso noříme a g je tíhové zrychlení. Touto silou bude nadlehčována kokosová loďka.

Také využijeme vzorec pro výpočet objemu koule: $V_{\mathrm{k}} = \frac{4}{3}\pi r^3$. V tomto případě použijeme známou konstantu Pí ($\pi = 3{,}1416\ldots$) a poloměr koule (tedy kokosu) r.

[4] Trajektorie je „čára“, po které se balíček pohybuje.

[5] Podle předpisů $x = vt$ a $y = 10000\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}gt^2$.

Teď už můžeme úlohu bez problémů vyřešit. V zadání je napsáno, že trpaslíci nakládají loďku tak dlouho, dokud se jen těsně nepotopí. To znamená, že je ponořená do vody až po okraj, což nám říká, že její ponořená část je polokoule, jejíž objem umíme určit ze vzorce pro výpočet objemu koule (je to polovina).

$$F_{\mathrm{vz}} = V\rho g = \frac{2}{3}\pi r^3 \rho g$$

Už jen zbývá vypočítat, jak bude loďka těžká, když se maximálně naplní. Její hmotnost m_{l} je součet hmotností kokosové skořápky (označíme ji m_{k}, její tloušťka je d) a neznámého nákladu (ten označme m_{n}). Hmotnost kokosu spočítáme po určení objemu slupky – od objemu celé koule (V_{k}) odečteme objem prázdného místa (V_{p}) a nakonec to celé podělíme dvěma, protože jde jen o polokouli. Hmotnost získáme, když objem skořápky vynásobíme hustotou kokosu ρ_{k}.

$$m_{\mathrm{l}} = m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{k}} = m_{\mathrm{n}} + \rho_{\mathrm{k}} \cdot \frac{1}{2}\left(V_{\mathrm{k}} - V_{\mathrm{p}}\right) = m_{\mathrm{n}} + \rho_{\mathrm{k}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r-d)^3\right) .$$

Podmínka pro rovnováhu je tedy

$$F_{\mathrm{vz}} = m_{\mathrm{l}} g .$$

Po dosazení vyjde rovnice

$$F_{\mathrm{vz}} = V\rho g \frac{2}{3}\pi r^3 \rho g = \left(m_{\mathrm{n}} + \rho_{\mathrm{k}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r-d)^3\right)\right) g ,$$

ze které ekvivalentními úpravami vypočítáme m_{n}. Ti méně zběhlí v matematice si do ní mohou dosadit již konkrétní hodnoty veličin a upravovat až potom, ale správnější a průhlednější postup je dosazovat až nakonec. My jsme ještě využili toho, že hustota kokosu je o dvacet procent nižší než hustota vody ($\rho_{\mathrm{k}} = \frac{8}{10}\rho_{\mathrm{v}}$).

$$m_{\mathrm{n}} = \frac{2}{3}\pi\rho\left(r^3 - \frac{8}{10}\left(r^3 - (r-d)^3\right)\right) ,$$

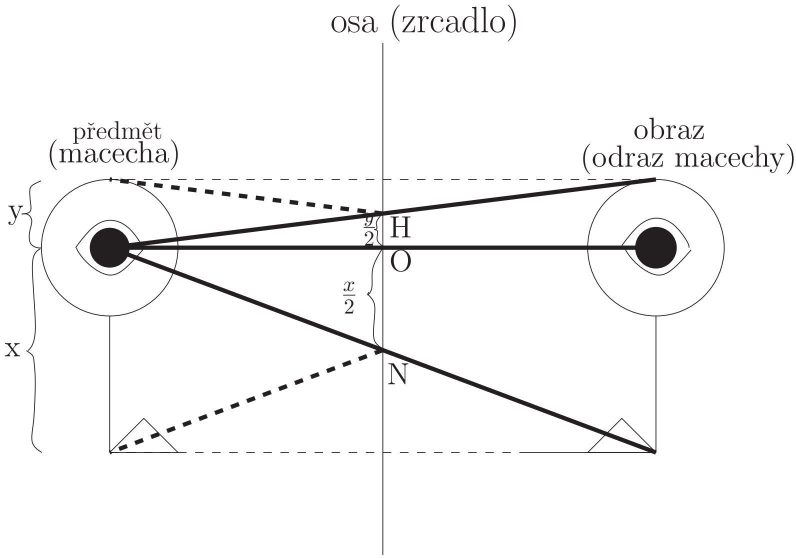
což po dosazení za $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $r = 0{,}05\,\mathrm{m}$ a $d = 0{,}01\,\mathrm{m}$ vyjde $m_{\mathrm{l}} = 160\,\mathrm{g}$. Trpaslíci tedy do kokosové loďky mohou naložit nejvíce 160 gramů nákladu.

Úloha 3. Kdo je na světě nejkrásnější? (4 body)
Poraďte zlé Sněhurčině maceše, jak velké si musí nechat udělat kouzelné zrcadlo, aby se v něm viděla celá, od hlavy až k patě. Macecha je lakomá a nechce utratit příliš peněz, zrcadlo tedy musí být co nejmenší.

Jelikož zlá macecha chce zjistit, zda je nejkrásnější, nemůže se dívat do zrcadla, které její obraz nějak zkreslí. Ze znetvořeného by přece vůbec nepoznala, zda je krásná či ne. Proto zavrhneme varianty vypuklého nebo nakloněného zrcadla, které jste často navrhovali. Aby se spatřila tak, jak vypadá doopravdy, musí si pořídit rovinné zrcadlo.

K vyřešení této úlohy nám stačí jediný zákon geometrické optiky: *Úhel dopadu paprsku se rovná úhlu jeho odrazu.*

Geometrická optika dostala jméno podle toho, že se její zákonitosti dají jednoduše narýsovat. Zákon uvedený výše se přibližuje pomocí osové souměrnosti: Máte rovinné zrcadlo-osu a macechu-předmět, který zobrazíte v osové souměrnosti dle osy-zrcadla. Když se díváte do zrcadla, vidíte v něm akorát svůj osově souměrný obraz podle zrcadla. Stačí tedy poslat světelný paprsek (nakreslit přímku) z očí do místa, které chceme vidět, ale patří obrazu za zrcadlem. Místo protnutí paprsku s osou určuje, na kterém místě osy musí být zrcadlo, abyste viděli tu konkrétní část (osa je přímka, zrcadlo je konečné, takže úsečka).



Výškovou vzdálenost od očí na vrch hlavy si označím y a vzdálenost od očí až k chodidlům x. Celá výška postavy je tedy $x + y$. Nejdřív pošleme paprsek z očí čarodějnice do očí jejího odrazu. Ten nám ji protne přesně ve výšce jejích očí. Tento bod průniku si označíme O. Druhý paprsek půjde opět samozřejmě z jejích očí,ale na nohy. Jelikož je macecha od zrcadla stejně daleko jako její odraz, musí přímka paprsku osu protnout v polovině vzdálenosti mezi očima a nohama. Tento bod si označíme N. Poslední paprsek pošleme z očí na vrch hlavy obrazu. Ze stejného důvodu jako v předchozím případě protne osu v poloviční vzdálenosti mezi očima a vrškem hlavy, tento bod si označíme H. Abychom se tedy viděli celí, od hlavy až k patě, musíme mít všude mezi body, které zobrazují krajní části postavy, zrcadlo.

To tedy bude mít velikost

$$|NO| + |OH| = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2}\,,$$

což je polovina výšky postavy.

Většina z vás se domnívala, že čím dál je macecha od zrcadla, tím větší kus ze sebe uvidí, což není pravda. Pěkně je to vidět na malém zrcátku, kam se vám vejde jen obličej. Pokud ho budete oddalovat uvidíte stále stejnou část.

Pár z vás také navrhovalo mít tvar zrcadla podle obrysů královny. Daniel Pišťák se dostal v této úvaze o něco dál a navrhoval, aby sluhové obtáhli královnin odraz v zrcadle a ten pak vyřízli. Ještě je však potřeba si uvědomit, že královna se kouká z jiného místa než oni, takže také něco jiného vidí. Proto by musela královna radit sluhům, v kterých místech mají kreslit, aby obtáhli její siluetu. Vyřízlé zrcadlo podle takového obrysu by opravdu mělo nejmenší plochu.

Úloha 4. Edudant a Francimor (4 body)
Dva světaznalí cestovatelé, jeden tlustý a jeden hubený, se cestou v letadle dohadují o tom, kdo z nich by déle přežil v extrémních podmínkách daleko od civilizace. Rozsoudíte je, kdo vydrží déle ve velkém horku (50 °C), v mrazu (−1 °C), po ztroskotání lodi uprostřed Středozemního moře, v hurikánu nebo při silném sněžení? A jak by to mohlo dopadnout, kdyby je zastihlo mohutné zemětřesení v centru velkoměsta? Kromě jejich tělesné stavby mezi nimi nejsou žádné rozdíly, oba jsou stejně oblečení a nic dalšího s sebou nemají (žádné jídlo, vodu, sirky ani jiné vybavení). Snažte se být nápaditi a všímejte si i maličkostí.

Vzhledem k okolní teplotě je rozhodující tělesný tuk (tlustý ho má mnohem více), který slouží jako tepelná izolace. Navíc má tlustý také větší povrch těla. Tedy ve velkém horku (50 °C) vydrží déle hubený, zatímco v mrazu (−1°C) tlustý.

Při silném sněžení je nejdůležitější navlhnutí od padajícího sněhu, tlustý ho nachytá více, jelikož má větší povrch těla. Při sněžení tedy více vydrží hubený.

V hurikánu vydrží více tlustý, vzhledem ke své hmotnosti bude stabilnější.

Po ztroskotání lodi se budou oba cestovatelé nacházet uprostřed Středozemního moře. Hubený bude muset vynaložit více energie na plavání, zatímco tlustého bude voda více nadnášet.

Při zemětřesení není situace jednoznačná, tlustý bude mít větší stabilitu, naopak hubený bude ve výhodě, jelikož se bude moci lépe schovat.

Úloha E. Mrtvé moře (8 bodů)*Jak možná víte, Mrtvé moře je slané jezero. Je tak slané, že se v něm neutopíte, protože jste dostatečně nadnášeni. Vezměte žluté plastové vajíčko z „Kindervejce“ a vložte do něj závaží o známé hmotnosti tak, že naplněné vajíčko v nádobě s vodou klesne ke dnu. Jako závaží můžete použít třeba mince – koruna má hmotnost* 3,6 g*, pětikoruna* 4,8 g*, desetikoruna,* 7,62 g[6] *váha prázdného vajíčka je* 4,1 g. *Pak začněte do vody přidávat sůl, kterou nechte*

[6] viz `http://www.cnb.cz/cs/platidla/mince/`

ve vodě dobře rozpustit. Pro různé hmotnosti závaží zjistěte, pro jakou minimální koncentraci soli zatížené vajíčko vyplave. V řešení zkuste vysvětlit, proč slaná voda nadnáší věci lépe než voda z kohoutku.

Před každým fyzikálním měřením je dobré si uvědomit, co budeme měřit a jaké závislosti očekáváme (klesající, stoupající, konstantní, lineární, křivku, atd.). Proto se zkusíme nejdříve zamyslet nad tím, co se bude při experimentu dít. Do vody o objemu V_1 nasypeme množství soli o objemu V_2. Dostaneme tak roztok s koncentrací soli

$$K = \frac{V_2}{V_1}\,.$$

Mohli bychom také postupovat tak, že bychom používali hmotnostní koncentraci (místo V_1 bychom používali m_1 a místo V_2 bychom použili m_2), ovšem my jsme neměli k dispozici přesné váhy, ale našli jsme odměrný válec s přesností 1 ml, proto používáme objemovou koncentraci.

Nyní je dobré se zamyslet nad tím, jak se změní hustota roztoku. Celkový objem roztoku je $V = V_1 + V_2$ a hmotnost $M = \varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2$, kde ϱ_1 je hustota vody a ϱ_2 je hustota soli. Hustotu roztoku tak spočítáme podle vztahu

$$\varrho = \frac{\varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2}{V_1 + V_2}\,.$$

Pokud do vody vložíme vejce s objemem V_3 a s hmotností $m = m_\mathrm{z} + m_\mathrm{v}$, kde m_z je hmotnost závaží a m_v je hmotnost vejce, vyplave vejce právě tehdy, když bude hustota vody a trochu větší než hustota vejce. Pro danou hodnotu závaží m_z tak můžeme spočítat očekávanou koncentraci K.

$$\begin{aligned}
\frac{m_\mathrm{z} + m_\mathrm{v}}{V_3} &< \frac{\varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2}{V_1 + V_2} && \Big|\cdot (V_1 + V_2) V_3 \\
(m_\mathrm{z} + m_\mathrm{v})(V_1 + V_2) &< \varrho_1 V_1 V_3 + \varrho_2 V_2 V_3 \\
m_\mathrm{z} V_1 + m_\mathrm{z} V_2 + m_\mathrm{v} V_1 + m_\mathrm{v} V_2 &< \varrho_1 V_1 V_3 + \varrho_2 V_2 V_3 && \Big|\cdot \tfrac{1}{V_1} \\
m_\mathrm{z} + m_\mathrm{z}\frac{V_2}{V_1} + m_\mathrm{v} + m_\mathrm{v}\frac{V_2}{V_1} &< \varrho_1 V_3 + \varrho_2 \frac{V_2}{V_1} V_3 \\
(m_\mathrm{z} + m_\mathrm{v} - \varrho_2 V_3)\frac{V_2}{V_1} &< \varrho_1 V_3 - m_\mathrm{z} - m_\mathrm{v} && \Big|\cdot \tfrac{1}{m_\mathrm{z} + m_\mathrm{v} - \varrho_2 V_3} \\
K = \frac{V_2}{V_1} &> \frac{m_\mathrm{z} + m_\mathrm{v} - \varrho_1 V_3}{m_\mathrm{z} + m_\mathrm{v} - \varrho_2 V_3} && (1)
\end{aligned}$$

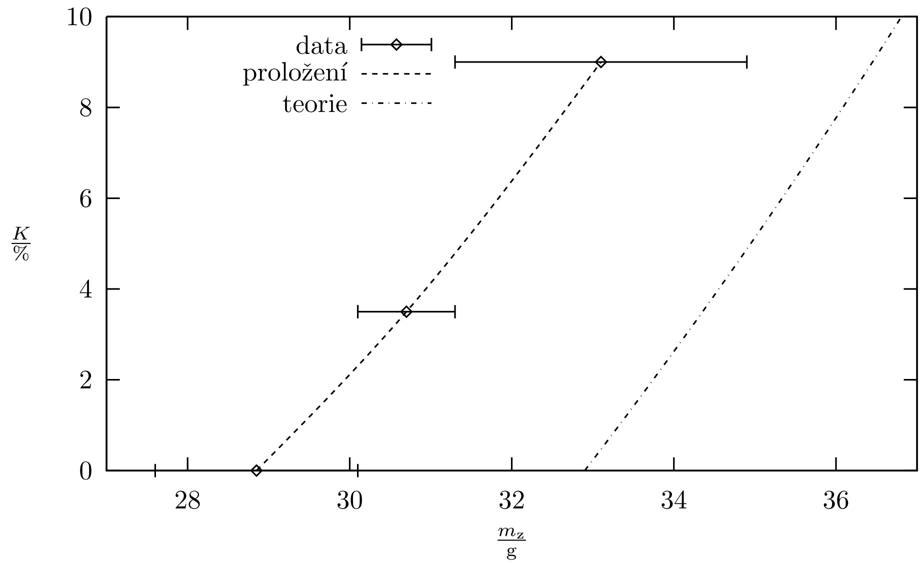
Ze zadání víme, že hmotnost prázdného vajíčka je $m_\mathrm{v} = 4{,}1\,\mathrm{g}$. Z tabulek zjistíme, že hustota vody je $\varrho_1 = 0{,}999\,\mathrm{g/cm^3}$ a hustota soli je $\varrho_2 = 2{,}163\,\mathrm{g/cm^3}$. Objem vajíčka V_3 můžeme změřit například tak, že jej vložíme do sklenice a dolijeme vodu po zvolenou rysku. Pak vejce vyndáme a změříme, kolik musíme přilít vody, aby hladina opět dosahovala až po rysku. Objem nám vyšel $V_3 = 37\,\mathrm{ml} = 37\,\mathrm{cm^3}$.

Nyní zkusíme dosadit do rovnice (1). Aby vejce zatížené závažím m_z vyplavalo, musí pro koncentraci platit

$$K > \frac{m_\mathrm{z} - 32{,}9\,\mathrm{g}}{m_\mathrm{z} - 75{,}9\,\mathrm{g}}\,. \tag{2}$$

K	m_z	$\frac{m_\mathrm{z}}{\mathrm{g}}$	m_z	$\frac{m_\mathrm{z}}{\mathrm{g}}$	$\frac{m_\mathrm{zteor}}{\mathrm{g}}$
0%	$3 \cdot 10\,$Kč + $2 \cdot 1\,$Kč	30,1	$3 \cdot 10\,$Kč + 5 Kč	27,6	32,9
3,5 %	$3 \cdot 10\,$Kč + 5 Kč + 1 Kč	31,3	$3 \cdot 10\,$Kč + $2 \cdot 1\,$Kč	30,1	33,2
9,0 %	$3 \cdot 10\,$Kč + 5 Kč + $2 \cdot 1\,$Kč	34,9	$3 \cdot 10\,$Kč + 5 Kč + 1 Kč	31,3	43,6

Samotné měření jsme prováděli tak, že jsme do sklenice nalili 200 ml vody. Pro nulovou koncentraci je možné z rovnice (2) určit předpokládanou mezní hmotnost závaží. Hmotnost vychází 32,9 g. Hledali jsme tedy dvě hmotnosti blízké této hodnotě. Pro jednu vejce plavalo a pro druhou se potopilo. K potopenému vejici jsme přisypávali sůl až do okamžiku, kdy vyplavalo. Pak jsme přidali závaží a vejce se opět ponořilo. A celý postup jsme zopakovali. Naměřené hodnoty jsou uvedeny tabulce a znázorněny v grafu.



Může se zdát, že jsme měřili špatně, neboť naměřené hodnoty se liší od teoretických. Jak je to možné? Každé fyzikální měření je zatíženo chybami. K měření objemu jsme používali odměrný válec, se kterým je možné měřit s přesností na mililitry, ale je jisté, že objem vody, do které jsme přidávali sůl není přesně 200 ml ale spíše (200 ± 1) ml. Obdobně můžeme uvažovat i při určování objemu soli. Pro výpočet jsme navíc používali tabulkové hodnoty, které jsou pro destilovanou vodu (my jsme měli vodu z vodovodu) a hustotu kuchyňské soli jsme určili jako hustotu chloridu sodného, který je udáván pro pevnou sůl, ale přitom jsme používali sůl krystalickou. A obdobně bychom mohli pokračovat dál.

Je zřejmé, že některé chyby a vlivy jsou více podstatné a jiné méně. Špatná hustota soli nám výrazněji změní výsledek, než třeba vliv okolní teploty. Přesné určení chyby měření je poněkud složitější a necháme si to na někdy jindy.

Přesto závěrem můžeme říci, že opravdu platí, že slaná voda má větší hustotu a tak nadnáší více, než voda neslaná.

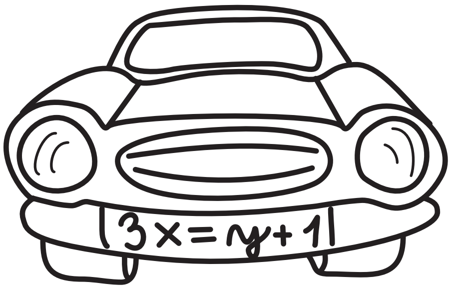
Seriál

V minulém díle jsme se naučili řešit rovnice, které obsahují jedinou proměnnou. Dnes se podíváme na soustavy rovnic, ve kterých se obvykle vyskytuje neznámých více.

Soustavy rovnic o více neznámých

Ve složitějších slovních úlohách a fyzikálních příkladech se neznámých objeví často víc než jedna neznámá. K tomu, abychom je zvládli zjistit musíme však ze zadání sestavit více rovnic. Sestavování rovnic je mnohdy složitější, než jejich řešení.

Mějme následující úlohu: Dvě auta vyjela současně ze dvou míst 30 km vzdálených od sebe. Jedou-li proti sobě, potkají se za 15 minut, jedou-li za sebou, dohoní jedno auto druhé za 1 hodinu. Jaké jsou rychlosti aut?



Rychlost prvního auta si označíme třeba v_{a} a rychlost druhého v_{b}. Vzdálenost l, kterou ujede auto jedoucí rychlostí v za čas t se spočítá jako $l = \frac{v}{t}$.

Obě auta z úlohy tedy dohromady ujedou za čtvrt hodiny 30 km. To zapíšeme do rovnice $\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{h}\right) v_{\mathrm{a}} + \left(\frac{1}{4}\,\mathrm{h}\right) v_{\mathrm{b}} = 30\,\mathrm{km}$.

Když pojedou za sebou, potkají se za hodinu. To znamená, že za hodinu ujede jednou auto o třicet kilometrů více než druhé. Druhá rovnice bude $(30\,\mathrm{km}) + (1\,\mathrm{h})v_{\mathrm{a}} = (1\,\mathrm{h})v_{\mathrm{b}}$. Dostali jsme tedy *soustavu dvou rovnic* o dvou neznámých. Rovnice v soustavě zapisujeme pod sebe a je dobré si udržovat přehled ve výpočtu, například podtržením[7].

$$\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{h}\right) v_{\mathrm{a}} + \left(\frac{1}{4}\,\mathrm{h}\right) v_{\mathrm{b}} = 30\,\mathrm{km}$$
$$\underline{(30\,\mathrm{km}) + (1\,\mathrm{h})v_{\mathrm{a}} = (1\,\mathrm{h})v_{\mathrm{b}}}$$

[7] Tím od sebe oddělíme skupiny rovnic, které patří k sobě v rámci jednoho kroku. My dále oddělujeme rovnice popisným textem.

Všimněte si, že dosazujeme veličiny i s jednotkami. V praxi je ale daleko vhodnější počítat obecně se značkami veličin a dosazovat až nakonec. Poté odpadnou starosti s jednotkami.

Při řešení je na výběr ze dvou metod.

Dosazovací metoda

Vybereme si jednu z rovnic a pomocí ní vyjádříme, čemu se rovná např. v_a. Postup bude stejný jako u rovnice s jednou neznámou, druhou teď prohlásíme za parametr a budeme s ní přehazovat jako s nektarinkou v minulé úloze. Ekvivalentní úpravy si tentokrát zkuste doplnit sami.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{h}\right)v_\mathrm{a}+\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{h}\right)v_\mathrm{b}&=30\,\mathrm{km}\\ v_\mathrm{a}&=(120\,\mathrm{km/h})-v_\mathrm{b}\end{aligned}$$

Do další rovnice dosadíme místo dané proměnné výraz, který nám vyšel.

$$\begin{aligned}(30\,\mathrm{km})+(1\,\mathrm{h})v_\mathrm{a}&=(1\,\mathrm{h})v_\mathrm{b}\\ (30\,\mathrm{km})+(120\,\mathrm{km})-(1\,\mathrm{h})v_\mathrm{b}&=(1\,\mathrm{h})v_\mathrm{b}\end{aligned}$$

Jak vidíme, u 120 se změnila jednotka! Rovnici dopočítáme a řešení dosadíme do výrazu, který jsme dosazovali.

$$\begin{aligned}(30\,\mathrm{km})+(120\,\mathrm{km})-(1\,\mathrm{h})v_\mathrm{b}&=(1\,\mathrm{h})v_\mathrm{b}\\ v_\mathrm{b}&=75\,\mathrm{km/h}\\ v_\mathrm{a}&=(120\,\mathrm{km/h})-v_\mathrm{b}\\ v_\mathrm{a}&=(120\,\mathrm{km/h})-(75\,\mathrm{km/h})\\ v_\mathrm{a}&=45\,\mathrm{km/h}\end{aligned}$$

Protože jsme si dávali pozor na jednotky, na řádcích výše můžeme rovnou číst výsledek: $v_\mathrm{a}=45\,\mathrm{km/h}$ a $v_\mathrm{b}=75\,\mathrm{km/h}$.

Sčítací (odčítací) metoda

Vidíme-li, že v rovnicích se nám vyskytuje některá z neznámých ve stejném násobku, můžeme výhodně využít druhou metodu. Příklad tentokrát bude bez fyziky:

$$\begin{aligned}3x+y&=11\,,\\ 3x-2y&=-4\,.\end{aligned}$$

V obou rovnicích máme po třech x. Následující postup využívá ekvivalentní úpravu *odečtení*. Víme, že rovnice se nezmění, odečteme-li od obou stran libovolný výraz. Není ale vůbec nutné, aby výraz na obě strany přičtený měl stejnou podobu.

Teď to totiž budou levá a pravá strana druhé rovnice. Od levé strany první rovnice odečteme levou stranu druhé rovnice a stejně tak od pravé pravou.

Je to ekvivalentní úprava, protože předpokládáme platnost rovnosti ve druhé rovnici.

$$
\begin{aligned}
(3x + y) - (3x - 2y) &= 11 - (-4) \\
3y &= 15
\end{aligned}
$$

Z toho již y snadno vyjádříme ($y = 5$). Následně toto řešení dosadíme do libovolné z rovnic a dopočteme druhou neznámou,

$$
\begin{aligned}
3x + y &= 11\,, \\
3x + 5 &= 11\,, \\
x &= 2\,.
\end{aligned}
$$

Zbývá již jen řešení přehledně napsat: $y = 5$, $x = 2$.

Rovnice s více neznámými a závěr

Při řešení se můžete setkat i s takovými soustavami, kde bude více neznámých. I na ty jdou použít výše zmíněné postupy, jen se více napočítáte. Pro dosazování je například nutné z první rovnice vyjádřit první neznámou za pomoci ostatních, ze druhé pak po dosazení výsledku druhou a tak dále až do konce. Jediné, co byste měli před výpočtem udělat, je zjistit, kolik rovnic a kolik neznámých máte. Pokud je jich stejně a není v nich chyba, pravděpodobně se dočkáte jednoznačného výsledku. Pokud je rovnic více než neznámých, dají se dvě nebo několik rovnic pomocí ekvivalentních úprav převést samy na sebe (říkáme potom, že jsou ekvivalentní). Nakonec, pokud je neznámých více než rovnic, pravděpodobně jste na něco zapomněli a nějakou další rovnici musíte vymyslet. Pokud jste si jisti, jednu z proměnných je potom nutno prohlásit za parametr a ostatní vyjádřit ve formě výrazů pomocí ní.

Návody popsané ve dnešní kapitole by vám měli pomoci řešit jednoduché i složitější úkoly, když víte, jak je popsat pomocí rovnic. Doufáme, že tyto postupy budete používat nejen při řešení seriálových úloh.

Pořadí řešitelů po první sérii

	jméno	**1**	**2**	**3**	**4**	**E**	**S**	**Σ**
	Student Pilný	4	4	4	4	8	6	**30**
1	*Daniel Pišťák*	2	4	2	1	8	6	**23**
2	*Vojtěch Němeček*	5	3	2	3	8	–	**21**
3	*Filip Šmejkal*	0	2	3	4	8	–	**17**
4	*Gabriela Šmejkalová*	0	2	3	3	8	–	**16**
5	*Dinh Huy Nhat Minh*	1	3	1	3	3	4	**15**
6	*Matěj Hrabal*	3	4	1	4	3	–	**15**
7	*Vojtěch Černý*	2	–	–	–	8	–	**10**
8	*Zuzana Viceníková*	3	1	2	1	3	–	**10**
9	*Stanislav Boula*	3	4	1	–	–	–	**8**
10	*Ester Sgállová*	3	3	–	2	–	–	**8**
11	*Dalibor Dvořák*	2	3	–	2	–	–	**7**
12	*Jan Frait*	3	0	1	3	–	–	**7**
13	*Daniel Saska*	2	4	1	–	–	–	**7**
14	*Jiří Koucký*	0	2	2	2	–	–	**6**
15	*Jakub Weisl*	2	–	1	3	–	–	**6**
16	*Matyáš Grof*	1	1	1	2	–	–	**5**
17	*Vladzislau Katselnikau*	1	2	1	1	–	–	**5**
18	*Tomáš Pauček*	2	–	–	3	–	–	**5**
19	*Jan Hladik*	–	–	0	4	–	–	**4**
20	*Michal Kunc*	–	–	–	4	–	–	**4**
21	*Tomáš Lederer*	2	–	1	1	–	–	**4**
22	*Pohorely*	1	–	–	3	–	–	**4**
23	*William Tatarko*	–	3	–	–	–	–	**3**
24	*Tomáš Hlavatý*	1	–	1	–	–	–	**2**

FYKOS – Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.fykos.cz/`
e-mail: `vyfuk@fykos.cz`